ISSN 1864-6168

SUVREMENE TEHNOLOGIJE, MATEMATIKA I PRIMJENE

Keček D.[1], Čančarević M.[1]
[1]Veleučilište u Varaždinu, Varaždin, Hrvatska

Sažetak: *U članku je opisana primjena matematičkog softvera Matlaba za rješavanje matematičkih problema u svrhu što jednostavnijeg svladavanja istih.*

Ključne riječi: *Matlab, matrica, parcijalni razlomak, polinom, sustavi linearnih jednadžbi*

Abstract: *The application of mathematical software Matlab for solving and overcoming mathematical problems as easily as possible is described in the paper.*

Key words: *Matlab, matrix, partial fraction, polynomial, system of linear equations*

1. UVOD

Pretpostavi li se da matematika mnogima treba, ali im nije najvažnija stvar u životu, nameće se pitanje može li im se pomoći kod obaveza na poslu ili tijekom obrazovanja. Suvremene tehnologije to svakako osiguravaju. Danas postoji mnogo matematičkih softvera (Matlab, Wolfram Mathematica, GeoGebra) koji omogućuju brzo i točno rješavanje različitih matematičkih i nematematičkih problema. Matlab je istodobno programski paket i programski jezik široke primjene. Koristi se za računanje, za razvoj algoritama, simulacije, obradu i analizu podataka. Naziv Matlab potječe od engleskih riječi MATrix LABoratory iz kojih je očito da je Matlab alat dizajniran za matrično izračunavanje.

2. RAD S MATLABOM

Osnovni aritmetički operatori u Matlabu su: $+,\ -,\ *,\ /,\ \hat{}$. Najjednostavnija primjena Matlaba je zamjena standardnog kalkulatora Matlabom. Treba li se izračunati izraz $2*(2^5-6)$, to se pomoću Matlaba može napraviti na sljedeći način:

```
>> 2*(2^5-6)
ans =
    52.
```

U simboličkom režimu se matematičke operacije izvršavaju bez računanja njihove numeričke vrijednosti. Za simbolički mod je bitno da se simboli (varijable) koje se koriste u zapisu funkcija, jednadžbi i algebarskih izraza navode funkcijom **syms .** Npr., ako se želi napisati funkcija

$$f(x,y)=x^2-2\sin y+3$$

dovoljno je napisati:

```
>> syms x y
>> f=x^2-sin(y)
```

i rezultat je:

```
f =
 x^2-2*sin(y)+3.
```

Ukoliko treba izračunati vrijednost funkcije $f(3,0)$ koristi se naredba **subs**, tj.

```
>> subs(f,{x,y},{3,0})
ans =
    12.
```

Sve funkcije u Matlabu pišu se malim slovima, a argumenti funkcija u zagradi. Sintaksa i značenje svih funkcija u Matlabu može se naći u MATLAB-Help-u. Tako npr. funkcija e^x u Matlabu ima oblik $exp(x)$.

2.1. Matrice

Osnovni objekti numerike u Matlabu su matrice. Matrica je pravokutna shema sastavljena od realnih ili kompleksnih brojeva. Matrica s m redaka i n stupaca i s elementima $a_{ij}, i=1,2,\dots,m, j=1,2,\dots,n$ obično se zapisuje kao $A=\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$ ili kraće kao $A=[a_{ij}]$. Element a_{ij} matrice A nalazi se na presjeku i-tog retka i j –tog stupca. Matrice se u Matlabu zadaju kao niz brojeva u uglatim zagradama, pri čemu se reci odvajaju točka-zarezom ″;″, a elementi unutar retka se odvajaju razmakom ili zarezom. Matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 5 \end{bmatrix}, B = [4 \quad 9]$ i $C = \begin{bmatrix} -5 \\ 3 \end{bmatrix}$ zapisuju se na sljedeći način:

```
>> A=[1 2 3;0 -1 5]
A =
    1    2    3
    0   -1    5

>> B=[4 9]
B =
    4    9

>> C=[-5;3]
C =
   -5
    3
```

Ako matrica ima jedan redak ili jedan stupac naziva se vektor redak, odnosno vektor stupac. Zbrajati i oduzimati se mogu matrice istog tipa. Matrice A i B su ulančane, ako matrica A ima onoliko stupaca koliko matrica B ima redaka. Množenje matrica je definirano samo za ulančane matrice. Transponirana matrica matrice $A = [a_{ij}]$ tipa (m, n) je matrica $A' = [b_{ji}]$ tipa (n, m) definirana sa $b_{ji} = a_{ij}$, za svaki $i = 1,2, \ldots, m, j = 1,2, \ldots, n$.

Primjer 1. Zadane su matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 5 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} 0 & -6 \\ 4 & 2 \\ 8 & -3 \end{bmatrix}$.

Potrebno je odrediti: $A \cdot B, B \cdot A, A - B, A - B'$.
Kako je matrica A tipa (2,3), a matrica B tipa (3,2), oba produkta $A \cdot B$ i $B \cdot A$ su definirana.
Vrijedi:

```
>> A=[1 2 3;0 -1 5];
>> B=[0 -6;4 2;8 -3];
>> B'
ans =
     0    4    8
    -6    2   -3

>> A*B
ans =
    32  -11
    36  -17

>> B*A
ans =
     0    6  -30
     4    6   22
     8   19    9

>> A-B
??? Error using ==> minus
Matrix dimensions must agree.
```

Razlika matrica A i B nije definirana jer matrice A i B nisu istog tipa, dok je razlika matrica A i B' jednaka

```
>> A-B'
ans =
     1   -2   -5
     6   -3    8
```

Ne ulazeći u detaljnu sintaksu, na primjerima polinoma, parcijalnih razlomaka i sustava linearnih jednadžbi prezentirano je korištenje Matlaba.

2.2. Polinomi

U primijenjenoj matematici često se susreću funkcije koje se zovu polinomi. Posebnu ulogu polinomi imaju u aproksimaciji mnogih drugih složenih funkcija. Polinom n-tog stupnja je funkcija $P_n: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ zadana formulom
$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$, gdje su $a_0, a_1, \ldots, a_n \in R$, $a_n \neq 0, n \in \boldsymbol{N}$. Brojevi $a_i, i = 0, \ldots, n$ se zovu koeficijenti polinoma P_n. Polinomi se u Matlabu zadaju u obliku vektora retka $[a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0]$ u koji se upišu koeficijenti polinoma. Polinomi se mogu zbrajati, oduzimati, množiti i dijeliti.

Primjer 2. Neka su $P(x) = -2x^3 + x - 8$ i $Q(x) = x^2 - 5x + 1$ dva polinoma. Treba odrediti:

$$P + Q, P - Q, P \cdot Q \text{ i } \frac{P}{Q}.$$

Kako je za zbrajanje i oduzimanje polinoma potrebna ista dimenzija vektora, vektor Q je potrebno nadopuniti nulama. Tako se polinomu $P(x) = -2x^3 + x - 8$ pridružuje vektor
>> P=[-2 0 1 -8],
a polinomu $Q(x) = x^2 - 5x + 1$ vektor
>> Q=[0 1 -5 1].

```
>> P+Q
ans =
    -2    1   -4   -7
```

Značenje: $(-2x^3 + x - 8) + (x^2 - 5x + 1) = -2x^3 + x^2 - 4x - 7$.

```
>>  P-Q
ans =
    -2   -1    6   -9
```

Značenje: $(-2x^3 + x - 8) - (x^2 - 5x + 1) = -2x^3 - x^2 + 6x - 9$.

Polinomi se množe naredbom conv. Kod množenja polinoma vektori koje pridružujemo polinomima ne moraju biti istih dimenzija.

>> conv(P,Q)
ans =
0 -2 10 -1 -13 41 -8

Značenje: $(-2x^3 + x - 8) \cdot (x^2 - 5x + 1) = -2x^5 + 10x^4 - x^3 - 13x^2 + 41x - 8.$

Teorem o dijeljenju polinoma s ostatkom. Za svaka dva polinoma P i Q, $Q \neq 0$ postoje jedinstveni polinomi S i R takvi da vrijedi

$$P = Q \cdot S + R.$$

Ako je $R \neq 0$, polinom S zovemo nepotpuni kvocijent polinoma P i Q, a polinom R ostatak pri dijeljenju polinoma P s polinomom Q.

Dijeljenje polinoma $P(x) = -2x^3 + x - 8$ i $Q(x) = x^2 - 5x + 1$ po algoritmu dijeljenja polinoma, ima sljedeći oblik:

$$\begin{array}{l}(-2x^3 + x - 8) : (x^2 - 5x + 1) = -2x - 10 \\ \underline{\mp 2x^3 \pm 10x^2 \mp 2x} \\ -10x^2 + 3x - 8 \\ \underline{\mp 10x^2 \pm 50x \mp 10} \\ -47x + 2\end{array}$$

Dakle, nepotpuni kvocijent je $S(x) = -2x - 10$, a ostatak $R(x) = -47x + 2$. Polinom P tako možemo zapisati u obliku

$$-2x^3 + x - 8 = (x^2 - 5x + 1)(-2x - 10) - -47x + 2.$$

Ovisno o stupnjevima polinoma, dijeljenje polinoma po algoritmu može imati veliki broj koraka. Tu pomaže Matlab svojom jednostavnošću. Za dijeljenje polinoma koristi se naredba deconv.

>> deconv([-2 0 1 -8],[1 -5 1])
ans =
-2 -10

a ostatak R se provjeri na sljedeći način:

>> [-2 0 1 -8]- conv([1 -5 1],[-2 -10])
ans =
0 0 -47 2

2.3. Parcijalni razlomci

Često je potrebno racionalnu funkciju rastaviti na zbroj jednostavnijih racionalnih funkcija koje se zovu parcijalni razlomci. Parcijalni razlomci se koriste u integralnom računu kod integriranja racionalne funkcije, za određivanje inverzne Laplaceove transformacije dane funkcije, za određivanje inverzne Z-transformacije itd. Racionalna funkcija je kvocijent dvaju polinoma $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$. R je prava racionalna funkcija ako je stupanj polinoma u brojniku manji od stupnja polinoma u nazivniku, tj. $st\ P < st\ Q$.

Teorem o parcijalnim razlomcima. Svaka prava racionalna funkcija $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ može se na jedinstveni način prikazati kao zbroj parcijalnih razlomaka.

Kako se polinom Q može zapisati u obliku

$$Q(x) = (x - x_1)^{p_1} \cdots (x - x_s)^{p_s}(x^2 + a_1 x + b_1)^{r_1} \cdots (x^2 + a_t x + b_t)^{r_t},$$

gdje su $p_i, r_j, s, t \in \boldsymbol{N}$, x_i su realne nultočke od Q, $i = 1, \dots, s$, a $a_j^2 - 4b_j < 0$, $j = 1, \dots, t$ teorem zapravo tvrdi da postoje jedinstveni brojevi $A_{jk}, B_{jk}, C_{jk} \in \boldsymbol{R}$ takvi da se R može zapisati u obliku

$$\begin{aligned} R(x) = {} & \frac{A_{11}}{x - x_1} + \frac{A_{12}}{(x - x_1)^2} + \cdots + \frac{A_{1p_1}}{(x - x_1)^{p_1}} + \\ & + \cdots + \frac{A_{s1}}{x - x_s} + \frac{A_{s2}}{(x - x_s)^2} + \cdots + \frac{A_{sp_s}}{(x - x_s)^{p_s}} + \\ & + \cdots + \frac{B_{11}x + C_{11}}{x^2 + a_1 x + b_1} + \cdots + \frac{B_{1r_1}x + C_{1r_1}}{(x^2 + a_1 x + b_1)^{r_1}} + \\ & + \cdots + \frac{B_{t1}x + C_{t1}}{x^2 + a_t x + b_t} + \cdots + \frac{B_{tr_t}x + C_{tr_t}}{(x^2 + a_t x + b_t)^{r_t}} \end{aligned}$$

Primjer 3. Rastav racionalne funkcije

$$R(x) = \frac{2x^2 - 3x - 1}{x^3 - x}$$

na parcijalne razlomke.

Prema teoremu o parcijalnim razlomcima postoje jedinstveni brojevi $A, B, C \in \boldsymbol{R}$ takvi da je

$$\frac{2x^2 - 3x - 1}{x^3 - x} = \frac{A}{x + 1} + \frac{B}{x - 1} + \frac{C}{x}$$

Množenjem jednakosti s $x(x^2 - 1)$ i nakon sređivanja dobiva se:

$$2x^2 - 3x - 1 = x^2(A + B + C) + x(B - A) - C.$$

U daljnjem računu potreban je

Teorem o jednakosti polinoma. Polinomi $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ i $Q(x) = \sum_{l=0}^{m} b_l x^l$, $a_n \neq 0, b_m \neq 0$, $a_i, b_j \in \boldsymbol{R}$ su jednaki ako i samo ako je $m = n$ i $a_j = b_j$, za sve $j = 0, 1, \dots, n$.

Primjenom Teorema o jednakosti polinoma slijedi:

$$\begin{aligned} A + B + C &= 2 \\ B - A &= -3 \\ -C &= -1, \end{aligned}$$

a odavde je $A = 2, B = -1, C = 1$.

Racionalna funkcija $R(x)$ se tako može prikazati kao zbroj parcijalnih razlomaka

$$\frac{2x^2 - 3x - 1}{x^3 - x} = \frac{2}{x + 1} + \frac{-1}{x - 1} + \frac{1}{x}$$

Matlab pomoću naredbe residue bolje rješava ovaj problem. Polinom u brojniku prikaže se vektorom a, a polinom u nazivniku vektorom b.

>> a=[2 -3 -1];
>> b=[1 0 -1 0];
>> >> [r,p,k]=residue(a,b)

r = 2 -1 1
p = -1 1 0
k = [].
Značenje:

$$\frac{2x^2-3x-1}{x^3-x}=\frac{2}{x+1}+\frac{-1}{x-1}+\frac{1}{x-0}+0$$

2.4. Sustav linearnih jednadžbi

Sustav m linearnih jednadžbi s n nepoznanica je sustav oblika

$$\begin{array}{c} a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{12}x_1+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{i1}x_1+\cdots+a_{in}x_n=b_i \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{array} \qquad (1)$$

Skalari $a_{ij}, i=1,2,\dots,m, j=1,2,\dots,n$ se zovu koeficijenti sustava, skalari $b_i, i=1,2,\dots,m$ slobodni članovi, a $x_1,x_2,\dots,x_n$ nepoznanice sustava. Rješenje sustava je skup svih n-torki $(x_1,x_2,\dots,x_n)$ koje uvrštene u sustav (1) zadovoljavaju svih m jednadžbi. Sustav (1) se može zapisati u obliku matrične jednadžbe $AX=B$ u kojoj je $A=\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn}\end{bmatrix}$ matrica sustava, $X=\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n\end{bmatrix}$ je matrica nepoznanica, a $B=\begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m\end{bmatrix}$ matrica slobodnih članova. Ako se matrici A doda stupac slobodnih članova, dobiva se proširena matrica sustava $AP=\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m\end{bmatrix}$.

Rang matrice A je broj linearno nezavisnih redaka (stupaca) matrice A i označava se s $r(A)$. Sustav (1) može imati jedno rješenje, nijedno ili beskonačno rješenja. Broj rješenja ovisi o odnosu ranga matrica A i AP. U Matlabu funkcija rank(***A***) računa rang matrice A.

Kronecker-Capellijev teorem. Sustav linearnih jednadžbi ima rješenje ako i samo ako je rang matrice sustava jednak rangu proširene matrice sustava, tj. $r(A)=r(AP)$.

Neposredna posljedica Kronecker-Capellijevog teorema je sljedeći

Korolar. Vrijedi:

i) Ako je $r(A)=n$, sustav je određen (ima jedinstveno rješenje),
ii) Ako je $r(A)<n$, sustav je neodređen (ima beskonačno rješenja),
iii) Ako je $r(A)>n$, sustav je kontradiktoran (nema rješenja).

Primjer 4. Odrediti rješenje sustava

$$\begin{aligned} x_1+x_2+x_3&=2 \\ -2x_1+3x_2-x_3&=0 \\ 2x_1+x_2-3x_3&=2. \end{aligned}$$

Matrica sustava je matrica
>> A=[1 1 1;-2 3 -1;2 1 -3];
a proširena matrica sustava je matrica
>> AP=[1 1 1 2;-2 3 -1 0;2 1 -3 2];
Kako je rang matrice A
>> rank(A)
ans =
3
a rang proširene matrice AP
>> rank(AP)
ans =
3
prema Kronecker-Capellijevom teoremu slijedi da sustav ima jedinstveno rješenje.
Matrica slobodnih članova je matrica
>> B=[2;0;2];
Rješenje sustava se dobiva tzv. lijevim dijeljenjem $X=A\backslash$B.
>> X=A\B
ans =
1
3/4
1/4
Rješenje sustava je uređena trojka

$$(x_1,x_2,x_3)=(1,3/4,1/4).$$

Za rješavanje sustava koristi se i naredba solve.
>> [x1 x2 x3]=solve('x1+x2+x3=2','-2*x1+3*x2-x3=0','2*x1+x2-3*x3=2')
x1 =
1
x2 =
3/4
x3 =
1/4

Primjer 5. Odrediti rješenje sustava

$$\begin{aligned} -x_1+2x_2+3x_3-x_4&=2 \\ x_1+2x_2+x_3-x_4&=-1 \\ 3x_1+4x_2+x_3-x_4&=2 \\ 2x_1+2x_2\qquad\qquad&=3. \end{aligned}$$

>> A=[-1 2 3 -1;1 2 1 -1;3 4 1 -1;2 2 0 0];
>> rank(A)
ans =
3
>> AP=[-1 2 3 -1 2;1 2 1 -1 -1;3 4 1 -1 2;2 2 0 0 3];
>> rank(AP)
ans =
3

ISSN 1864-6168

Kako je $r(A) = r(AP)$ slijedi da sustav ima rješenje, ali kako je $r(A) < 4$ slijedi da je sustav neodređen, tj. ima beskonačno rješenja. Koristeći naredbu solve dolazi se do parametarskog rješenja

```
>> [x1 x2 x3 x4]=solve('-x1+2*x2+3*x3-x4=2','x1+2*x2+x3-x4=-1','3*x1+4*x2+x3-x4=2','2*x1+2*x2=3')
 x1 =
    -3/2+x3
 x2 =
    3-x3
 x3 =
    x3
 x4 =
   11/2
```

Rješenje sustava zapisuje se u obliku
$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-2/3 + x_3, 3 - x_3, x_3, 11/2)$,
$x_3 \in \boldsymbol{R}$.

Primjer 6. Odrediti rješenje sustava

$$\begin{aligned} -x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 &= 2 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 &= -1 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 - x_4 &= 2 \\ 2x_1 + 2x_2 &= 1 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= 1. \end{aligned}$$

```
>> A=[-1 2 3 -1;1 2 1 -1;3 4 1 -1;2 2 0 0;2 1 1 0];
>> rank(A)
ans =
     4
>> AP=[-1 2 3 -1 2;1 2 1 -1 -1;3 4 1 -1 2;2 2 0 0 1;2 1 1 0 1];
>> rank(AP)
ans =
     5
```

Kako je $r(A) < r(AP)$, slijedi da je sustav kontradiktoran, tj. nema rješenja. Kada bi se rješenje određivalo bez prethodnog provjeravanja ranga matrica, Matlab bi kao numerički program ponudio neko rješenje. U tom slučaju potrebno je provjeriti dobiveno rješenje.

```
>> A=[-1 2 3 -1;1 2 1 -1;3 4 1 -1;2 2 0 0;2 1 1 0];
>> B=[2;-1;2;1;1];
```

Lijevim dijeljenjem matrica A i B dobiva se matrica X

```
>> X=A\B
ans =
     -1/2
      4/3
      2/3
     19/6
```

Množenjem matrica A i X dobiva se matrica

```
>>C= A*X
ans =
      2
     -1/3
      4/3
      5/3
      1
```

koja je različita od matrice B.

3. ZAKLJUČAK

Uporaba matematičkih softvera, posebice Matlaba, bitno može olakšati rješavanje matematičkih problema, uz određeno znanje matematičke teorije. Zbog jednostavnosti u učenju i iznimno širokoj primjeni, Matlab svoje mjesto nalazi ne samo u visokom obrazovanju već i u industriji.

4. LITERATURA

[1] HORVATIĆ, K. Linearna algebra. PMF-Matematički odjel ; Sveučilište u Zagrebu : Zagreb, 1999.
[2] PAVKOVIĆ, B.; VELJAN, D. Elementarna matematika I. Tehnička knjiga : Zagreb, 1992.
[3] HUNT, B.R.; LIPSMAN, R.L.; ROSENBERG, J.M. A Guide to MATLAB for Beginers and Experienced Users. Cambridge University Press, 2001.
[4] RIVIER, K.; ČULINA, B.; ČANČAREVIĆ, M. Matematika 1. Zagreb, 2010.

Kontakt:

Damira Keček, dipl. ing. mat.
J. Križanića 33, Varaždin

e-mail: damira.kecek@velv.hr
marijancancarevic@net.hr