ISSN 1864-6168

PLOHA DISKONTINUITETA UDARNOG VALA

Hižak J. [1], **Logožar R.** [1]
[1]**Veleučilište u Varaždinu, Varaždin, Hrvatska**

Sažetak: *Članak opisuje nastanak udarnih valova, daje izvod Hugoniot-Rankinove formule i pokazuje da se ploha diskontinuiteta giba nadzvučnom brzinom.*

Ključne riječi: *udarni val, ploha diskontinuiteta, Hugoniot-Rankinova jednadžba, nadzvučno gibanje*

Abstract*. This paper describes the formation of shock waves, presents a derivation of Hugoniot-Rankine equation, and shows that surface of discontinuity moves with supersonic speed.*

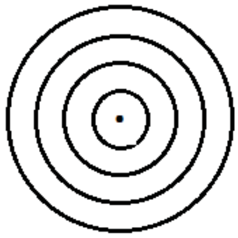
Key words: *shock wave, surface of discontinuity, Hugoniot-Rankine equation, supersonic speed*

1. UVOD

Udarni val je mehanički poremećaj koji se kroz medij širi nadzvučnom brzinom, odnosno brzinom većom od brzine propagacije običnih valova. Za razliku od akustičkih valova koje uobičajeno smatramo slabim valovima u izentropnom režimu, kod udarnog se vala javlja niz specifičnih pojava, kao što su diskontinuitet u tlaku, ireverzibilnost i promjena entropije. Učinci udarnog vala su akustičke i mehaničke naravi (prasak, uleknuća), ali efekti se mogu pojaviti i na atomskoj skali (pomak spektralnih linija kod molekulskih tekućina)[5].
Udarni val može nastati probijanjem zvučnog zida, pri čemu nastaje valna fronta stožastog oblika, ili eksplozijom, prilikom koje nastaje fronta sferoidnog oblika. Valnu frontu karakterizira nagli porast tlaka odnosno velika razlika tlaka ispred i iza valne fronte. Skokovita promjena tlaka i gustoće razlog je zašto govorimo o *plohi diskontinuiteta*. U nekim udžbenicima pojam *ploha diskontinuiteta* označava valnu frontu udarnog vala, a kod nekih autora rabi se kao sinonim za sâm udarni val. U ovom članku opisat ćemo, ukratko, nastanak udarnih valova, a potom ćemo se posvetiti ideji plohe diskontinuiteta. Pomoću osnovnih zakona očuvanja, izvest ćemo čuvenu Hugoniot -Rankinovu relaciju, a zatim ćemo ispitati da li takva *ad hoc* ideja kao što je ploha diskontinuiteta ispunjava osnovni preduvjet-gibanje nadzvučnom brzinom.

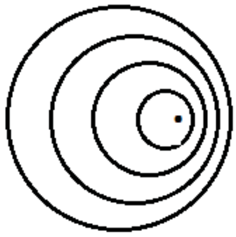
2. NASTANAK UDARNIH VALOVA

Budući da je nemoguće postići nadzvučnu brzinu, a da se ne inducira udarni val, teorija udarnih valova obično polazi od razmatranja projektila koji je giba nadzvučnom brzinom. Kad kažemo *'nadzvučna brzina´* mislimo, u stvari, na brzinu koja je veća od brzine širenja elastičnih deformacija u zadanom sredstvu. Ako na primjer brod ide brzinom koja je veća od brzine širenja valova po površini mora, tada će se, također, stvoriti udarni val - karakteristično slovo V koje putuje sa svakim brodom.
Ilustracije radi, razmotrimo nekoliko mogućih slučajeva kad imamo izvor zvuka u nekom fluidu. Ako izvor zvuka miruje u odnosu na sredstvo, valne fronte oblikuju koncentrične sfere, i frekvencija kojom valovi stižu u bilo koju točku prostora je jednaka originalnoj frekvenciji odašiljača.



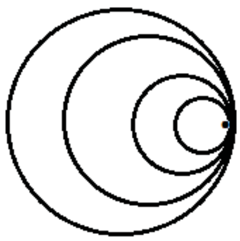
Slika 1. Valne fronte mirujućeg izvora zvuka

Kad se izvor zvuka giba u donosu na sredstvo, brzinom manjom od brzine zvuka dolazi do promjene frekvencije odnosno do Dopplerovog efekta. Dopplerov efekt se primjećuje uvijek kada je brzina gibanja izvora manja od brzine širenja zvuka. Frekvencija primljenih valova ovisi o položaju prijemnika.



Slika 2. Valne fronte izvora zvuka koji se giba u odnosu na sredstvo

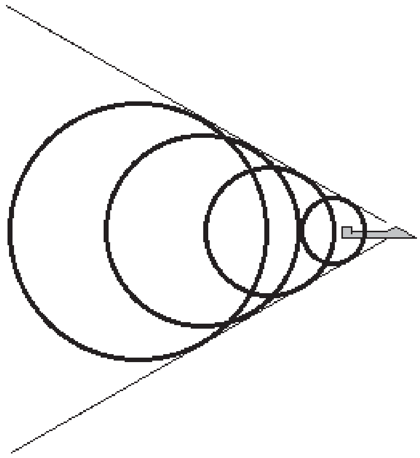
Ako se izvor giba brzinom koja je točno jednaka brzini širenja valova tada se događa sasvim novi efekt; valne se fronte gomilaju ispred projektila, stvarajući regiju komprimiranog fluida velike gustoće.



Slika 3. Valne fronte kad je brzina izvora jednaka brzini zvuka

ISSN 1864-6168

Prelazak iz podzvučne u nadzvučnu brzinu biva popraćen stvaranjem stožastog udarnog vala koji se može shvatiti kao superpozicija svih valnih fronti.

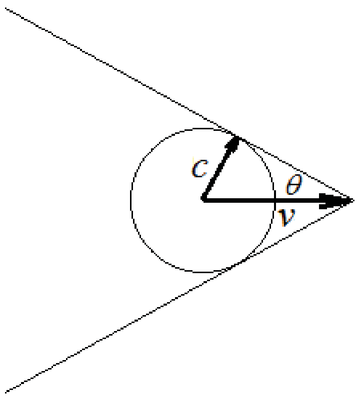


Slika 4. Izvor zvuka giba se nadzvučnom brzinom

Smjer valnog vektora koji bi određivao signal upućen iz tako brzog projektila bio bi ograničen unutar stošca čiji je kut određen relacijom

$$\sin\vartheta = \frac{c}{v} = M \qquad (2.1)$$

gdje je c brzina zvuka, v brzina projektila, *M* je tzv. *Machov broj.*



Slika 5. Stožasta valna fronta. Vektor brzine zvuka okomit je na valnu frontu, stoga zajedno s brzinom projektila $\vec{v}$ formira pravokutni trokut. Omjer tih brzina definiramo kao Machov broj .

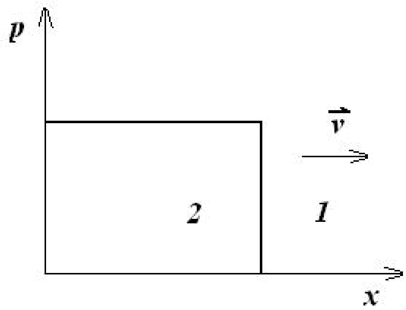
Udarni val također nastaje kod eksplozija. Pod eksplozijom smatramo naglo oslobađanje energije uslijed ekspanzije plinova ili para, bez obzira da li su plinovi ili pare bili prisutni već prije eksplozije (eksplozija parnog kotla) ili su nastali tek prilikom eksplozije (izgaranje eksploziva). U slučaju detonacije eksploziva, plinovi su nusprodukt određenih kemijskih reakcija. Zahvaljujući velikoj količini topline koja se razvija prilikom takvih reakcija, dolazi do jakog zagrijavanja i gotovo trenutačne ekspanzije plinova. Kompresijom susjednog medija generira se udarni val [3].

3. PLOHA DISKONTINUITETA

Već spomenuta valna fronta odlikuje se naglim porastom tlaka i gustoće, stoga se u teoriju uvodi *ploha diskontinuiteta*[1]. Opravdanost takvog naziva možda se najzornije pokazuje na slici 5; zahvaljujući razlici u gustoći, kod transparentnih fluida postoji znatna razlika u indeksu loma svjetlosti, pa se udarni val može snimiti optičkom kamerom.

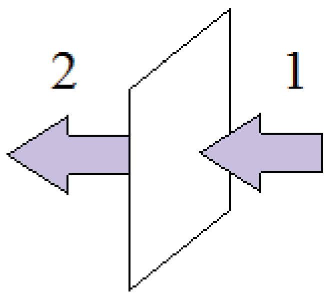
Slika 6. Udarni val oko trupa mlaznog aviona

Plohu diskontinuiteta možemo prikazati kao step-funkciju tlaka koja se giba slijeva na desno jasno dijeleći prostor na dvije regije: onu ispred i onu iza valne fronte. Oznake '1' i '2' koristit će nam kod labeliranja fizikalnih veličina tih dviju regija.



Slika 7. Diskontinuirani porast tlaka. Ploha diskontinuiteta može se prikazati i pomoću step-funkcije tlaka.

Radi jednostavnijeg računa, razmatrat ćemo samo mali dio plohe diskontinuiteta tako da valna fronta približno odgovara ravnini, pa ćemo širenje vala tretirati kao gibanje u jednoj dimenziji okomitoj na tu ravninu. Koordinatni sustav fiksirat ćemo za element plohe tako da iz tog sustava izgleda kao da fluid teče kroz plohu diskontinuiteta.



Slika 8. Element plohe diskontinuiteta. Ako ploha ide slijeva na desno, tada fluid teče zdesna na lijevo gledano iz sustava plohe

ISSN 1864-6168

3.1 Očuvanje mase, energije i impulsa kroz plohu diskontinuiteta

Masa fluida koja izlazi iz plohe mora biti jednaka masi fluida koja ulazi u plohu. Dakle, naš prvi zahtjev tiče se očuvanja gustoće struje i pišemo ga u obliku:

$$\rho_1 v_1 = \rho_1 v_1 = j \tag{2.2}$$

Protok energije kroz zadanu plohu određuje vektor gustoće energetskog toka:

$$\rho\vec{v}\left(\frac{1}{2}v^2 + \frac{p}{\rho} + \varepsilon\right) \tag{2.3}$$

S obzirom da je smjer brzine fluida paralelan s jediničnim vektorom površine, zahtjev za očuvanjem energetskog toka kroz plohu diskontinuiteta glasi:

$$\rho_1 v_1\left(\frac{1}{2}v_1^2 + \frac{p_1}{\rho_1} + \varepsilon_1\right) = \rho_2 v_2\left(\frac{1}{2}v_2^2 + \frac{p_2}{\rho_2} + \varepsilon_2\right) \tag{2.4}$$

što u kombinaciji sa zahtjevom (2.2) daje:

$$\frac{1}{2}v_1^2 + \frac{p_1}{\rho_1} + \varepsilon_1 = \frac{1}{2}v_2^2 + \frac{p_2}{\rho_2} + \varepsilon_2 \tag{2.5}$$

Analogno masi i energiji, zahtijevamo da bude očuvan tok impulsa, odnosno da impuls djelića fluida koji u jedinici vremena upada na jediničnu površinu naše zamišljene plohe bude jednak impulsu izlaznog fluida. Transport impulsa određuje vektor gustoće toka impulsa:

$$p\vec{n} + \rho\vec{v}(\vec{v}\cdot\vec{n}) \tag{2.6}$$

gdje je $\vec{n}$ jedinični vektor okomit na element plohe. Prema tome uvjet očuvanja toka impulsa glasi:

$$p_1 + \rho_1 v_1^2 = p_2 + \rho_2 v_2^2 \tag{2.7}$$

3.2 Hugoniot-Rankinova relacija

Relacija (2.7) u kombinaciji sa relacijom (2.2) daje:

$$p_1 + \frac{j^2}{\rho_1} = p_2 + \frac{j^2}{\rho_2} \tag{2.8}$$

Iz tog identiteta dobivamo važnu jednadžbu koja određuje gustoću struje fluida kroz plohu diskontinuiteta:

$$j^2 = \frac{p_2 - p_1}{\dfrac{1}{\rho_1} - \dfrac{1}{\rho_2}} = \frac{p_2 - p_1}{V_1 - V_2} \tag{2.9}$$

gdje smo uveli tzv. *specifični volumen* $V \equiv 1/\rho$. Oduzimanjem brzina, prema (2.2) dobivamo:

$$v_1 - v_2 = j\left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2}\right) \tag{2.10}$$

Eliminacijom gustoće struje pomoću (2.9) dobivamo korisnu relaciju za određivanje razlike brzine fluida ispred i iza plohe diskontinuiteta:

$$v_1 - v_2 = \sqrt{(p_2 - p_1)(V_1 - V_2)} \tag{2.11}$$

Ukoliko nas zanima kako se mijenja unutarnja energija, možemo iskoristiti relaciju (2.5) i eliminirati brzine pomoću gustoće struje iz (2.2):

$$\frac{p_1}{\rho_1} + \varepsilon_1 - \frac{p_2}{\rho_2} - \varepsilon_2 = \frac{1}{2}j^2\left(\frac{1}{\rho_2^2} - \frac{1}{\rho_1^2}\right) \tag{2.12}$$

Kvadrat gustoće struje supstituiramo izrazom (2.9) i nakon kraćeg algebarskog računa dobivamo čuvenu Hugoniot-Rankinovu relaciju koja povezuje termodinamičke veličine ispred i iza valne fronte udarnog vala:

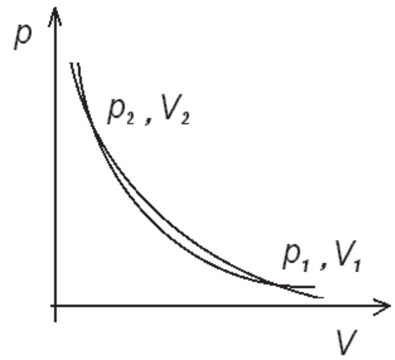
$$\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \frac{1}{2}(V_1 - V_2)(p_1 - p_2) = 0 \tag{2.13}$$

Što se tiče temperature, ona se može uvesti preko specifičnog toplinskog kapaciteta. U slučaju idealnog plina, pretpostavljamo da je specifičan toplinski kapacitet neovisan o temperaturi, stoga vrijedi:

$$\varepsilon_1 - \varepsilon_2 = C_V(T_1 - T_2) \tag{2.14}$$

U tom slučaju Hugoniot-Rankinova relacija prelazi u oblik:

$$C_V(T_1 - T_2) + \frac{1}{2}(V_1 - V_2)(p_1 - p_2) = 0 \tag{2.15}$$



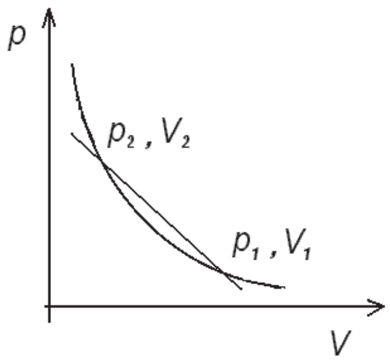
Slika 9. Tlak u ovisnosti o gustoći. Kroz zadani par točaka može prolaziti više različitih udarnih adijabata

Ako je zadano početno stanje fluida tada možemo odrediti kakva je veza između tlaka i gustoće fluida iza valne fronte. Veza između tlaka i gustoće se naziva *udarna adijabata,* a Hugoniot-Rankinova relacija (2.15) nam otkriva da ta veza nije jedinstvena jer se ne može napisati u obliku *f(p,V)=const*. Kroz početno stanje p_1,V_1 i završno stanje p_2,V_2 može prolaziti više različitih udarnih adijabata [1].

ISSN 1864-6168

4. BRZINA PLOHE DISKONTINUITETA

Najvažnija stvar kod grafičke interpretacije udarnog vala je nagib sekante koja prolazi kroz početno i završno stanje fluida.



Slika 10. Sekanta kroz početno i završno stanje

Kao što se vidi iz relacije (2.9) upravo taj nagib $\Delta \boldsymbol{p}/\Delta \boldsymbol{V}$ određivat će gustoću struje, a time i razliku između brzina fluida ispred i iza plohe diskontinuiteta. Ako je razlika između početnog i završnog stanja mala tada govorimo o *slabim udarnim valovima* i nagib sekante približno je jednak nagibu tangente tj. vrijedi aproksimacija:

$$j^2 = \frac{p_2 - p_1}{V_1 - V_2} = -\frac{\Delta p}{\Delta V} \approx -\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_1 \qquad (2.16)$$

Ako uzmemo da je gustoća fluida približno jednaka s obje strane promatrane plohe tada je i brzina fluida gotovo neizmjenjena, odnosno:

$$v_1 = v_2 \equiv v = jV = \sqrt{-\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right) V^2} \qquad (2.17)$$

Kad se to napiše preko gustoće dolazimo da vrlo zanimljivog rezultata:

$$v = \sqrt{-\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right) V^2} = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)} = c \qquad (2.18)$$

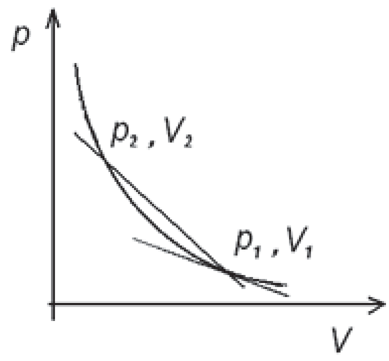
Brzina fluida jednaka je brzini zvuka, odnosno promatrano iz sustava fluida, ploha diskontinuiteta se giba brzinom zvuka!

Razmotrimo sada slučaj kad imamo veliki skok u gustoći i tlaku. Brzina fluida ispred plohe diskontinuiteta je:

$$v_1 = jV_1 \qquad (2.19)$$

Nagib sekante je veći od nagiba tangente u točki (p_1, V_1) . Odatle nejednakost:

$$j^2 = \frac{p_2 - p_1}{V_1 - V_2} = -\frac{\Delta p}{\Delta V} > -\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_1 \qquad (2.20)$$



Slika 11. Sekanta u odnosu na tangentu.

Nagib tangente određuje brzinu zvuka u fluidu, dok nagib sekante određuje brzinu gibanja fluida kroz plohu, odnosno brzinu plohe u odnosu na sredstvo.

Pomnožimo li tu nejednakost s kvadratom specifičnog volumena fluida prednje regije, slijedi:

$$j^2 V_1^2 > -\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_1 V_1^2 \qquad (2.21)$$

$$v_1^2 > -\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_1 V_1^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_1^2 = c_1^2 \qquad (2.22)$$

Što nam, u konačnici, daje odnos između brzine fluida kroz plohu i brzine zvuka ispred plohe.

$$v_1 > c_1 \qquad (2.23)$$

Brzina ulaznog fluida je, dakle, veća od brzine zvuka u netaknutom mediju ispred valne fronte.

S obzirom da iza fronte naglo raste strmina udarne adijabate, povećava se i nagib tangente, pa prema tome i brzina zvuka. Analogno prijašnjem razmatranju, usporedbom tangente i sekante u točki *(p_2 ,V_2)* dobivamo:

$$v_2 < c_2 \qquad (2.24)$$

5. ZAKLJUČAK

Naše razmatranje udarnih valova počelo je definicijom prema kojoj se udarni valovi, od običnih valova, razlikuju upravo nadzvučnom brzinom. Stoga je za svaki model udarnih valova krucijalno upravo pitanje brzine.

Pomoću zakona očuvanja mase, energije i impulsa, izveli smo jednadžbu za gustoću struje fluida

$$j^2 = \frac{p_2 - p_1}{V_1 - V_2}$$

te smo pokazali da je brzina fluida kroz plohu diskontinuiteta veća od prvobitne brzine zvuka (ispred plohe diskontinuiteta vladaju prvobitni uvjeti).

$$v_1 > c_1$$

Odnosno, ako gledamo iz sustava fluida prednje regije - ploha diskontinuiteta se giba nadzvučnom brzinom. Time smo zapravo pokazali da ploha diskontinuiteta zaista opisuje nadzvučno gibanje.

6. REFERENCES

1. L.D.Landau and E.M.Lifshitz (1987), *Course on Theoretical Physics,Volume 6, Fluid Mechanics,*
2. Feynman R. (1964) , *Lectures on Physics*
3. V.Eržen, P.Sabioncello (1969), *Eksplozivi, Tehnička enciklopedija, treći svezak*
4. Šips V. (1990.), *Uvod u statističku fiziku*
5. Schmidt C., Moore D.S.(1992), *Vibrational spectroscopy of high-temperature, dense molecular fluids by coherent anti-stokes raman scattering, Acc.Chem.Res.,**25***, 427-432

Kontakt:
jurica.hizak@velv.hr
robert.logozar@velv.hr