

# GENERIRANJE SINUSNOG VALNOG OBLIKA FILTRIRANJEM PRAVOKUTNOG VALNOG OBLIKA PRIMJENOM RC FILTRA I ANALIZE FOURIEROVIH REDOVA

Vrhovski Z.<sup>1</sup>, Šumiga I.<sup>2</sup>, Purković D.<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Visoka tehnička škola u Bjelovaru, Bjelovar, Hrvatska

<sup>2</sup>Veleučilište u Varaždinu, Varaždin, Hrvatska

**Sažetak:** U radu opisano je generiranje sinusnog valnog oblika filtriranjem pravokutnog valnog oblika primjenom RC filtra. Korišten je razvoj pravokutnog valnog oblika u Fourierov red te filtriranje viših harmonika kako bi se zadržao samo osnovni harmonik. Filtriranje je provedeno simulacijski i eksperimentalno. Prikazana su odstupanja realnog RC filtra od simuliranog RC filtra u Matlab SIMULINK-u.

**Ključne riječi:** Fourierov red, sinusni valni oblik, pravokutni valni oblik, filter, harmonik,

**Abstract:** This paper describes how sine wave is generated from square wave signal using RC filter. Square wave signal was expanded into Fourier series, and then higher harmonics was filtered, so that only base harmonic can be kept. Filtering is performed by simulation and by experiment. This paper also shows differences between real and ideal RC filter. Simulation was implemented in Matlab<sup>®</sup> and SIMULINK<sup>®</sup>.

**Key words:** Fourier series, sine wave, square wave, filter, harmonic

## 1. UVOD

Osnovni zadatak ovog rada je pokazati primjenu matematike u analizi i sintezi sinusnog valnog oblika. Funkciju sinusnog valnog oblika moguće je generirati na mnogo načina. Ako se sinus funkcija generira pomoću mikrokontrolera tada je poželjno osmisliti način na koji će se uštedjeti na memorijskom prostoru i broju utrošenih izlaznih pinova mikrokontrolera. Jedan od mogućih načina generiranja sinusnog valnog oblika je korištenje D/A pretvornika čija rezolucija može biti proizvoljna. Veća rezolucija zahtijeva veći broj utrošenih izlaznih pinova, ali i veći broj memorijskih lokacija u koje će se pohraniti diskretne vrijednosti sinusne funkcije. Ovaj način generiranja sinusnog valnog oblika zahtijeva veliko zauzeće memorije i veliki utrošak izlaznih pinova. Još jedan nedostatak ovog načina je nemogućnost generiranja neprekinutog signala (signal je stepeničast) zbog konačne rezolucije D/A pretvornika. Drugi način na koji se može generirati sinusni valni oblik je korištenje znanja iz Fourierove analize. Ovo traži korištenje samo jednog izlaznog pina mikrokontrolera, a bit će opisan u nastavku.

## 2. FOURIEROVI REDOVI

Svaka periodična funkcija  $f(t)$  koja zadovoljava Dirichletove uvjete na intervalu  $[a, b]$  može se razviti u trigonometrijski Fourierov red oblika [1]:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{2n\pi t}{T} + b_n \sin \frac{2n\pi t}{T} \right) \quad (1)$$

gdje je  $T = b - a$  period funkcije  $f(t)$ . Koeficijenti Fourierovog reda računaju se prema:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{T} \int_a^b f(t) dt \\ a_n &= \frac{2}{T} \int_a^b f(t) \cos \frac{2n\pi t}{T} dt, n > 0 \\ b_n &= \frac{2}{T} \int_a^b f(t) \sin \frac{2n\pi t}{T} dt, n > 0 \end{aligned} \quad (2)$$

Ako je periodična funkcija  $f(t)$  definirana na simetričnom intervalu  $[-L, L]$  parna, tj. ako je  $f(-t) = f(t)$  tada njen trigonometrijski Fourierov red sadrži samo kosinus članove i ima oblik: (3)

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi t}{L} \quad (3)$$

Koeficijenti uz kosinus funkcije računaju se prema (4):

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{L} \int_0^L f(t) dt \\ a_n &= \frac{2}{L} \int_0^L f(t) \cos \frac{n\pi t}{L} dt, n > 0 \end{aligned} \quad (4)$$

Ako je periodična funkcija  $f(t)$  definirana na simetričnom intervalu  $[-L, L]$  neparna, tj. ako je  $f(-t) = -f(t)$  tada njen trigonometrijski Fourierov red sadrži samo sinus članove i ima oblik: (5)

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi t}{L} \quad (5)$$

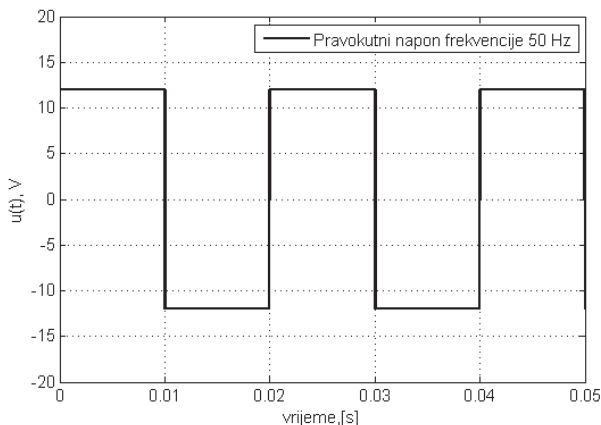
Koeficijenti uz sinus funkcije računaju se prema (6):

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(t) \sin \frac{n\pi t}{L} dt, n > 0 \quad (6)$$

Prema (5) i (6) potrebno je generirati neparnu periodičnu funkciju pravokutnog valnog oblika s jednakim trajanjem pozitivnog i negativnog dijela signala kako bi se filtriranjem tog signala dobio sinusni valni oblik. Na taj način periodična funkcija  $f(t)$ , razvijena u Fourierov red, sadržavat će samo sinusne komponente.

### 3. RAZVOJ PERIODIČNE FUNKCIJE PRAVOKUTNOG VALNOG OBLIKA U FOURIEROV RED

Neparnu periodičnu funkciju pravokutnog oblika potrebno je generirati korištenjem mikroračunala i H-mosnog spoja. Nije nužno korištenje mikrokontrolera (može se koristiti vremenski sklop NE555). H-mosni spoj priključen je na istosmjerni izvor napajanja od 12 V (laboratorijski izvor ili akumulatorska baterija). Pravilnim upravljanjem H-mosnog spoja pomoću mikrokontrolera dobiven je naponski signal  $u(t)$  prikazan na slici 1.



Slika 1. Pravokutni napon frekvencije 50 Hz

S obzirom na periodičnost i neparnost signala sa slike 1. naponski signal  $u(t)$  može se rastaviti u Fourierov red koji sadrži samo sinusne harmonike prema relaciji (6).

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L u(t) \sin \frac{n\pi t}{L} dt = \frac{2}{L} \int_0^L 12 \sin \frac{n\pi t}{L} dt$$

$$b_n = \frac{24}{n\pi} \left( (-1)^{n+1} + 1 \right), b_{2n} = 0 \quad (7)$$

$$b_{2n+1} = \frac{48}{\pi(2n+1)}, n \geq 0$$

Prema relaciji (7) slijedi da su svi parni harmonici jednaki nuli. Ako se koeficijent izračunat u relaciji (7)

supstituiru u relaciju (6) dobije se razvijeni pravokutni naponski signal sa slike 1. u Fourierov red:

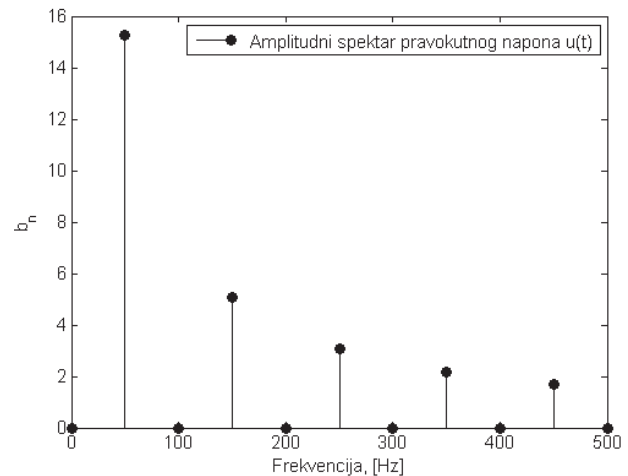
$$u(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{48}{\pi(2n+1)} \sin((2n+1)100\pi t) \quad (8)$$

Ako se izraz (8) razvije, tada se dobije:

$$u(t) = \frac{48}{\pi} \sin 100\pi t + \frac{48}{3\pi} \sin 300\pi t + \dots$$

$$\dots + \frac{48}{\pi(2n+1)} \sin((2n+1)100\pi t) + \dots \quad (9)$$

Neka je sinusni valni oblik koji se želi generirati frekvencije 50 Hz. Tada je kružna frekvencija tog signala  $100\pi$  rad/s. Signal  $u(t)$  (9) sadrži beskonačno mnogo harmonika koji su prikazani na slici 2.



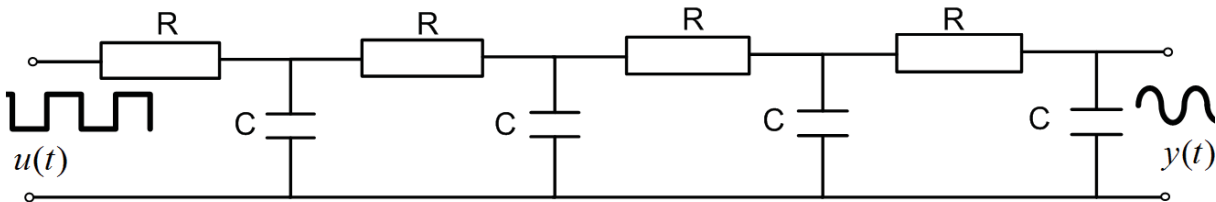
Slika 2. Amplitudni spektar signala  $u(t)$

Od svih harmonika potrebno je izdvojiti harmonik frekvencije 50 Hz, a ostale harmonike potrebno je filtrirati (prigušiti). U svrhu prigušenja utjecaja harmonika frekvencija viših od 50 Hz koristit će se RC filtar 4. reda prikazan na slici 3. Red filtra dobiven je eksperimentalno povećavanjem kaskada RC filtra. Prijenosna funkcija RC filtra je:

$$G(s) = \frac{1}{RCs+1} = \frac{1}{Ts+1} = \frac{1}{\frac{s}{\omega_L} + 1} \quad (10)$$

Tu je  $T$  vremenska konstanta RC filtra, a  $\omega_L$  lomna frekvencija RC filtra. Filtar 4. reda ima sljedeću prijenosnu funkciju [2], [3]:

$$G_f(s) = \frac{1}{(RCs+1)^4} \quad (11)$$



Slika 3. RC filtar 4. reda

Frekvencijska karakteristika RC filtra 4. reda dobit će se ako u relaciji (11) kompleksnu varijablu  $s$  zamijenimo s  $j\omega$ :

$$G_f(j\omega) = \frac{1}{(RCj\omega + 1)^4} = |G_f(j\omega)| e^{j\arg(G_f(j\omega))} \quad (12)$$

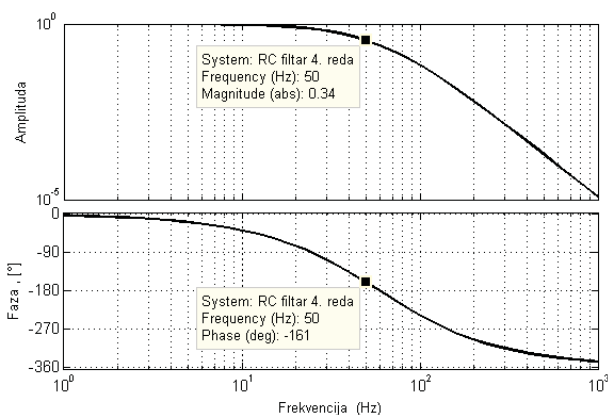
Amplitudno frekvencijska karakteristika RC filtra 4. reda je:

$$|G_f(j\omega)| = \left( \frac{1}{\sqrt{(RC\omega)^2 + 1}} \right)^4 = \frac{1}{((RC\omega)^2 + 1)^2} \quad (13)$$

a fazno frekvencijska karakteristika je:

$$\arg(G_f(j\omega)) = -4 \arctan(RC\omega) \quad (14)$$

Lomnu frekvenciju RC filtra 4. reda potrebno je tako namjestiti da filtar prigušuje sve frekvencije više od 50 Hz ( $100 \pi$  rad/s). Zato mora vrijediti  $\omega_L > 100 \pi$  rad/s, odnosno  $T = R \cdot C < 3.2$  ms. Istodobno lomna frekvencija  $\omega_L$  mora biti manja od  $300 \pi$  rad/s, odnosno  $T = R \cdot C > 1.1$  ms. Na temelju razmatranja umnožak  $R \cdot C$  mora biti unutar intervala  $[1.1, 3.2]$  ms. U laboratoriju je dostupan otpornik  $R$  otpora 2.7 k $\Omega$  i kondenzator  $C$  kapaciteta 1 $\mu$ F. Ova kombinacija otpornika i kondenzatora daje vremensku konstantu  $T = 2.7$  ms, što zadovoljava uvjet prigušenja svih harmonika koji su na frekvencijama višim od 50 Hz ( $100 \pi$  rad/s). Bodeov dijagram RC filtra 4. reda sa spomenutim parametrima otpora i kapaciteta prikazan je na slici 4.

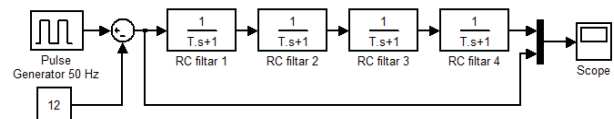


Slika 4. Bodeov dijagram RC filtra 4. reda

Pojačanje RC filtra 4. reda na frekvenciji 50 Hz iznosi 0.34 (slika 4.), što znači da se i osnovni harmonik prigušuje. Isto tako, RC filtar 4. reda unosi i fazno kašnjenje izlaznog signala za 161° (slika 4.). Pojačanje i faza RC filtra 4. reda poprima navedene iznose samo ako je ulazni pravokutni napon frekvencije 50 Hz.

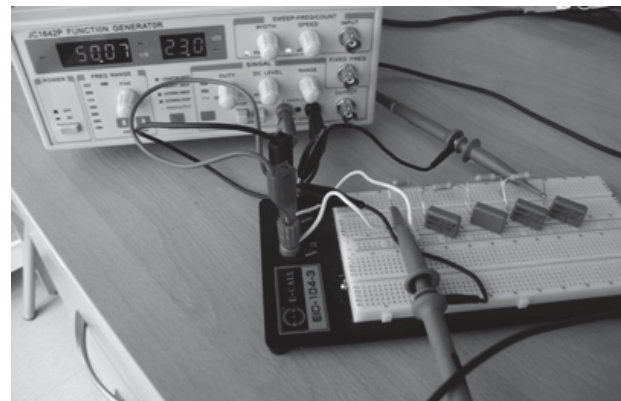
#### 4. SIMULACIJA I EKSPERIMENT

Simulacija generiranja sinusnog valnog oblika iz pravokutnoga valnog oblika izrađena je u *Matlab* SIMULINK-u [4]. Simulacijska shema sklopa za generiranje sinusnog signala prikazana je na slici 5.



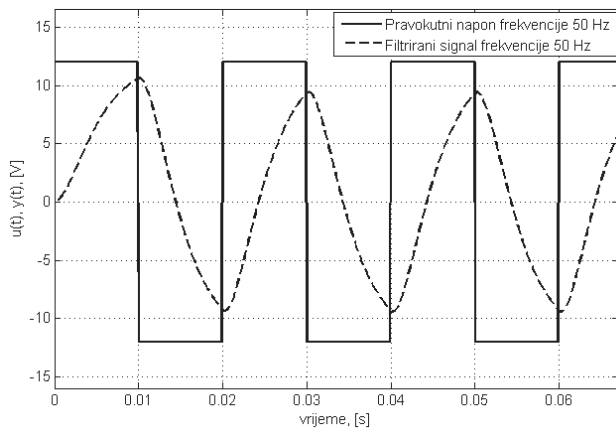
Slika 5. RC filtar 4. reda u Matlab SIMULINK-u

Istovjetna shema realnog sklopa prikazana je na slici 6.

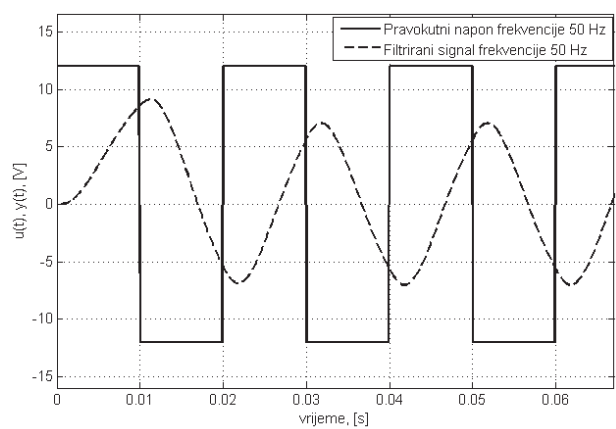


Slika 6. RC filtar 4. reda izveden na testnoj pločici

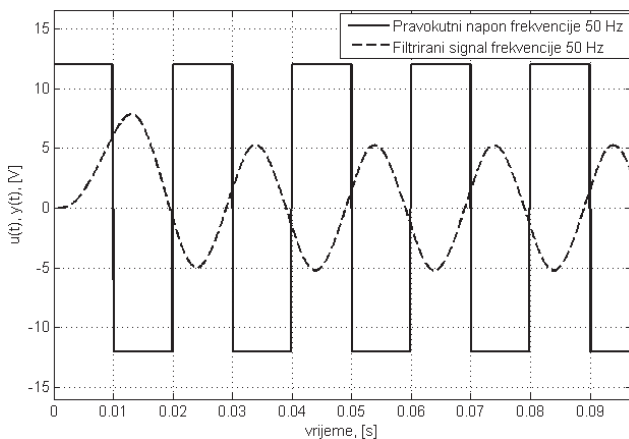
Realni RC filtar 4. reda priključen je na funkcijski generator koji u eksperimentalne svrhe zamjenjuje mikroročunalo i H-mosni spoj.



Slika 7. Odziv RC filtra 2. reda (simulacija)



Slika 8. Odziv RC filtra 3. reda (simulacija)



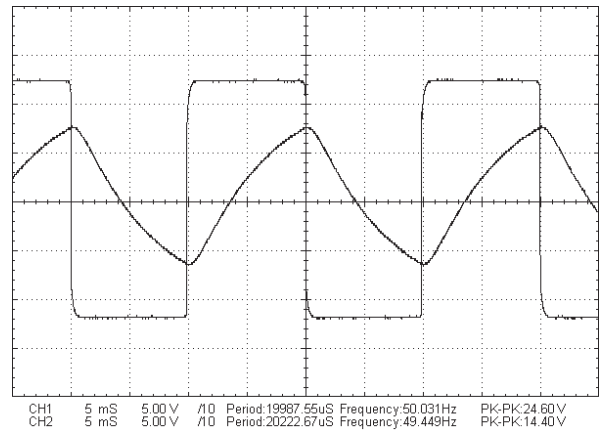
Slika 9. Odziv RC filtra 4. reda (simulacija)

Prigušenje viših harmonika ovisi o redu filtra što se može vidjeti iz izraza (12). Ako se koristi RC filter 2. reda tada izlazni signal iz filtra ima eksponencijalni oblik (slika 7.) Povećanjem reda filtra na 3, povećava se prigušenje signala, ali i izlazni signal ima sve vjerniji oblik sinusoide (slika 8.). Korištenjem RC filtra 4. reda izlazni signal ima zadovoljavajući oblik sinusoide (slika 9.) te nije potrebno povećavati red filtra. Na početku svih simulacija javlja se prijelazna pojava pa nakon druge periode signala sustav ulazi u stacionarno stanje.

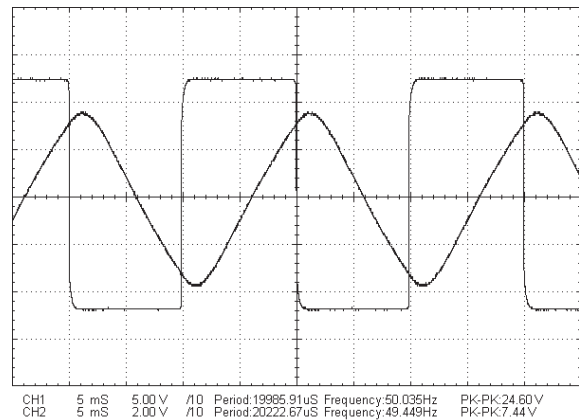
Pojačanje RC filtra na frekvenciji 50 Hz ( $100\pi$  rad/s) može se dobiti prema relaciji (12) i iznosi 0.3382. Fazni pomak signala iznosi  $-161^\circ$ . Prvi harmonik ima rezultat  $48/\pi$ . Uz spomenuta razmatranja izlazni signal ima oblik:

$$y(t) = \frac{48}{\pi} |G_f(j100\pi)| \sin(100\pi t + \arg(G_f(j100\pi))) = 5.1676 \sin(100\pi t - 161^\circ) \quad (14)$$

Relacija (14) predstavlja rezultat dobiven simulacijom u Matlab SIMULINK-u.

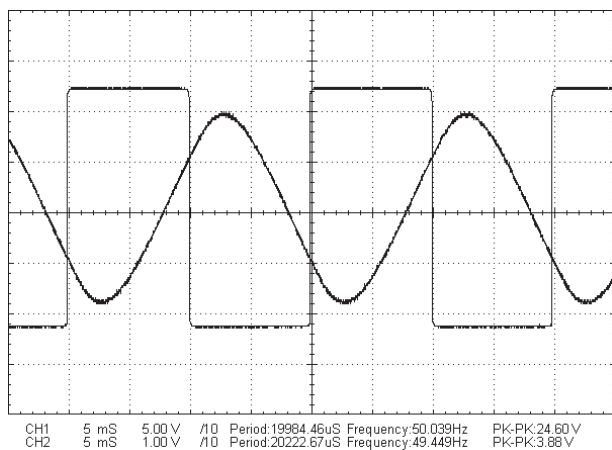


Slika 10. Odziv RC filtra 2. reda (eksperiment)



Slika 11. Odziv RC Filtra 3. reda (eksperiment)

Eksperimentom su dobiveni rezultati koji se ne podudaraju sa simulacijskim rezultatima. Kao i kod simulacije, vrijedi da izlazni signal RC filtra 2. reda ima eksponencijalni oblik (slika 10.) Povećanjem reda filtra na 3, povećava se prigušenje signala, ali i izlazni signal ima sve vjerniji oblik sinusoide (slika 11.). Korištenjem RC filtra 4. reda izlazni signal ima zadovoljavajući oblik sinusoide (slika 12.). Pri usporedbi rezultata simulacije i rezultata eksperimenta potrebno je u obzir uzeti skale pojedinog kanala osciloskopa. Na svim eksperimentalnim slikama prikazana su podešenja pojedinih kanala osciloskopa.



Slika 12. Odziv RC filtra 4. reda (eksperiment)

## 5. ZAKLJUČAK

Primjenom znanja iz Fourierove analize može se postići izdvajanje osnovnog harmonika pravokutnog signala, a time se dobije i traženi sinusni valni oblik. Generirani sinusni signal ima jednaku frekvenciju kao i pravokutni signal. Filtriranjem pravokutnog signala upotrebom RC filtra 4. reda mogu se prigušiti svi viši harmonici. Eksperimentalni rezultati razlikuju se od simulacijskih zbog odstupanja parametara komponenata od nazivnih vrijednosti te zbog parazitnih veličina koje propagiraju od 1. RC filtra prema posljednjem RC filtru. Na taj način greška se povećava. Točniji rezultati dobili bi se korištenjem aktivnih RC filtra umjesto korištenih

pasivnih RC filtara. Aktivni RC filtri izvode se s operacijskim pojačalima. Oblik izlaznog signala je sinusni, ali manje amplitude nego što je predviđeno simulacijom.

## 6. LITERATURA

- [1] Elezović, N. MATEMATIKA 3 : Fourierov red i integral, Laplaceova transformacija. Zagreb : ELEMENT, 2006.
- [2] Šurina, T. Automatska regulacija. Zagreb : Školska knjiga, 1991.
- [3] Vukić, Z; Kuljača, L. Automatsko upravljanje – analiza linearnih sustava. Zagreb : KIGEN, 2005.
- [4] <http://www.mathworks.com/help/toolbox/control>, Control System Toolbox

### Kontakt:

Zoran Vrhovski, mag. ing. eit.  
 Visoka tehnička škola u Bjelovaru  
 Trg Eugena Kvaternika 4  
 43000 Bjelovar  
 mob: 0917842199  
 tel: 043/241-185

mail:  
 zvrhovski@vtsbj.hr  
 ivan.sumiga@velv.hr  
 dpurkovic@vtsbj.hr