ISSN 1846-6168

ODREĐIVANJE SNAGA U JEDNOFREKVENTNOM SUSTAVU POMOĆU EKSTREMA FUNKCIJE PRIMJENOM PROGRAMA "GRAPHMATICA"

Havaš I.[1], Huđek J.[1], Šumiga I.[1]
[1]Veleučilište u Varaždinu, Varaždin, Hrvatska

Sažetak: *Snage izmjenične struje u jednofrekventnom sustavu, moguće je odrediti na više načina. Poznavajući funkciju trenutne snage p(t), moguće je samo pomoću ekstrema dotične funkcije odrediti prividnu, djelatnu i jalovu snagu u jednofrekventnom sustavu sinusoidalne struje. Ekstremi funkcije p(t) se mogu odrediti primjenom nekog od aplikativnih matematičkih softvera. U ovom članku je pokazano kako se primjenom matematičkog programa Graphmatica mogu odrediti ekstremi funkcije trenutne snage p(t), te pomoću njih odrediti sve vrste snaga u jednofrekventnom sustavu sinusoidalne struje.*
Ključne riječi: *Snaga, ekstremi, Graphmatica*

Abstract: *Alternating currency power in one frequency system can be determined ine in many ways. It is possible to determine virtual, working and reactive power in one frequency system but only with respective function extremes and by knowing the instantaneous power p(t). Function extremes can be determined by using some of mathematic software applications. This article shows that with application of the "Graphmatica" mathematic program the instantaneous power function extreme p(t) can be determined. With their use, all kinds of powers in one frequency systems of sine curved currency can also be determined.*
Key words: *power, extremes, Graphmatica*

1. UVOD

Ovaj članak prezentira jednu metodu izračunavanja snaga u jednofrekventnom sustavu sinusoidalnog valnog oblika napona i struje, primjenom matematičkog programa Graphmatica. U drugom dijelu ovog članka je prikazan način dobivanja matematičkog izraza za izračun snaga pomoću ekstrema funkcije p(t). U trećem dijelu članka su prikazani praktični primjeri izračuna snaga pomoću grafa funkcije p(t), korištenjem matematičkog programa Graphmatica. Prikazan je primjer izračuna snaga za više trošila pomoću jedinstvenog grafa funkcije p(t). U četvrtom dijelu članak se bavi izračunavanjem snage u trofaznom simetričnom i nesimetričnom sustavu. Članak završava zaključkom u petom dijelu.

2. TEORETSKO OBRAZLOŽENJE KONAČNIH IZRAZA ZA IZRAČUN SNAGA

Trenutna snaga sinusoidalne struje se općenito zapiše kao: $p(\alpha) = U_{max} \cdot \sin\alpha \cdot I_{max} \cdot \sin(\alpha - \varphi)$, gdje je naravno $\alpha = \omega t$.
Funkcija ima ekstreme pri kutu α, koji se određuju iz uvjeta: $\frac{dp}{d\alpha} = 0$;

$$\frac{dp}{d\alpha} = U_{max} \cdot I_{max} \cdot [\sin\alpha \cdot \cos(\alpha - \varphi) + \cos\alpha \cdot \sin(\alpha - \varphi)] = U_{max} \cdot I_{max} \cdot \sin(2\alpha - \varphi) = 0$$

$\sin(2\alpha - \varphi) = 0; \quad 2\alpha - \varphi = 0, \pi$. Iz $2\alpha - \varphi = 0$ slijedi da ekstrem nastupi pri $\alpha = \frac{\varphi}{2}$.
Pomoću druge derivacije može se saznati da li se radi o minimumu ili maksimumu.

$(\sin(2\alpha - \varphi))' = 2\cos(2 \cdot \frac{\varphi}{2} - \varphi) = 2 > 0$ što znači da funkcija u $\alpha = \frac{\varphi}{2}$ ima minimum.
Iz izraza $2\alpha - \varphi = \pi$ slijedi da ekstrem nastupi i pri $\alpha = \frac{\pi + \varphi}{2}$.
Pomoću vrijednosti druge derivacije $2 \cdot \cos(2\alpha - \varphi) = 2\cos(2 \cdot \frac{\pi + \varphi}{2} - \varphi) = -2 < 0$ zaključuje se da pri $\alpha = \frac{\pi + \varphi}{2}$ funkcija ima maksimum.
Izračunavanje ekstrema funkcije:
Minimum:

$$P_{min} = U_{max} \cdot \sin\frac{\varphi}{2} \cdot I_{max} \cdot \sin(\frac{\varphi}{2} - \varphi) = -U_{max} \cdot I_{max} \sin^2\frac{\varphi}{2};$$

$$|P_{min}| = U_{max} \cdot I_{max} \cdot \sin^2\frac{\varphi}{2} \quad (2.1)$$

Maksimum:

$$P_{max} = U_{max} \cdot \sin \cdot \frac{\pi + \varphi}{2} \cdot I_{max} \cdot \sin(\frac{\pi + \varphi}{2} - \varphi) = U_{max} \cdot I_{max} \cdot \cos^2\frac{\varphi}{2}$$

(2.2)
jer vrijedi općenito da je: $\sin(90^0 \pm \alpha) = \cos\alpha$.

ISSN 1846-6168

Ako se jednadžbe (2.1) i (2.2) zbroje i podijele s 2, dobije se izraz (2.3):

$$\frac{P_{\max}+\left|P_{\min}\right|}{2}=U_{\max}\cdot I_{\max}\cdot\frac{1}{2}\left(\cos^2\frac{\varphi}{2}+\sin^2\frac{\varphi}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}\cdot U\cdot\sqrt{2}\cdot I}{2}=U\cdot I\ \text{(VA)}$$

Izraz, naravno ,predstavlja **prividnu snagu izmjenične struje** gdje su U i I efektivne vrijednosti sinusoidalne izmjenične struje.

$$S=\frac{P_{\max}+\left|P_{\min}\right|}{2}\ \text{(VA)}\ \ (2.4)$$

Ako jednadžbe (2.1) i (2.2) oduzmemo i podijelimo s 2, dobije se slijedeća jednakost:

$$U_{\max}\cdot I_{\max}\cdot(\cos^2\frac{\varphi}{2}-\sin^2\frac{\varphi}{2})\cdot\frac{1}{2}=\frac{P_{\max}-\left|P_{\min}\right|}{2}$$

Iz trigonometrije je poznato da je izraz $(\cos^2\frac{\varphi}{2}-\sin^2\frac{\varphi}{2})=\cos\varphi$, pa slijedi da je

$$U_{\max}\cdot I_{\max}\cdot\cos\varphi\cdot\frac{1}{2}=\frac{P_{\max}-\left|P_{\min}\right|}{2}=\frac{\sqrt{2}\cdot U\cdot\sqrt{2}\cdot I}{2}\cdot\cos\varphi$$
$$=U\cdot I\cdot\cos\varphi\ \text{(W)}$$

Što, naravno, predstavlja djelatnu snagu sinusoidalne izmjenične struje.

$$P=\frac{P_{\max}-\left|P_{\min}\right|}{2}\ \text{(W)}\ \ (2.5)$$

Kako je $Q=\sqrt{S^2-P^2}=\sqrt{\left(\frac{P_{\max}+\left|P_{\min}\right|}{2}\right)^2-\left(\frac{P_{\max}-\left|P_{\min}\right|}{2}\right)^2}=$
$\sqrt{P_{\max}\cdot P_{\min}}\ (\text{VA}_\text{r})$

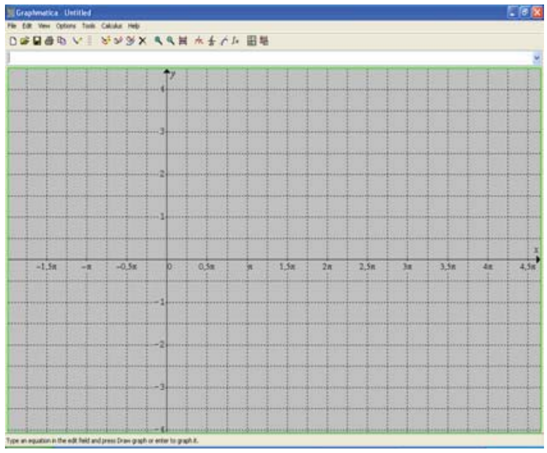
$$Q=\sqrt{S^2-P^2}=\sqrt{P_{\max}\cdot P_{\min}}\ \ (\text{VA}_\text{r})\ \ (2.6)$$

Naravno da izračunavanje snaga na ovaj način ima smisla ako se na jednostavan način mogu utvrditi ekstremi funkcije $p(\alpha)$, a za crtanje funkcije $p(\alpha)$ može se koristiti neki od matematičkih programa. U ovom slučaju je korišten program **Graphmatica** koji u potpunosti zadovoljava ovim potrebama.

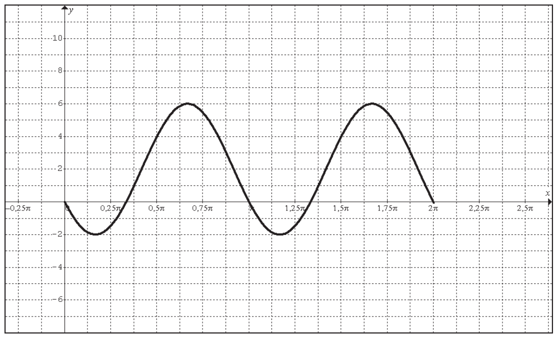
3. PRAKTIČNI PRIMJERI

Na nekoliko primjera bit će pokazano kako se korisno može iskoristiti ovaj program za izračunavanje snaga u jednofrekventnom sustavu sinusoidalne struje.

Prozor programa:

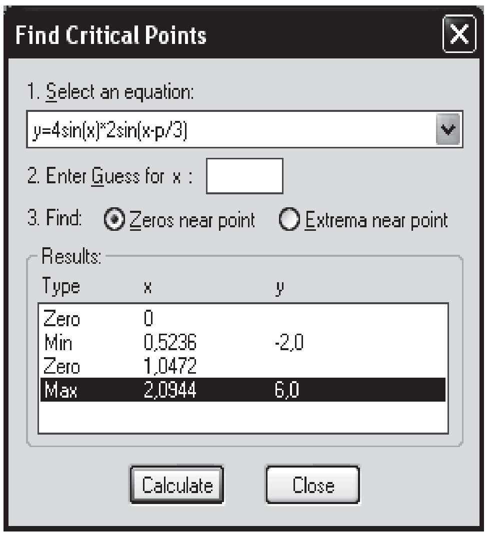


Primjer 1
Pomoću ekstrema funkcije



$$p=U_{\max}\cdot\sin(\omega t)\cdot I_{\max}\cdot\sin(\omega t-60^0)$$

gdje je $U_{\max}=4\ \text{V};\quad I_{\max}=2\ \text{A}$ treba izračunati prividnu , djelatnu i jalovu snagu .



ISSN 1846-6168

Ekstremi funkcije određuju se na način:
Calculus/Find Criticsl Points

Za $x = \dfrac{\varphi}{2} = \dfrac{\pi}{6} = 0,5236$ dobije se $P_{\min} = -2$, ili $|P_{\min}| = 2$

Za $x = \dfrac{\varphi + \pi}{2} = \dfrac{\frac{\pi}{3} + \pi}{2} = 2,0944$ dobije se $P_{\max} = 6$

Izračunavanje snaga:

$$S = \frac{P_{\max} + |P_{\min}|}{2} = \frac{6+2}{2} = 4 \text{ VA} \quad \text{prividna snaga}$$

$$P = \frac{P_{\max} - |P_{\min}|}{2} = \frac{6-2}{2} = 2 \text{ W} \quad \text{djelatna snaga}$$

$$Q = \sqrt{P_{\max} \cdot |P_{\min}|} = \sqrt{6 \cdot 2} = 2\sqrt{3} \text{ VA}_r \quad \text{jalova snaga}$$

Kako je: $U = \dfrac{4}{\sqrt{2}}$ V; $\quad I = \dfrac{2}{\sqrt{2}}$ A slijedi da je

$$S = U \cdot I = \frac{4}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} = 4 \text{ VA}$$

$$P = U \cdot I \cdot \cos\varphi = \frac{4}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot 0,5 = 2 \text{ W}$$

$$Q = \sqrt{S^2 - P^2} = \sqrt{16-4} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

Primjer 2
Dva jednofazna asinkrona elektromotora su priključena na sinusoidalan napon efektivne vrijednosti 220 V/50 Hz

Podaci elektromotora : $I_1 = 5$ A; $\quad \cos\varphi_1 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$I_2 = 2$ A $\quad \cos\varphi_2 = 0,5$

Treba izračunati ukupnu prividnu, djelatnu i jalovu snagu pogona s tim elektromotorima pomoću ekstrema funkcije $p(t)$

Rješenje: Trenutna snaga se zapiše kao:

$$p(t) = 220\sqrt{2}\sin\omega t \cdot 5\sqrt{2}\sin(\omega t - 30^0) +$$
$$220\sqrt{2}\sin(\omega t) \cdot 2\sqrt{2} \cdot \sin(\omega t - 60^0)$$

Pomoću matematičkog programa odrede se ekstremi funkcije $p(t)$

Ekstremi funkcije:
$P_{\max} = 2669{,}9297$

$|P_{\min}| = 324{,}6738$ pa je prividna snaga jednaka:

$$S = \frac{2669,9297 + 324,6738}{2} = 1497,30175 \text{ VA}$$

Djelatna snaga iznosi:
$$P = \frac{2669,9297 - 324,6738}{2} = 1172,62795 \text{ W}$$
Jalova snaga iznosi:
$$Q = \sqrt{2669,9297 \cdot 324,6738} = 931,0514 \text{ VA}_r$$

Provjera dobivenih rezultata:

Motor 1: $U = 220$ V; $\quad I = 5$ A; $\quad \cos\varphi = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

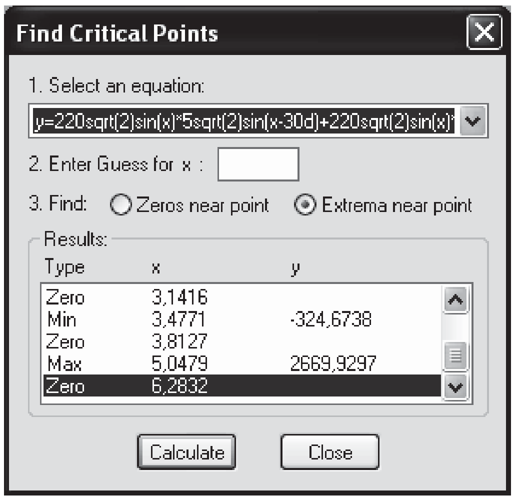
$$S = U \cdot I = 220 \cdot 5 = 1100 \text{ VA}$$
$$P = S \cdot \cos\varphi = 952,6279 \text{ W}$$
$$Q = S \cdot \sin\varphi = 550 \text{ VA}_r$$

Motor 2: $U = 220$ V; $\quad I = 2$ A; $\quad \cos\varphi = 0,5$
$S = 440$ VA; $\quad P = 220$ W; $\quad Q = 381,0512 \text{ VA}_r$

Ukupna djelatna snaga iznosi:
$$P_u = P_1 + P_2 = 1172,6279 \text{ W}$$

Ukupna jalova snaga iznosi:
$$Q_u = Q_1 + Q_2 = 931,0512 \text{ VA}_r$$

Ukupna prividna snaga iznosi:
$$S_u = \sqrt{P_u^2 + Q_u^2} = 1497,3017 \text{ VA}$$



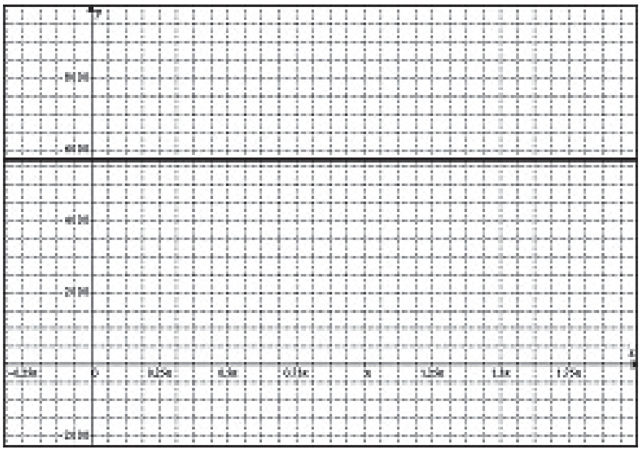
ISSN 1846-6168

4. ODREĐIVANJE DJELATNE SNAGE SIMETRIČNOG I NESIMETRIČNOG TROFAZNOG SUSTAVA

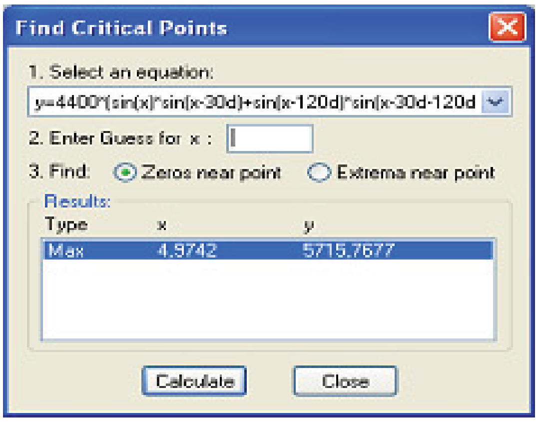
Trenutna snaga trofaznog simetričnog sustava (balansiranog sustava) se zapiše kao:

$$p = U_m \cdot I_m \begin{bmatrix} \sin(\omega t)\cdot\sin(\omega t-\varphi)+\sin(\omega t-120^0)\cdot\sin(\omega t-\varphi-120^0) \\ +\sin(\omega t+120^0)\cdot\sin(\omega t-\varphi+120^0) \end{bmatrix}$$

Za $U_{\max} = 220\sqrt{2};\quad I_{\max} = 10\sqrt{2};\quad \varphi = 30^0$
graf funkcije $p(t)$ izgleda kao na slici 4.1:



Slika 4.1 Graf funkcije $p(t)$



Sređivanjem izraza u uglatoj zagradi i korištenjem poznatog trigonometrijskog izraza:

$$\sin\alpha\cdot\sin\beta = \frac{1}{2}\cdot[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)],$$

te primjenom na izneseno razmatranje slijedi:

$$\begin{bmatrix} \sin(\omega t)\cdot\sin(\omega t-\varphi)+\sin(\omega t-120^0)\cdot\sin(\omega t-\varphi-120^0) \\ +\sin(\omega t+120^0)\cdot\sin(\omega t-\varphi+120^0) \end{bmatrix} =$$

$$\frac{1}{2}\cdot\begin{bmatrix} (\cos\varphi-\cos(2\omega t-\varphi))+(\cos\varphi-\cos(2\omega t-\varphi-240^0)) \\ +(\cos\varphi-\cos(2\omega t-\varphi+240^0)) \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\cdot 3\cdot\cos\varphi$$

Iz ovoga slijedi:

$$p = U_{\max}\cdot I_{\max}\cdot\frac{3}{2}\cdot\cos\varphi = \frac{U\sqrt{2}\cdot I\sqrt{2}\cdot 3}{2}\cdot\cos\varphi$$
$$= 3\cdot U\cdot I\cdot\cos\varphi$$

gdje su U i I efektivne fazne vrijednosti napona i struje.

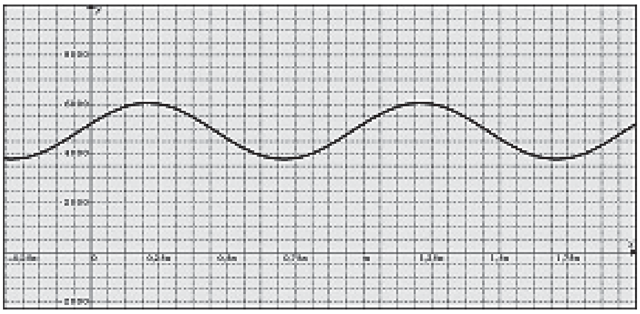
To znači da podatak koji je ponudio program, predstavlja djelatnu snagu trofaznog balansiranog sustava koja je konstantna.

$$P = 3\cdot 220\cdot 10\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 5715,7677\ \text{W}$$

Naravno da snaga nije konstantna kod nesimetričnog opterećenja što se može provjeriti ako se naruši simetrija, bilo faznim kutom ili apsolutnim iznosom napona ili struje.

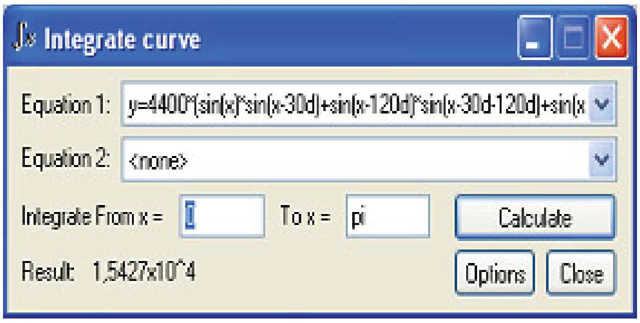
Primjer:

Ako je fazni kut u trećoj fazi $\varphi = 60^0$,
vidi se da snaga više nije konstantna.



Prema definiciji djelatna snaga je jednaka srednjoj vrijednosti trenutne snage.
Srednja vrijednost iznosi:

$$P = \frac{1,5427\cdot 10^4}{\pi} = 4910,566\ \text{W}$$



Kod nesimetričnog opterećenja djelatna snaga trofaznog sustava je:

$P = UI\cos\varphi_1 + UI\cos\varphi_2 + UI\cos\varphi_3$, samo ako su različiti fazni kutovi, u ovom slučaju je snaga jednaka:

$$P = 220\cdot 10\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + 220\cdot 10\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + 2200\cdot\frac{1}{2} = 4910,5\ \text{W}$$

ISSN 1846-6168

5. ZAKLJUČAK

Prikazana metoda je primjerena za izračunavanje snaga izmjenične struje sinusnog valnog oblika u jednofrekventnom sustavu. Primjenom bilo kojeg matematičkog programa, koji može crtati i prikazati grafove funkcija te izračunati njihove ekstreme, ovom metodom mogu se odrediti sve vrste snaga izmjenične sinusoidalne struje u jednofrekventnom sustavu. Ovim člankom je pokazana jedna zanimljiva metoda izračunavanja snaga korištenjem ekstrema funkcije p(t) koji se mogu relativno jednostavno odrediti raspoloživim matematičkim aplikativnim programima.

6. LITERATURA

[1] Arthur H. S., Haroun M.,Wayne, B.:"Handbook of Electric Power Calculations"; McGraw-Hill Education, 2000.

[2] Cavicchi, J.T.:"Fundamentals of electrical engineering principles and applications"; Prentice-Hall, 1993.

[3] Kuzmanović, B.: „Osnove elektrotehnike II.; Element", Zagreb, 2004.

[4] Pinter, V.: „ Osnove elektrotehnike II".; Tehnička knjiga, Zagreb, 1994.

Kontakt: ladislav.havas@velv.hr
josip.hudjek@velv.hr
ivan.sumiga@velv.hr