Ivan Prce[*]
Dominika Crnjac[**]
Martina Crnjac[***]

ISSN 0469-6255
(121-126)

POMORSKO OSIGURANJE

NEIZVJESNOST PARAMETARA U OSIGURANJU

Uncertainty of parameters in insurance policy

UDK 519.216
Prethodno priopćenje
Preliminary communication

Sažetak

Modeli rizika proučavaju se uglavnom kada su s izvjesnom sigurnošću poznati parametri. Ipak, parametri redovito nisu eksplicitno poznati, pa ih treba procijeniti iz odgovarajućeg skupa podataka. Pokazat će se kako se neki modeli mogu proširiti i pri tome dopuštaju neizvjesnost parametara.

Ključne riječi: portfelj, polica, parametar, distribucija, očekivanje, varijanca, šteta.

Abstract

Risk models are mostly investigated in cases where parameters are known with a positive certainty.Usually parameters are not explicitly known, therefore they need to be estimated from the corresponding data set.

Key words: portfolio, insurance policy, parameter, distribution, expectations, variance, damage.

1. Uvod

Introduction

U [2] su proučavani modeli rizika uz pretpostavku da su sa sigurnošću poznati parametri, to jest momenti a u nekim slučajevima i distribucije, broja šteta i iznosa individualnih šteta.

Općenito ti parametri neće biti poznati, nego će ih trebati procijeniti iz odgovarajućeg skupa podataka.

***mr. sc. Ivan Prce, Sveučilište u Dubrovniku, Ćira Carića 4, 20000 Dubrovnik**
****Dominika Crnjac, ing. mat. i dipl. oec., Elektrotehnički fakultet, 31000 Osijek**
*****Martina Crnjac, dipl. oec., Lura d.d., 10000 Zagreb**

Vidjet će se kako se modeli opisani u [2] mogu proširiti tako da dopuštaju neizvjesnost parametara. To će biti učinjeno promatranjem niza primjera. Većina, ali ne svi, tih primjera razmatrat će neizvjesnost u distribuciji broja šteta.

2. Neizvjesnost u heterogenom portfelju

Uncertainty in heterogeneous portfolio

Promotrit će se portfelj koji se sastoji od n nezavisnih polica. Skupne štete nastale po i-toj polici označene su slučajnom varijablom S_i, gdje S_i ima složenu Poissonovu distribuciju [2] s parametrima λ_i i $F(x)$. Uočite kako je, radi jednostavnosti, pretpostavljeno da je distribucija iznosa individualnih šteta, $F(x)$, jednaka za sve police. U ovom primjeru pretpostavlja se da je distribucija iznosa individualnih šteta, tj. $F(x)$, poznata, ali su vrijednosti Poissonovih parametara, tj. λ_i, nepoznate. U ovom radu $\{\lambda_i\}_{i=1}^{n}$ se tretira kao skup nezavisnih i jednako distribuiranih slučajnih varijabli s poznatom distribucijom. To znači da ako je iz portfelja izabrana polica na slučajan način, tada se pretpostavlja da njezin Poissonov parametar nije poznat, ali se o njemu mogu stvarati vjerojatnosne tvrdnje. Na primjer, "postoji 50% vjerojatnosti da je njezin Poissonov parametar između 3 i 5". Važno je razumjeti da je Poissonov parametar police izabrane iz portfelja fiksan broj. Problem je u tome što je taj broj nepoznat.

2.1. Primjer
Example

Pretpostavimo da su Poissonovi parametri polica iz portfelja nepoznati, ali jednako vjerojatni 0,1 i 0,3.

(i) Treba pronaći očekivanje i varijancu (s pomoću m_1 i m_2) ukupnih iznosa šteta slučajno odabrane police iz portfelja.

(ii) Treba pronaći očekivanje i varijancu (s pomoću m_1 i m_2 i n) ukupnih iznosa šteta cijelog portfelja.

Moglo bi pomoći da se o ovome razmišlja kao o modelu dijela portfelja osiguranja motornih vozila. Police u cijelom portfelju podijeljene su po svojim vrijednostima faktora za određivanje premije, kao što su "dob vozača", "tip vozila", te čak i "proteklo iskustvo o štetama". Police u razmatranom dijelu portfelja imaju jednake vrijednosti tih faktora za određivanje premije. Međutim, postoje neki faktori, kao na primjer "vještina vožnje", koji se ne mogu lako mjeriti, pa se ne mogu eksplicitno uračunati. Pretpostavlja se da su neki od tih osiguranika u tom portfelju "dobri" vozači, a ostali "loši" vozači. Distribucija iznosa individualnih šteta jednaka je za sve vozače, ali je broj nastalih šteta za "dobre" vozače manji (prosječno 0,1 godišnje) nego za "loše" vozače (prosječno 0,3 godišnje). Pretpostavlja se kako je poznato, moguće iz nacionalnih podataka, da je osiguranik u tom dijelu portfelja s jednakom vjerojatnošću "dobar" vozač ili "loš" vozač, ali da se ne može znati je li određeni osiguranik "dobar" vozač ili je "loš" vozač.

Rješenje
Solution

Neka je λ_i, i = 1, 2, ... , n, Poissonov parametar i-te police u portfelju. $\{\lambda_i\}_{i=1}^n$ se promatra kao skup nezavisnih i jednako distribuiranih slučajnih varijabli, svaka sa sljedećom distribucijom

$P(\lambda_i = 0{,}1) = 0{,}5$

$P(\lambda_i = 0{,}3) = 0{,}5.$

Iz toga izlazi:

$E[\lambda_i] = 0{,}2$

$Var[\lambda_i] = 0{,}01.$

(i) Momenti od λ_i mogu se izračunati uvjetovanjem na vrijednost od λ_i. Budući da $S_i | \lambda_i$ ima složenu Poissonovu distribuciju, formule $E(S) = \lambda m_1$ i $Var(S) = \lambda m_2$ mogu se upotrijebiti za:

$$E[S_i] = E[E[S_i | \lambda_i]] = E[\lambda_i m_1] = 0{,}2 m_1$$

$$Var[S_i] = E[Var[S_i | \lambda_i]] + Var[E[S_i | \lambda_i]]$$
$$= E[\lambda_i m_2] + Var[\lambda_i m_1]$$
$$= 0{,}2 m_2 + 0{,}01 m_1^2 .$$

(ii) Slučajne varijable $\{S_i\}_{i=1}^n$ su nezavisne i jednako distribuirane, svaka s distribucijom S_i danom u dijelu (i). Dakle, mogu se upotrijebiti rezultati iz (i) za:

$$E\left[\sum_{i=1}^{n} S_i\right] = nE[S_i] = 0{,}2nm_1$$

$$Var\left[\sum_{i=1}^{n} S_i\right] = nVar[S_i] = 0{,}2nm_2 + 0{,}01nm_1^2 .$$

2.2. Primjer
Example

Pretpostavimo da su Poissonovi parametri individualnih polica izvučeni iz gama-distribucije s parametrima α i δ. Treba naći distribuciju broja šteta nastalih po slučajno odabranoj polici iz portfelja.

Rješenje
Solution

Neka N_i označava broj šteta po i-toj polici u portfelju, i neka je λ_i njezin Poissonov parametar. Tada N_i ima Poissonovu distribuciju s parametrom λ_i, ali je problem u tomu što je vrijednost λ_i nepoznata.

Problem se može rješiti ovako:

Uz dano:

$N_i | \lambda_i \sim P(\lambda_i)$ i $\lambda_i \sim G(\alpha, \delta)$

treba naći marginalnu distribuciju od N_i.

Ovaj se problem može riješiti uklanjanjem uvjetovanja na uobičajeni način:

Za x = 0, 1, 2, ...

$$P(N_i = x) = \int_0^\infty \exp\{-\lambda\} \frac{\lambda^x}{x!} \frac{\delta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \lambda^{\delta-1} \exp\{-\delta\lambda\} d\lambda$$

$$= \frac{\delta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)x!}\int_0^{\infty} exp\{-\lambda(\delta+1)\}\lambda^{x+\alpha-1}d\lambda \ .$$

Integral se izračunava uspoređujući integrand s gama--gustoćom, tako da je:

$$P(N_i = x) = \frac{\delta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)x!}\frac{\Gamma(x+\alpha)}{(\delta+1)^{x+\alpha}}$$

što pokazuje da je marginalna distribucija od N_i negativna binomna s parametrima α i $\delta / (\delta + 1)$.

3. Varijabilnost u homogenom portfelju
Variability in homogeneous portfolio

Pretpostavimo, kao i dosad, da imamo portfelj s n polica. Skupne štete nastale po pojedinačnoj polici imaju složenu Poissonovu distribuciju s parametrima λ i $F(x)$. Ti su parametri isti za sve police u portfelju. Kad bi vrijednost λ bila poznata, ukupni iznosi šteta nastalih po različitim policama bili bi međusobno nezavisni.

Pretpostavljeno je da vrijednost od λ nije poznata, možda zato jer se mijenja iz godine u godinu, ali da postoje neki pokazatelji vjerojatnosti da će λ biti u danom skupu vrijednosti. Kao i u prethodnom primjeru, pretpostavlja se, radi jednostavnosti, da nema neizvjesnosti oko momenata distribucije iznosa individualnih šteta, tj. oko $F(x)$.

3.1. Primjer
Example

Pretpostavimo da će Poissonov parametar λ biti jednak 0,1 ili 0,3 s jednakom vjerojatnošću.

(i) Treba izračunati očekivanje i varijancu (s pomoću m_1 i m_2) ukupnih iznosa šteta po slučajno odabranoj polici iz portfelja.

(ii) Treba izračunati očekivanje i varijancu (s pomoću m_1 i m_2 i n) ukupnih iznosa šteta iz cijelog portfelja.

Rješenje

Solution

Koristeći se istim oznakama, neka S_i označava ukupne iznose šteta po i-toj polici u portfelju.

Slučajne varijable $\{S_i|\lambda\}_{i=1}^{n}$ su nezavisne i jednako distribuirane, svaka sa složenom Poissonovom distribucijom s parametrima λ i $F(x)$. Slučajna varijabla λ ima sljedeću distribuciju:

$P(\lambda_i = 0{,}1) = 0{,}5$

$P(\lambda_i = 0{,}3) = 0{,}5$.

(i) Uvjetovanjem na vrijednost od λ,

$$E[S_i] = E[E[S_i|\lambda]] = E[\lambda m_1] = 0{,}2m_1$$

$$Var[S_i] = E[Var(S_i|\lambda)] + Var[E(S_i|\lambda)]$$

$$= E[\lambda m_2] + Var[\lambda m_1]$$

$$= 0{,}2\, m_2 + 0{,}01\, m_1^2 \ .$$

(ii)

$$E\left[\sum_{i=1}^{n} S_i\right] = nE[S_1] = 0.2nm_1$$ (izbor $\{S_i\}_{i=1}^{n}$ jednako distribuirane)

$$Var\left[\sum_{i=1}^{n} S_i\right] = E\left[Var\left(\sum_{i=1}^{n} S_i|\lambda\right)\right] + Var\left[E\left(\sum_{i=1}^{n} S_i|\lambda\right)\right]$$

$$Var\left[\sum_{i=1}^{n} S_i\right] = E[n\lambda m_2] + [n\lambda m_1]$$

$$Var\left[\sum_{i=1}^{n} S_i\right] = 0{,}2nm_2 + 0{,}01n^2m_1^2.$$

4. Neizvjesnost u broju šteta i iznosima šteta i neizvjesnost parametara
Uncertainty in number and amounts of damages and uncertainty of parameters

4.1. Primjer
Example

Osigurateljno društvo modelira štete od oluja nastale po osigurateljnoj polici kućanstva koristeći se pretpostavkama.

Pretpostavlja se da broj oluja u svakoj godini, K, ima Poissonovu distribuciju s parametrom λ.

Pretpostavlja se da broj šteta prijavljenih po i-toj oluji, N_i, $i = 1, 2, \dots, K$, ima Poissonovu distribuciju s parametrom Θ_i.

Pretpostavlja se da su parametri Θ_i, i = 1, 2, ... , K, nezavisne i jednako distribuirane slučajne varijable s $E(\Theta_i) = n$ i $Var(\Theta_i) = s_1^2$.

Iznos j-te štete nastale u i-toj oluji, X_{ij}, $j = 1, 2, \dots, N_i$, ima lognormalnu distribuciju s parametrima μ_i i σ, gdje se pretpostavlja da je σ poznato.

Pretpostavlja se da su očekivani iznosi šteta, Λ_i = $\exp(\mu_i + \sigma^2 / 2)$ nezavisne i jednako distribuirane slučajne varijable s očekivanjem p i varijancom s_2^2.

Također se pretpostavlja da su Θ_i i Λ_i nezavisne.

(i) Pokažimo da je $E[X_{ij}] = p$ *i* $Var[X_{ij}] = \exp\{\sigma^2\}(p^2 + s_2^2) - p^2$.

(ii) Neka S_i označava ukupne iznose šteta nastale iz *i*-te oluje, tako da je $S_i | \{\Theta_i, \Lambda_i\}$ složena Poissonova slučajna varijabla.

Pokažimo da je $E[S_i] = np$ i $Var[S_i] = (p^2 + s_2^2)(n^2 + s_1^2)(n^2 + s_1^2 + n\exp\{\sigma^2\}) - n^2 p^2$.

(iii) Nađimo izraz za očekivanje i varijancu godišnjih ukupnih iznosa šteta nastalih iz svih oluja.

Rješenje
Solution

(i) $E[X_{ij}] = E[E(X_{ij} | \Lambda_i)] = E[\Lambda_i] = p$

$$Var[X_{ij}] = E[Var(X_{ij} | \Lambda_i)] + Var[E(X_{ij} | \Lambda_i)]$$

$$= E[\Lambda_i^2 (exp\{\sigma^2\} - 1)] + Var(\Lambda_i)$$

$$= (p^2 + s_2^2)(exp\{\sigma^2\} - 1) + s_2^2$$

$$= (p^2 + s_2^2)(exp\{\sigma^2\} - p^2.$$

(ii) $E[S_i] = E[E(S_i | \Theta_i, \Lambda_i)] = E[\Theta_i \Lambda_i] = np.$

Budući da su Θ_i i Λ_i nezavisne i, dalje, budući da $S_i | \{\Theta_i, \Lambda_i\}$ ima složenu Poissonovu distribuciju,

$$Var[S_i | \Theta_i, \Lambda_i] = \Theta_i E[X_{ij}^2 | \Lambda_i]$$

$$= \Theta_i(\Lambda_i^2 \exp\{\sigma^2\}),$$

dobiva se:

$$E[Var(S_i | \Theta_i, \Lambda_i)] = n(p^2 + s_2^2)\exp\{\sigma^2\}.$$

Također izlazi:

$$Var[E(S_i | \Theta_i, \Lambda_i)] = Var[\Theta_i, \Lambda_i] = E[\Theta_i^2, \Lambda_i^2] - n^2p^2$$

$$= (n^2 + s_1^2)(p^2 + s_2^2) - n^2p^2.$$

Zadnja dva rezultata zajedno daju:

$$Var[S_i] = (n^2 + s_1^2)(p^2 + s_2^2) - n^2p^2 + n(p^2 + s_2^2)\exp\{\sigma^2\}.$$

(iii) Neka slučajna varijabla R označava godišnje ukupne iznose šteta nastale iz svih oluja. Tada se R može pisati:

$$R = \sum_{i=1}^{K} S_i$$

gdje K ima Poissonovu distribuciju, a slučajne varijable $\{S_i\}$ su nezavisne jednako distribuirane.

Dakle, R ima složenu Poissonovu distribuciju, pa je poradi toga:

$$E[R] = \lambda E(S_i) = \lambda np$$

$$Var[R] = \lambda E(S_i^2) = \lambda(Var[S_i] + E[S_i]^2)$$

$$= \lambda(p^2 + s_2^2)(n^2 + s_1^2 + n\exp\{\sigma^2\}).$$

4.2. Primjer
Example

Svake godine osigurateljno društvo prikupi izvjestan broj osigurateljskih polica kućanstava, od kojih je za svaku godišnja premija 80*NJ*. Skupne godišnje štete nastale po pojedinačnoj polici imaju složenu Poissonovu distribuciju; Poissonov parametar je 0,4, a individualni iznos šteta ima gama-distribuciju s parametrima α i λ.

Trošak rješavanja štete je slučajna varijabla uniformno distribuirana između 50*NJ* i bNJ(>50*NJ*). Iznos troškova neovisan je o iznosu pridružene štete. Slučajna varijabla S predstavlja cjelokupne ukupne iznose šteta i troškove u godini iz tog portfelja. Može se pretpostaviti da S ima približno normalnu distribuciju.

(i) Pretpostavimo da je:

$\alpha = 1$; $\lambda = 0{,}01$; $b = 100$.

Pokažimo da društvo mora godišnje prodati barem 884 police da bi s 99%-tnom sigurnošću prihod od premija nadmašio štete i troškove.

(ii) Pretpostavimo sada da vrijednosti od α, λ i b nisu sa sigurnošću poznate, nego da mogu biti bilo gdje u sljedećim intervalima:

$0{,}95 \le \alpha \le 1{,}05$; $0{,}009 \le \lambda \le 0{,}011$; $90 \le b \le 110$.

Promatrajući što bi za osigurateljno društvo bila najgora moguća kombinacija vrijednosti od α, λ i b, izračunajmo broj polica koje društvo mora prodati da bi s barem 99%-tnom sigurnošću prihod od premija nadmašio štete i troškove.

Rješenje

Solution

Neka je X_i iznos *i*-te štete, a Y_i iznos pridruženih troškova. Neka je N ukupan broj šteta za portfelj, i neka je n broj polica u portfelju. Tada N ima Poissonovu distribuciju s parametrom $0{,}4n$ i S se može pisati kao:

$$S + \sum_{i=1}^{N} (X_i + Y_i)$$

gdje je $\{X_i + Y_i\}_{i=1}^{\infty}$ niz nezavisnih i jednako distribuiranih slučajnih varijabli, nezavisnih od N. Odavde se može vidjeti da S ima složenu Poissonovu distribuciju gdje ($X_i + Y_i$) predstavljaju "iznos *i*-te individualne štete". Sada se mogu iskoristiti standardni rezultati za zapis sljedećih formula za momente od S:

$$E[S] = 0{,}4nE[X_i + Y_i]$$

$$Var[S] = 0{,}4nE[(X_i + Y_i)^2]$$

$$= 0{,}4n(E[X_i^2] + 2E[X_iY_i] + [Y_i^2]).$$

Momenti od X_i i Y_i su s pomoću α, λ i b kako slijedi:

$E[X_i] = \alpha / \lambda$ $\quad$ $E[Y_i] = (b + 50)/2$

$E[X_i^2] = \alpha(\alpha + 1) / \lambda^2$ $\quad$ $E[Y_i] = (b^2 + 50b + 2500)/3$

$E[X_iY_i] = E[X_i]E[Y_i]$

gdje zadnja relacija slijedi iz nezavisnosti od X_i i Y_i.

(i) Stavimo zatim:

$\alpha = 1$; $\lambda = 0{,}01$; $b = 100$

u te formule da bismo pokazali kako je:

$E[S] = 70n$ i $Var[S] = 127{,}80^2 n.$

Poradi toga S ima približno normalnu distribuciju s očekivanjem $70n$ i standardnom devijacijom $127{,}80\sqrt{n}$. Prihod od premija je $80n$ i traži se najmanja vrijednost od n, takva da je:

$P(S < 80n) \geq 0{,}99.$

Standardizacijom od S, kao što je uobičajeno pri normalnim distribucijama, to postaje:

$$P\left[\frac{(S-70n)}{127{,}80\sqrt{n}} < \frac{(80n-70n)}{127{,}80\sqrt{n}}\right] \geq 0{,}99 .$$

Prethodno 99%-tna točka standardne normalne distribucije je 2,326, pa je zato uvjet za n:

$$\frac{(80n-70n)}{127{,}80\sqrt{n}} \geq 2{,}326$$

što daje:

$n \geq 883{,}7$ (ili $n \geq 884$ do sljedećeg većeg cijelog broja).

(ii) Za reosigurateljno društvo najlošija je moguća kombinacija vrijednosti od α, λ i b ona koja daje najviše moguće vrijednosti za $E[S]$ i $Var[S]$. Da bismo to vidjeli,

neka μ i σ označuju očekivanje i standardnu devijaciju ukupnih iznosa šteta i troškova po pojedinačnoj polici. I μ i σ će biti funkcije od α, λ i b, pa izlazi:

$E[S] = n\mu$ i $Var[S] = n\sigma^2.$

Na isti način kao u (i), uvjet na n je:

$$\frac{(80-\mu)\sqrt{n}}{\sigma} \geq 2{,}326$$

to jest:

$n \geq [2{,}326\sigma/(80 - \mu)]^2.$

Dakle, najviša vrijednost za n rezultira iz najviših vrijednosti za μ i σ.

Sada uočite da je:

$\mu = 0{,}4E[X_i + Y_i]$ i $\sigma^2 = 0{,}4E[(X_i + Y_i)^2].$

Iz formula za momente od X_i i Y_i danih prethodno μ i σ su maksimalni kada su α i b najveći, a λ je najmanji mogući, tj. kada je:

$\alpha = 1{,}05$; $\lambda = 0{,}009$; $b = 110.$

Te kombinacije vrijednosti daju:

$\mu = 78{,}67$ i $\sigma = 144{,}14$

tako da n mora biti barem 63546 da bi osigurateljno društvo barem 99% bilo sigurno kako će prihod od premija nadmašiti štete i troškove.

Zaključak

Conclusion

U radu su proučavani parametri rizika ukupnih iznosa šteta. Pokazano je kako se iz Poissonova i gamma-modela pronalazi distribucija broja šteta po slučajno odabranoj polici iz portfelja.

Temeljem jednostavnih primjera uz prihvatljive pretpostavke dokazane su postavljene tvrdnje.

Literatura

References

[1] Andrijašević, S., V., Petranović, *Ekonomika osiguranja*, Zagreb, 1999.

[2] Crnjac, D. i suradnici, *Some of the Risk Models* (u tisku)

[3] Feller, W., *An introductoin to Probability Theory and its Applications*, VolumeII, Wiley, New York, 1966.

[4] Neill, A., *Life Contigencies*, Oxford, 1977.

Rukopis primljen: 11.7.2003.