ISSN 1864-6168

APROKSIMACIJA FUNKCIJE FOURIEROVIM I VALIĆNIM REDOM

Keček D.[1]
[1]**Veleučilište u Varaždinu, Varaždin, Hrvatska**

Sažetak: *U mnogim matematičkim primjenama potrebno je zadanu funkciju aproksimirati nekom drugom funkcijom. Za aproksimaciju periodičke funkcije koriste se trigonometrijski redovi. Ako se funkcija može aproksimirati trigonometrijskim redom, govori se o njenom razvoju u Fourierov red. Valići se ubrajaju u noviji dio matematike koji se intenzivno razvija. Valićnim redom se postiže točan prikaz funkcije s manjim brojem članova reda i bržim izračunom.*
Ključne riječi: *aproksimacija funkcije, Fourierov red, valićni red*

Abstract: *In many mathematical applications it is needed to approximate a given function with another function. Trigonometric series are used for the approximation of periodic function. If the function can be approximated by a trigonometric series, it is talked about expanding a function in a Fourier series. Wavelets represent the newer part of mathematics which is extensively developing. With wavelet series, the accurate representation of the function is achieved with fewer terms and faster calculation.*
Key words: *approximation of function, Fourier series, wavelet series*

1. UVOD

Proizvoljna periodička funkcija se može aproksimirati trigonometrijskim redom, tj. može se prikazati kao zbroj sinusoida i kosinusoida različitih amplituda i frekvencija. Prednost ovakve aproksimacije funkcija je u tome što su svojstva sinus i kosinus funkcija dobro poznata pa se takvom aproksimacijom jednostavno računa.

Valići (engl. wavelet) su funkcije koje zadovoljavaju određene matematičke zahtjeve i koriste se u prezentiranju podataka i funkcija. Valićne funkcije omogućuju lokalizaciju u vremenu kroz translacije i lokalizaciju u frekvenciji kroz dilatacije. Sinus i kosinus funkcije Fourierovog reda osiguravaju lokalizaciju frekvencije dok je vremenska komponenta izgubljena. Za aproksimaciju funkcija koje imaju prekide kao i funkcija sa šiljcima, potrebno je znatno manje članova valićnog reda nego članova Fourierovog reda.

Valići se koriste za sažimanje podataka. Pomoću valića je riješen problem kompresije digitalnih otisaka prstiju. FBI baza otisaka prstiju sadrži oko 200 milijuna kartica otisaka, dok svaka kartica sadrži oko 10 megabajta podataka. Pretraživanje baze i uspoređivanje takvih kartica može trajati i po nekoliko sati. Primjenom valića kartice se komprimiraju na 500 kilobajta, a otisci ostaju u izvornom obliku.

2. FOURIEROV RED

Neka je f periodička funkcija s periodom $T = 2L$ definirana na segmentu $[-L, L]$. Nadalje, neka je $L^2[-L, L]$ prostor kvadratno integrabilnih funkcija na segmentu $[-L, L]$, tj.

$$L^2[-L, L] = \{f : [-L, L] \to \mathbb{R}; \int_{-L}^{L} |f(x)|^2 dx < \infty\}.$$

Na prostoru $L^2[-L, L]$ definira se skalarni produkt formulom

$$< f, g >= \int_{-L}^{L} f(x)g(x)dx.$$

Funkcije $f, g \in L^2[-L, L]$ su ortogonalne ako vrijedi

$$\int_{-L}^{L} f(x)g(x)dx = 0.$$

Za aproksimaciju periodičkih funkcija koriste se trigonometrijski redovi oblika:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \Big(a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \sin\frac{n\pi x}{L}\Big). \qquad (1)$$

Ako se neka periodička funkcija može prikazati redom (1) onda je riječ o njenom razvoju u Fourierov red, odnosno o razvoju funkcije f po neprekidnim funkcijama

$$\frac{1}{2}, \cos\frac{\pi x}{L}, \sin\frac{\pi x}{L}, ..., \cos\frac{n\pi x}{L}, \sin\frac{n\pi x}{L}, ... \qquad (2)$$

koje pripadaju prostoru $L^2[-L, L]$. Najvažnije svojstvo niza funkcija (2) je ortogonalnost funkcija na segmentu $[-L, L]$.

Može se pokazati da je skalarni produkt dviju različitih funkcija niza (2) jednak nuli, pa niz funkcija (2) čini ortogonalan skup funkcija na $[-L, L]$.
Na svojstvu ortogonalnosti sinus i kosinus funkcija temelji se određivanje koeficijenata a_0, a_n i b_n trigonometrijskog reda (1). Brojevi a_0, a_n i b_n računaju se po sljedećim formulama:

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)dx,$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx$$

i

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx,$$

za svaki $n = 1, 2, ...$ i zovu se Fourierovi koeficijenti funkcije f. Trigonometrijski red (1) s tako izračunatim koeficijentima zove se Fourierov red funkcije f i označava se na sljedeći način

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n\cos\frac{n\pi x}{L} + b_n\sin\frac{n\pi x}{L}\Big).$$

3. VALIĆNI RED

Multirezolucijska analiza je alat za konstruktivni opis valića. Neka je $L^2(\mathbb{R})$ prostor realnih, kvadratno integrabilnih funkcija. Multirezolucijska analiza ili aproksimacija prostora $L^2(\mathbb{R})$ se definira kao niz zatvorenih potprostora

$$\cdots \subset V_{-2} \subset V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset L^2(\mathbb{R})$$

koji zadovoljavaju sljedeće uvjete:

(i) $\overline{\bigcup_{j\in\mathbb{Z}} V_j} = L^2(R)$,

(ii) $\bigcap_{j\in\mathbb{Z}} V_j = \{0\}$,

(iii) $f(x) \in V_j \Leftrightarrow f(2^j x) \in V_0$

(iv) postoji funkcija $\phi \in V_0$ takva da je skup $\{\phi_{0,k}(x) := \phi(x-k) : k \in \mathbb{Z}\}$ ortonormirana baza prostora V_0.

Za $j, k \in \mathbb{Z}$ definirane su funkcije $\phi_{j,k}$ relacijom

$$\phi_{j,k}(x) = 2^{\frac{j}{2}}\phi(2^j x - k).$$

Korištenjem svojstava (iii) i (iv) slijedi da je $\{\phi_{j,k} : k \in \mathbb{Z}\}$ ortonormirana baza prostora V_j za svaki j. Funkcija ϕ se naziva skalirajuća funkcija.
Nadalje, za svaki $j \in \mathbb{Z}$ definira se potprostor W_j kao ortogonalni komplement od V_j u prostoru V_{j+1}, odnosno $V_{j+1} = V_j \bigoplus W_j$, gdje $\bigoplus$ označava direktnu sumu međusobno ortogonalnih potprostora.
Dekompozicijom prostora $V_j, V_{j-1}, V_{j-2}, ...$ dobivamo $V_j = V_{j-1} \bigoplus W_{j-1} = V_{j-2} \bigoplus W_{j-2} \bigoplus W_{j-1} = V_{j-3} \bigoplus W_{j-3} \bigoplus W_{j-2} \bigoplus W_{j-1} = \cdots = V_0 \bigoplus W_0 \bigoplus W_1 \bigoplus \cdots \bigoplus W_{j-1}$.
S obzirom na dekompoziciju prostora V_j i uvjete (i) i (ii), prostor $L^2(\mathbb{R})$ se rastavlja na beskonačan niz međusobno ortogonalnih potprostora, tj.

$$L^2(\mathbb{R}) = \bigoplus_{j\in\mathbb{Z}} W_j. \tag{3}$$

Prostori W_j preuzimaju svojstvo (iii) prostora V_j, tj.

$$f(x) \in W_j \Leftrightarrow f(2^j x) \in W_0. \tag{4}$$

Tada postoji funkcija $\psi \in W_0$ takva da je $\{\psi_{j,k} : k \in \mathbb{Z}\}$ ortonormirana baza od W_j za svaki $j \in \mathbb{Z}$ te $\{\psi_{j,k} : j, k \in \mathbb{Z}\}$ ortonormirana baza od $L^2(\mathbb{R})$, gdje su funkcije $\psi_{j,k}$ definirane relacijom

$$\psi_{j,k} = 2^{\frac{j}{2}}\psi(2^j x - k).$$

Funkcija ψ se zove ortonormirani valić.
S obzirom na ortonormiranu bazu prostora $L^2(\mathbb{R})$ bilo koja funkcija u tom prostoru se može prikazati pomoću valićnog reda oblika

$$f(x) = \sum_{j,k\in\mathbb{Z}} w_{j,k}\psi_{j,k}(x), \tag{5}$$

gdje su $w_{j,k} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\psi_{j,k}(x)dx$ valićni koeficijenti.
Ako se valićni red (5) odsiječe za $j = \widehat{j}$, dobiva se ortogonalna projekcija P funkcije f na potprostor $V_{\widehat{j}}$. Valićni red se tada može izraziti preko skalirajućih funkcija kao

$$Pf(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} s_{\widehat{j},k}\phi_{\widehat{j},k}(x) \tag{6}$$

gdje su $s_{\widehat{j},k} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\phi_{\widehat{j},k}(x)dx$ skalirajući koeficijenti.
Zainteresirani čitatelj može u spomenutoj literaturi pročitati više o ovoj problematici.

Jedan od mogućih izbora funkcije ϕ je Haarova skalirajuća funkcija

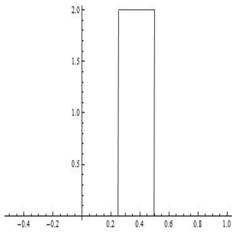
$$\phi(x) = \phi_{0,0}(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x < 1, \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

Haarova baza je najjednostavnija valićna baza prostora $L^2(\mathbb{R})$. Definirana je Haarovom valićnom funkcijom

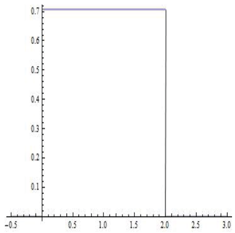
$$\psi(x) = \psi_{0,0}(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x < \frac{1}{2}, \\ -1, & \frac{1}{2} \le x < 1, \\ 0, & \text{inače,} \end{cases}$$

odnosno $\psi_{j,k} = 2^{\frac{j}{2}}\psi(2^j x - k)$.
Ono što valiće čini jedinstvenim je mogućnost njihovog micanja, rastezanje ili stezanja. Na sljedećim

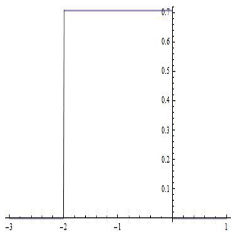
slikama ilustrirana je skalirajuća funkcija $\phi_{j,k}$ za različite j i k vrijednosti. Funkcija $\phi_{j,k}$ na intervalu $[2^{-j}k, 2^{-j}(k+1)\rangle$ poprima vrijednost $2^{j/2}$, dok je izvan tog intervala vrijednost funkcije jednaka nuli. Graf funkcije $\phi_{j,k}$ dobiva se translacijom grafa funkcije $\phi(x)$ duž osi x za $2^{-j}k$.



Slika 1. Funkcija $\phi_{2,1}$



Slika 2. Funkcija $\phi_{-1,0}$



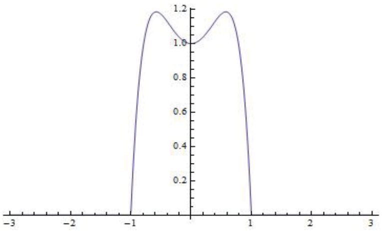
Slika 3. Funkcija $\phi_{-1,-1}$

4. APROKSIMACIJA FUNKCIJE FOURIEROVIM I VALIĆNIM REDOM

Cilj ovog rada je vidjeti koji od redova, Fourierov ili valićni, bolje aproksimira zadanu funkciju. U tu svrhu promatrana je periodička funkcija $F(x)$ s periodom $T = 8$ na segmentu $[-4, 4]$ definirana na sljedeći način

$$F(x) = \begin{cases} -x^6 - x^4 + x^2 + 1, & -1 \leq x \leq 1, \\ 0, & 1 < |x| < 4. \end{cases}$$

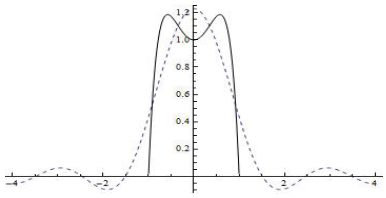
Prikazana je na slici 4.



Slika 4. Funkcija $F(x)$

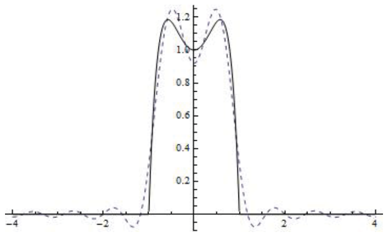
Pomoću programa Wolfram Mathematica 7 izračunato je nekoliko konačnih suma Fourierovog reda.

Na slici 5. grafički je prikazana funkcija F i aproksimacija funkcije s prva 3 člana pripadnog Fourierovog reda.

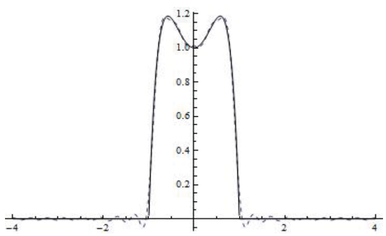


Slika 5. Funkcija $F(x)$ i aproksimacija funkcije s 3 člana pripadnog Fourierovog reda (isprekidana linija)

Može se primijetiti da na dijelu gdje funkcija poprima vrijednost nula aproksimacija ima "repove". Da bi se "repovi" smanjili, potrebno je povećati broj članova u redu. Na slikama 6. i 7. prikazana je funkcija $F(x)$ i aproksimacija funkcije s 8, odnosno 30 članova.



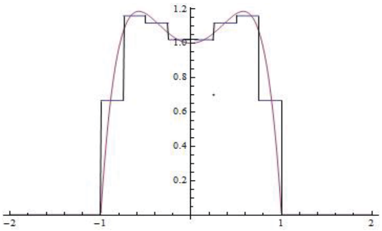
Slika 6. Funkcija $F(x)$ i aproksimacija funkcije s 8 članova pripadnog Fourierovog reda (isprekidana linija)



Slika 7. Funkcija $F(x)$ i aproksimacija funkcije s 30 članova pripadnog Fourierovog reda (isprekidana linija)

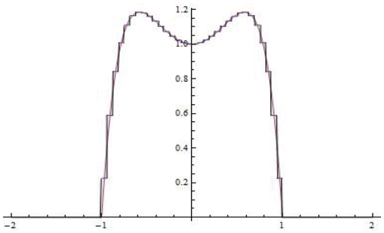
Dodavanjem većeg broja članova reda dobiva se graf koji je očigledno dobra aproksimacija polazne funkcije.

U nastavku je promatrana aproksimacija funkcije $F(x)$ valićnim redom pomoću skalirajućih funkcija, odnosno redom (6). Na promatranom intervalu $[-4, 4]$ za fiksnu vrijednost $\widehat{j} = 3$ sumira se po svim k vrijednostima takvima da je $-2^{\widehat{j}} \leq k \leq 2^{\widehat{j}} - 1$. U tom slučaju se funkcija aproksimira sa 16 članova reda (6).



Slika 8. Funkcija $F(x)$ i aproksimacija funkcije s 16 članova pripadnog valićnog reda

Za vrijednost $\widehat{j} = 4$ funkcija se aproksimira s 32 člana valićnog reda, što je grafički prikazano na slici 9.



Slika 9. Funkcija $F(x)$ i aproksimacija funkcije s 32 člana pripadnog valićnog reda

5. ZAKLJUČAK

Za aproksimaciju funkcije uzima se suma prvih nekoliko članova reda. Na konkretnom primjeru funkcije F može se vidjeti da je vrijednost aproksimacije funkcije bliža stvarnoj vrijednosti funkcije ukoliko je broj članova reda veći. Više članova Fourierovog reda zahtijeva više vremena za njihov izračun i više memorije za pohranu podataka za razliku od valićnog reda što valićni red čini korisnijim u primjeni.

6. LITERATURA

[1] I. DAUBECHIES, "Ten Lectures on Wavelets", Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 1992.
[2] N. G. ROLAND, "Fourier and wavelet representations of functions", Electronic Journal of Undergraduate Mathematics (2000) 7. str. 1-12.
[3] J. S. WALKER, "Fourier analysis and wavelet analysis", Notices of the AMS (1997) 6. str. 658-670.
[4] M. VETTERLI, J. KOVAČEVIĆ, "Wavelets and Subband Coding", Prentice Hall, New Jersey, 1995.

Kontakt:
Damira Keček, dipl. ing. mat.
J. Križanića, Varaždin
damira.kecek@velv.hr