ANALIZA TEČAJA I VREDNOVANJE OPCIJA NA TEČAJ NA HRVATSKOM TRŽIŠTU: NGARCH MODEL KAO ALTERNATIVA MODELU BLACKA I SCHOLESA

mr. sc. Petra POSEDEL
Ekonomski fakultet, Zagreb

Stručni članak*
UDK 336.748(497.5)
JEL C21

Sažetak

U posljednje je vrijeme na hrvatskom tržištu naglo porastao interes profesionalnih investitora za financijske derivate, tj. za financijske instrumente čija isplata ovisi o cijenama drugih financijskih instrumenata. Nakon uređenja sustava za trgovanje na burzi, u skorijoj se budućnosti očekuje trgovanje derivatima koje nije tipa OTC, odnosno over-the-counter. *Sukladno tome, izuzetno je važno kvantificirati pravednu cijenu takvih instrumenata. Jednom kada se tržište derivata u Hrvatskoj i osnuje, logično je pretpostaviti primjenu i Black-Scholesova modela za vrednovanje opcija. Međutim, brojna istraživanja na svjetskim tržištima opcija pokazuju da volatilnost prinosa vremenskih nizova nije konstantna kao što se u modelu Blacka i Scholesa pretpostavlja. Ovaj rad istražuje posljedice što ih ima uvođenje volatilnosti koja se mijenja kroz vrijeme za vrednovanje opcija. Predložen je nelinearni u očekivanju, asimetrični GARCH model koji odražava asimetričnost u distribuciji prinosa te koreliranost prinosa i varijance. Za ilustraciju se koristimo NGARCH modelom za vrednovanje opcija na stranu valutu. Simulacijama je određen skup mogućih cijena opcija ovisno o različitim izvršnim cijenama i datumima dospijeća. Unapređenje rezultira činjenicom da je vrijednost opcije dane NGARCH modelom funkcija premije za rizik koja je uklopljena u vremenski niz. To sigurno proturječi rezultatu o vrednovanju opcija koji je imun na preferencije poput onoga u modelu Blacka i Scholesa.*

Ključne riječi: model Blacka i Scholesa, NGARCH model, heteroskedastičnost, volatilnost, premija za rizik, mjera neutralna na rizik, nearbitraža, simulacija Monte Carlo

* Primljeno *(Received)*: 1.6.2006.
Prihvaćeno *(Accepted)*: 24.11.2006.

1. Uvod

Eksplozivni porast trgovanja različitim financijskim instrumentima na hrvatskom tržištu navodi nas na potrebu modeliranja cijena vrijednosnica, tečaja valuta ili kamatnih stopa te njihovih volatilnosti. Tržište derivata (engl. *derivatives*) u Hrvatskoj postoji, ali se trgovanje ne obavlja preko burze, već je neformalnog tipa (OTC). Tržište nelinearnim derivatima – opcijama – ne postoji, no mogućnost njegove uspostave u recentnom razdoblju privlači zanimanje mnogih sudionika na hrvatskom tržištu kapitala. Stoga je izuzetno važno kvantificirati *pravednu* cijenu takvih objekata. Istraživanje ne možemo direktno fokusirati na podatke s tržišta derivata jer njih još nema. Budući da je rasprava o uvođenju tržišta derivata još uvijek aktualna, ovim radom želimo pridonijeti sagledavanju mogućih cijena europskih *call opcija* na vrijednosnice. Takav cilj zahtijeva prije svega prikladno ekonometrijsko modeliranje kretanja cijena vrijednosnica i njihovih volatilnosti jer su formule za vrednovanje opcija funkcije nekih ili svih parametara uključenih u model koji opisuje kretanje cijena same vrijednosnice. Jedan od zasigurno najvećih uspjeha moderne financijske ekonomije jest vrednovanje opcija (engl. *option pricing*). Na bazi zakona jedinstvene cijene ili uvjeta nearbitraže, modele za vrednovanje opcija Blacka i Scholesa (1973) i Mertona (1973) gotovo su trenutačno prihvatili akademici i profesionalni investitori, što je neusporedivo u povijesti ekonomske znanosti.[1]

Međutim, brojna istraživanja (npr. Mandelbrot, 1963. i Fama, 1965, koji u svojim radovima baziraju empirijske studije na podacima vremenskih nizova logaritamskih prinosa nekoliko američkih dionica) pokazuju da volatilnost prinosa vremenskih nizova za većinu financijskih instrumenata nije konstantna, kao što se u modelu Blacka i Scholesa pretpostavlja. Naime, za vrijeme tzv. *stresnih razdoblja* na tržištu (politički neredi i promjene, ekonomske krize, ali i manje drastične promjene poput objave makroekonomskih podataka) cijene financijskih dobara obično uvelike fluktuiraju, odnosno volatilnost promatranog procesa mijenja se kroz vrijeme. U tim uvjetima kažemo da je proces od interesa heteroskedastičan. Prvi uspješni pokušaj ekonometrijskog modeliranja heteroskedastičnosti vremenskih nizova dao je Engle (1982) uvođenjem ARCH modela (engl. *autoregressive conditional heteroskedastic*). Mnogi su istraživači predložili različite ekstenzije ARCH modela. Bollerslev (1986) i Taylor (1986), neovisno jedan o drugome, predlažu generalizirani ARCH, tj. GARCH model, a Nelson (1991) nudi eksponencijalni GARCH, tj. EGARCH model. Efekt poluge (engl. *leverage effect*) i druge GARCH ekstenzije opisane su u radovima Dinga, Grangera i Englea (1993), Glostena, Jagannathana i Runklea (1993) i Hentschela (1995). Bollerslev, Chou i Kroner (1992) te rad Duana (1997) objedinjuju postojeće GARCH modele u zajednički sustav poznat kao *prošireni* GARCH (p, q) proces.

Primjena simetričnoga GARCH (1,1) modela na hrvatskom tržištu za analizu dionica Plive (PLI-AA), Zagrebačke banke (ZAB-O) te indeksa CROBEX prikazana je u radu Šestovića i Latkovića (1998). Autori zaključuju da primjena modela iz GARCH familije poboljšava predviđanja tržišnog rizika.

[1] Vrlo dinamična rasprava o intelektualnoj povijesti Black-Scholes-Mertonove formule za vrednovanje opcija može se naći u Bernstein (1992), poglavlje 11.

Modeli za vrednovanje opcija koji uzimaju u obzir heteroskedastičnost obuhvaćaju, među ostalima, model Mertona (1976), Geske (1979), Rubinsteina (1983) te Duanov GARCH model (1995). U svojim radovima spomenuti autori zaključuju da modeli koji uzimaju u obzir heteroskedastičnost mogu reflektirati promjene uvjetne volatilnosti vrijednosnice od interesa. Nadalje, provedena numerička analiza u spomenutim radovima sugerira da predloženi modeli mogu objasniti neke općepoznate pristranosti koje se asociraju uz Black-Scholesov model, npr. podcjenjivanje *call opcija* u novcu, odnosno podcjenjivanje *put opcija* izvan novca.

Postavljamo pitanje je li situacija glede spoznaja o vrednovanju opcija na stranu valutu bar donekle slična onoj za vrednovanje opcija na dionice. Cooper i sur. (1986) procjenjuju parametre stohastičkog procesa opisujući promjene volatilnosti te potom uspoređuju predviđene cijene s onima dobivenim u modelu Blacka i Scholesa. Njihovi su rezultati po svojoj prirodi vrlo slični onima u istraživanjima opcija na dionice. Duan (1999) u svom radu predlaže alternativni *benchmark* za vrednovanje opcija na stranu valutu koristeći se pritom dvodimenzionalnim nelinearnim GARCH sustavom, tj. NGARCH sustavom za devizni tečaj i stranu dionicu. Numerički rezultati u radu posljednjeg autora pokazuju da predloženi model odražava svojstva koja su konzistentna s dokumentiranim empirijskim regularnostima glede opcija na stranu valutu. Upravo u tom rezultatu nalazimo motivaciju za analizu opcija na stranu valutu modelom NGARCH.

Cijene na tržištima opcija obično su izražene terminima Black-Scholesove implicirane volatilnosti (engl. *implied volatility*) odgovarajućih opcija. U terminima Rebonatoa (1999), implicirana je volatilnost stoga "pogrešan broj koji, uvršten u pogrešnu formulu, daje točan rezultat"! No to ne znači da sudionici na tržištu vjeruju u hipotezu Black-Scholesova modela - oni zaista i ne vjeruju u nju: Black-Scholesova formula za vrednovanje opcija nije u upotrebi kao model za vrednovanje tzv. jednostavnih opcija (engl. *vanilla options*), već kao alat kojim se cijene opcija na tržištu prevode u neku reprezentaciju u terminima implicirane volatilnosti. Interes sudionika na hrvatskom tržištu u recentnom razdoblju zasigurno privlače i intervencije HNB-a na domaćem deviznom tržištu koje rezultiraju promjenom tržišne vrijednosti domaće valute. Trendovi sezonalnosti, koji su tipični za domaću valutu, te mogućnost promjene domaće valute u budućnosti motiviraju na istraživanje raznih opcija na stranu valutu, ovisno o izvršnim cijenama i razdoblju u kojemu će se opcija ugovarati. Stoga je cilj ovog rada pobliže razmotriti empirijsku distribuciju vremenskog niza tečaja euro/kuna te posljedice koje takva spoznaja ima za vrednovanje opcija na stranu valutu. Primarni cilj ovog rada jest procjena parametara koji opisuju promjene u vremenskom nizu tečaja, pri čemu se primjenjuje nelinearni u očekivanju, asimetrični GARCH model. Dobiveni se parametri potom upotrebljavaju za simuliranje cijene opcije na stranu valutu, uz implementaciju NGARCH modela za vrednovanje opcija te se dobivene vrijednosti uspoređuju s vrijednostima dobivenim upotrebom Black-Scholesova modela. Sljedeći cilj ovog rada jest proučiti odražava li pretpostavka heteroskedastičnosti za promjene u vremenskom nizu, zastupljena u NGARCH modelu, značajne razlike u samim cijenama opcija te time pokušati uspostaviti vezu između vrlo popularnoga ekonometrijskoga GARCH modela i sveprisutne literatute o vrednovanju mogućih potraživanja (engl. *contingent claims*).

Ovaj rad organiziran je na sljedeći način. U drugom se dijelu uvodi nelinearni asimetrični GARCH model za opis dinamike kretanja tečaja euro/kuna za kratkoročne vremenske horizonte u razdoblju 2001-2005, opisuju se svojstva tog modela te procjenjuju parametri. Pojam opcije te vrednovanje opcija NGARCH modelom prezentirani su u trećem dijelu. Cijene opcija na stranu valutu implementacijom NGARCH modela za vrednovanje opcija te analiza na temelju različitih izvršnih cijena (engl. *strike*) i datumi dospijeća (engl. *maturity*) prikazani su u četvrtom dijelu i uspoređeni s onima koje proizlaze iz upotrebe modela konstantne volatilnosti Blacka i Scholesa. Smjernice za daljnja istraživanja dane su u zaključku.

2. Modeliranje tečaja putem NGARCH modela

Modeli za vremenske nizove vrijednosnica imaju vrlo važnu ulogu u upravljanju rizikom, čiji je zadatak donošenje financijskih odluka na bazi opaženih podataka cijena vrijednosnica C_t u diskretnom vremenu. Za investitore su relevantne veličine postotni prinosi. U tu se svrhu mogu izračunati tzv. logaritamski prinosi[2] (engl. *log-returns*), razlike logaritama zaključnih cijena pristiglih u jednom danu,

$$P_{t+1} = \ln C_{t+1} - \ln C_t . \tag{1}$$

Na slici 1. uspoređuju se prirasti Brownova gibanja s dnevnim prinosima za tečaj euro/kuna s istom prosječnom volatilnošću. Iako prinosi obaju vremenskih nizova imaju istu varijancu, Brownov je model postiže generirajući prinose koji uglavnom imaju jednaku amplitudu, dok prinosi tečaja euro/kuna postižu mnogo veću disperziju svojih amplituda te upozoravaju na određene nagle promjene vrijednosti koje odražavaju neku veliku promjenu na tržištu.

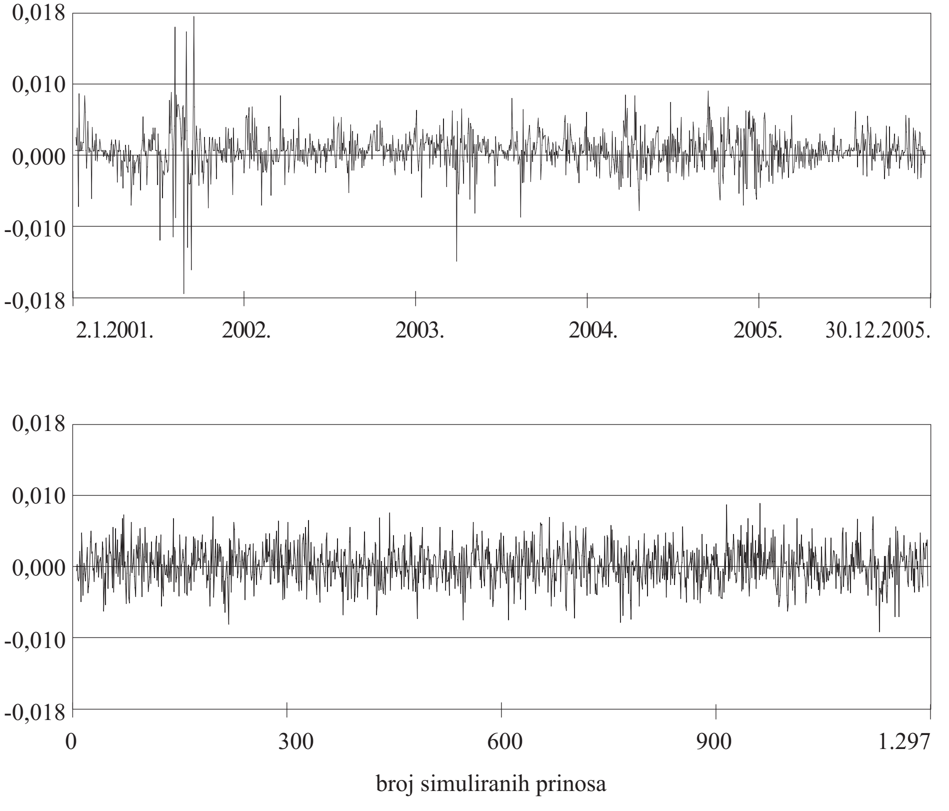
Brojna empirijska istraživanja upućuju na sve veću potrebu za realističnijim modelom od Brownova za podatke koji se odnose na financijsku imovinu. Iskustvo je pokazalo da volatilnost prinosa određenoga vremenskog niza za većinu financijskih instrumenata nije konstantna. Naime, dane visoke (niske) volatilnosti na tržištu obično prate dani visoke (niske) volatilnosti, svojstvo poznato kao grupiranje (engl. *clustering*). Pri procjenjivanju varijabilnosti prinosa najvažnija je varijabla koja predočuje kvadrat razlike logaritamskog prinosa i srednjega logaritamskog prinosa, tzv. kvadrat inovacije prinosa prikazan kao:

$$S_t^2 = (P_t - \mu)^2, \qquad \mu = E(P_t). \tag{2}$$

Slika 2. prikazuje kretanje tečaja u razdoblju od 2001. do 2005. godine. Vidljivo je da se pojedina razdoblja međusobno razlikuju po volatilnosti cijene, što potvrđuje i slika kvadrata inovacije prinosa.

[2] U daljnjem tekstu logaritamske ćemo prinose P_t jednostavno zvati prinosima P_t.

Slika 1. Dnevni logaritamski prinosi za vremenski niz tečaja euro/kuna

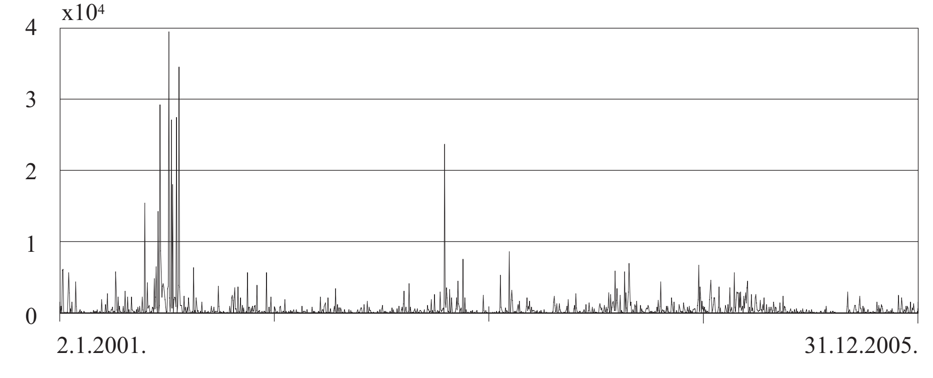


Napomena: (Gornja slika) uspoređeni s logaritamskim prinosima Brownova gibanja, (donja slika) istih očekivanja i varijance.

Serijska ovisnost među podacima, opisana korelacijama među prinosima za različite pomake, prikazana je slikom 3. Puna linija pokazuje da su autokorelacije dnevnih prinosa vrlo malih vrijednosti i da ne upozoravaju ni na kakva sustavna obilježja. Za razliku od autokorelacija dnevnih prinosa, autokorelacije kvadrata dnevnih prinosa pozitivnih su vrijednosti za male pomake, a zatim eksponencijalno padaju prema nuli kada se broj pomaka povećava. To govori da kvadrirane vrijednosti prinosa "ne zaboravljaju" neposrednu prošlost te da su pozitivno korelirane, što je vidljivo iz isprekidane linije na slici 3.

Na prvi pogled bilo bi vrlo logično pomisliti da saznanja i modele koji opisuju dinamiku cijena dionica primijenimo na analizu vremenskog niza koja se odnosi na stranu valutu. Takav bi zaključak, naime, bio pogrešan zbog sljedećeg razloga. Kada kupujemo dionicu (ne uzimajući u obzir isplatu dividende), u načelu kupujemo papir koji čuvamo do onog trenutka kada ga, zbog nekog razloga, odlučimo prodati. Međutim, prilikom kupnje strane valute, u svom vlasništvu nemamo samo novčanicu do onog trenutka dok je opet ne prodamo, već, kao racionalni investitori, imamo i mogućnost izbora npr. devizne štednje, pri čemu će uložena vrijednost rasti uz određenu kamatnu stopu. Takva spoznaja implicira zaključak da valuta ima vrlo sličnu ulogu dionice s neprekidnom dividendom. Spomenuto razmatranje zahtijeva uvođenje dodatne varijable, tzv. kamatnih stopa u standardne modele za dionice, koja će odigrati važnu ulogu u vrednovanju opcija na stranu valutu.

Slika 2. Kretanje tečaja euro/kuna i kvadrati inovacija u razdoblju 2001-2005.



2. 1. Opis modela

Promotrimo ekonomiju u diskretnom vremenu i sa C_t označimo tečaj strane valute, točnije euro/kuna, u trenutku t, definiran kao broj jedinica domaće valute potreban za kupnju jedne jedinice strane valute. Dinamika vremenskog niza dnevnih prinosa P_t opisana je nelinearnim u očekivanju, asimetričnim GARCH(1,1)[3] modelom (Engle and Ng, 1993):

$$P_{t+1} \equiv \ln(\frac{C_{t+1}}{C_t}) = r_d - r_s + \lambda\sigma_{t+1} - \frac{1}{2}\sigma_{t+1}^2 + \sigma_{t+1}Z_{t+1}, \tag{3}$$

[3] Vrijedi napomenuti da se asimetrični GARCH model u literaturi često naziva NGARCH.

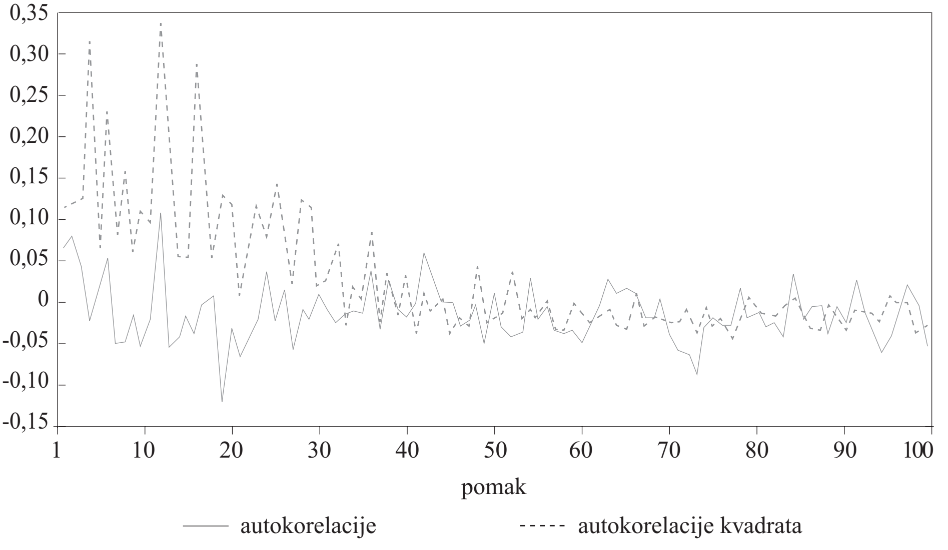
$$\sigma_{t+1}^2 = \omega + \alpha(\sigma_t Z_t - \rho\sigma_t)^2 + \beta\sigma_t^2, \tag{4}$$

pri čemu su Z_t nezavisne i jednako distribuirane normalne (gaussovske) slučajne varijable, $N(0,1)$ te vrijedi:

$$\omega > 0, \qquad \alpha \geq 0, \qquad \beta \geq 0 \qquad \text{i} \qquad \alpha(1+\rho^2)+\beta < 1 \tag{5}$$

kako bi se osigurala nenegativnost i stacionarnost procesa varijance σ_t^2. Varijable r_d i r_s označavaju, redom, konstantnu jednoperiodnu, bezrizičnu, kamatnu stopu na domaću i stranu valutu po kojoj se glavnica neprekidno ukamaćuje,[4] dok je λ konstantna premija za rizik (engl. *risk premium*), odnosno nagrada za ulaganje u stranu valutu. Vrijednost premije utjecat će na uvjetnu varijancu procesa prilikom vrednovanja opcija.[5] Poseban značaj modelu daje parametar asimetričnosti ρ, koji opisuje korelaciju između prinosa i varijance.[6]

Slika 3. Korelacije i korelacije kvadrata dnevnih prinosa



[4] U ovom su radu, radi ilustracije, za parametre r_d i r_s uzete unaprijed zadane konstante određenih vrijednosti. Parametre r_s i r_d moguće je promatrati kao vremenski niz, pa se u tom slučaju procjenjuju na bazi kratkoročnih državnih obveznica.

[5] Uočimo odmah da negativna vrijednost parametra λ smanjuje srednju vrijednost prinosa tečaja euro/kuna, što upućuje na aprecijaciju domaće valute. Nadalje, ako bismo promatrali tečaj euro/kuna, pozitivni predznak parametra λ objašnjavao bi aprecijaciju kune, tj. domaće valute.

[6] U analizi prinosa dionica pozitivna vrijednost parametra ρ reflektira dobro poznati empirijski fenomen, tzv. efekt poluge, koji kazuje da pad cijene dionice za određenu vrijednost uzrokuje povećanje varijance više nego porast cijene za istu vrijednost, odnosno da su prinosi i njihova varijanca negativno korelirani.

Jedna od ključnih prednosti NGARCH modela za upravljanje rizikom jest mogućnost procjene određenih vrijednosti relevantnih za investitore jedan dan unaprijed. Iz definicije odmah slijedi da je σ^2_{t+1}, tj. sutrašnja varijanca, poznata na kraju današnjeg dana t. Sa $E_t[P_{t+1}]$ označimo očekivani[7] prinos u trenutku t. Prema izrazu (3) slijedi da očekivani prinos i varijanca prinosa P_{t+1}, izračunane na bazi informacija u trenutku t, iznose:

$$E_t[P_{t+1}] = r_d - r_s + \lambda\sigma_{t+1} - \frac{1}{2}\sigma^2_{t+1} \qquad \text{i} \qquad Var_t[P_{t+1}] = \sigma^2_{t+1}. \tag{6}$$

Uvjeti (5) osiguravaju stacionarnost procesa uvjetne varijance (σ^2_t), te stoga možemo definirati bezuvjetnu varijancu kao:

$$\sigma^2 \equiv E[\sigma^2_{t+1}] = \frac{\omega}{1-\alpha(1+\rho^2)-\beta}. \tag{7}$$

Prema relaciji (6), procjena varijance direktno je dana modelom kao σ^2_{t+1}. Promatramo li procjenu varijance dnevnog prinosa za k razdoblja unaprijed, rekurzivnom primjenom specifikacije asimetričnoga GARCH modela (4) slijedi:

$$E_t[\sigma^2_{t+k}] = \sigma^2 + [\alpha(1+\rho^2)+\beta]^{k-1}(\sigma^2_{t+1} - \sigma^2), \tag{8}$$

pri čemu je σ^2 definirana pomoću relacije (7). $E_t[\sigma^2_{t+k}]$ i označava očekivanu vrijednost buduće varijance za horizont k. Izraz $\alpha\,(1+\rho^2)+\beta$ zovemo ustrajnošću modela. Prema izrazu (8) slijedi da će, ako je vrijednost $\alpha\,(1+\rho^2)+\beta$ blizu 1, šokovi na tržištu koji udaljavaju varijancu od njezine bezuvjetne, stacionarne vrijednosti ustrajati dugo vrijeme ($k \to \infty$). Tada kažemo da vremenski niz ima dugu memoriju. Nasuprot tome, male vrijednosti izraza $\alpha\,(1+\rho^2)+\beta$ pokazuju da se šokovi u prinosima brže guše u vremenu.

2. 2. Metoda maksimalne vjerodostojnosti

Budući da je uvjetna varijanca σ^2_{t+1} varijabla koju ne možemo opaziti, potrebno ju je implicitno procijeniti s ostalim parametrima modela, $\omega, \alpha, \beta, \lambda, \rho$. Za ekonometrijsku analizu iskorišteno je $T = 1.297$ dnevnih prinosa tečaja euro/kuna od 2. siječnja 2001. do 30. prosinca 2005.[8] Podaci se odnose na međubankarske zaključne ponude za kupovinu eura. Za dnevnu kamatnu stopu na domaću valutu r_d i kamatnu stopu na stranu valutu r_s uzete su unaprijed zadane konstante 0,0131% i 0,0115% respektivno.[9] Prema pretpostavci, (Z_t) je niz nezavisnih jednako distribuiranih slučajnih varijabli takvih da $Z_t \sim N(0,1)$ pa funkcija log-vjerodostojnosti ima oblik:

[7] E_t[X] i Var_t[X] zovemo uvjetno očekivanje i uvjetna varijanca slučajne varijable X jer njihovo računanje uvjetujemo na skup dostupnih informacija do trenutka t.

[8] Autorica zahvaljuje Privrednoj banci Zagreb na ustupljenim podacima.

[9] Pripadne kamatne stope na godišnjoj razini aproksimativno iznose 3,3% i 2,9%. Analizu je, naravno, moguće provesti za bilo koji drugi izbor vrijednosti pripadnih kamatnih stopa. Budući da je frekvencija podataka na dnevnoj razini, godišnja je kamatna stopa uz koju se glavnica neprekidno ukamaćuje radi jednostavnosti pretvorena u dnevnu dijeljenjem sa 252, odnosno prosječnim brojem dana trgovanja u jednoj godini.

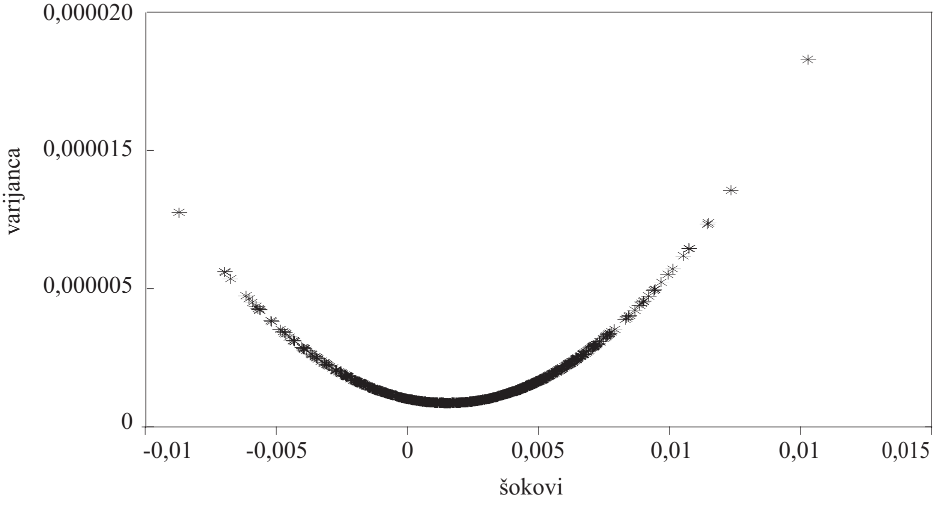
$$L_T = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\Big[-\frac{1}{2}\ln(2\pi) - \frac{1}{2}\ln(\sigma_t^2) - \frac{1}{2}\frac{[P_t - (r_d - r_s + \lambda\sigma_t - \frac{1}{2}\sigma_t^2)]^2}{\sigma_t^2}\Big], \tag{9}$$

pri čemu je T broj opaženih podataka.

Skup nepoznatih parametara označimo sa $\theta = (\omega, \alpha, \beta, \rho, \lambda)$. Potrebno je naći onaj vektor parametra θ za koji funkcija L_T postiže maksimalnu vrijednost uz uvjete dane u relaciji (5). Maksimizacija funkcije L_T po parametrima modela obavlja se pomoću numeričkog algoritma za traženje maksimuma funkcije uz zadane uvjete na parametre. U tablici 1. prikazane su vrijednosti procijenjenih parametara.[10]

GARCH parametar asimetrije ρ negativan je i pokazuje da će porast u volatilnosti tečaja biti veći pri aprecijaciji strane valute EUR, odnosno oslabljenju kune, nego pri deprecijaciji strane valute. Uočimo da bi parametar ρ bio suprotnog predznaka da smo promatrali vremenski niz tečaja HRK/EUR. Na slici 4. prikazana je krivulja odziva na šok (engl. *news impact curve*) kako bi se stekla predodžba o stupnju asimetričnosti. Nadalje, procjena premije za rizik nije statistički signifikantna.[11] Iz ekonometrijske je analize također vidljivo da je vrijednost $\alpha(1+\rho^2)+\beta$ vrlo bliska jedinici, što upućuje na efekte duge memorije u seriji. Drugim riječima, šok u današnjem trenutku utječe na daljnju budućnost. Iako u ovom radu analiziramo samo kratkoročne vremenske horizonte, vrijedi napomenuti da pri interpretaciji za dulja vremenska razdoblja treba biti vrlo oprezan ako postoji tendencija zadržavanja cijene blizu određene razine, što u praksi tečaja valuta i nije neobična pojava.

Slika 4. Krivulja odziva na šok



[10] Parametri su dobiveni primjenom programskih paketa Gauss i Excel, neovisno jednoga o drugome.

[11] U radu podrazumijevamo statističku signifikantnost unutar intervala pouzdanosti od 95%.

S druge strane, prema modelu Brownova gibanja, prinosi (P_1, ... P_T) nezavisne su i jednako distribuirane slučajne varijable prikazane pomoću:

$$P_t = \mu + \sigma W, \qquad \mu \in R, \sigma > 0 \tag{10}$$

pri čemu je $W \sim N(0,1)$ standardna normalna slučajna varijabla. Parametar μ označava srednji logaritamski prinos, a σ je volatilnost prinosa.

Tablica 1. Procijenjeni parametri modela

Parametar	Vrijednost	Standardna greška uzorka
$\hat{\omega}$	1,7339 x 10^{-7}	2.92 x 10^{-8}
$\hat{\lambda}$	-0,0301153	0,11311
$\hat{\alpha}$	0,095345	0,012028
$\hat{\beta}$	0,86840994	0,014289
$\hat{\rho}$	-0,1707379	0,074885
$\hat{\alpha}(1+\rho^2)+\hat{\beta}$	0,96653484	–

Ako kvantitativnu analizu baziramo na modelu Brownova gibanja, srednju očekivanu vrijednost i varijancu za dani vremenski niz možemo konzistentno procijeniti pomoću:

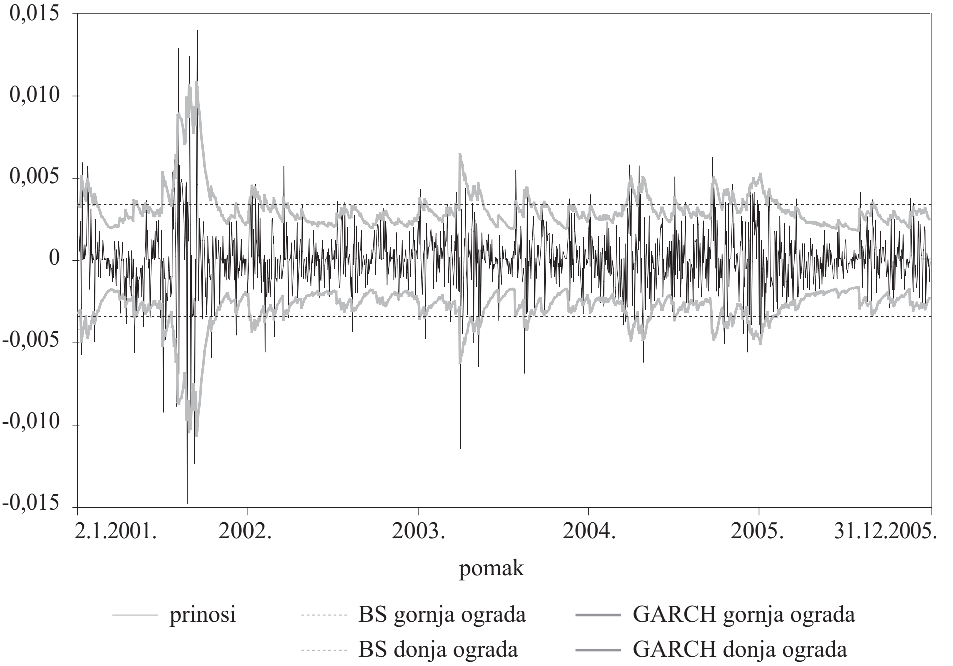
$$\hat{\mu} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} P_t, \qquad \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}[P_t - \hat{\mu}]^2, \tag{11}$$

čije su asimptotske varijance σ^2/T i $2\sigma^4/T$ respektivno. Prema podacima slijedi:

$$\hat{\mu} = -1,96838 \text{ x } 10^{-5} \ (6,60515 \text{ x } 10^{-5}) \qquad \hat{\sigma}^2 = 5,65855 \text{ x } 10^{-6} \ (2,22203 \text{ x } 10^{-7}) \tag{12}$$

iz čega proizlazi da je procjena dnevne volatilnosti konstantna i iznosi $\hat{\sigma} = \sqrt{\hat{\sigma}^2}$ = 0,0023788. U zagradama su navedene pripadne standardne greške. Parameter μ nije statistički signifikantan (t statistika iznosi -0.298), stoga ga u daljnjoj analizi zanemarujemo. Na slici 5. prikazani su prinosi tečaja i procjene rizika u obliku jednodnevne procjene volatilnosti na dva načina. Jedan je onaj u kojemu se za procjenu volatilnosti tečaja koristimo vrijednošću $\hat{\sigma}$ = 0.0023788. U drugom načinu koristimo se procjenom dobivenom NGARCH modelom pomoću formule upotrebom procijenjenih parametara iz tablice 1. U sliku smo ucrtali interval od 1,65 σ kako bismo dobili interval unutar kojega očekujemo apsolutnu vrijednost prinosa u sljedećem danu, uz pouzdanost od 95%. Često se ta vrijednost označava kao VaR (engl. *Value at Risk*). Iscrtkana linija označava interval dobiven uz implementaciju Brownova modela za vremenski niz, dok puna linija označava interval dobiven NGARCH specifikacijom. Iz slike je vidljivo da u razdobljima mirnijih zbivanja na tržištu nelinearni asimetrični GARCH model daje niže i prikladnije procjene volatilnosti, za razliku od Brownova modela. Konstantna volatilnost Brownova modela znatno je veća jer je opterećena razdobljima intenzivnih promjena, odnosno velikih volatilnosti na tržištu (npr. 2001), pa daje preveliku volatilnost u mirnijim područjima.

Slika 5. Prinosi i procjene rizika



Za daljnju analizu, kojoj je cilj vrednovanje opcija, fiksirat ćemo procijenjene vrijednosti parametara i smatrati ih poznatim konstantama koje dominiraju modelom.

3. Vrednovanje opcija

Vrijednost opcije nastaje na osnovi vrijednosnice na koju je opcija pisana, ali je isplata opcije (engl. *payoff*) nelinearna funkcija cijene vrijednosnice. Stoga će cijena opcije također biti nelinearna funkcija cijene vrijednosnice. Upravo ta nelinearnost otežava vrednovanje i upravljanje rizikom.

3. 1. Europska **call opcija** *na stranu valutu uz NGARCH model*

Analizu vrednovanja opcija ograničit ćemo na vrednovanje europskih opcija koje se mogu izvršiti isključivo na dan dospijeća.[12] U ovom ćemo odjeljku prikazati model za vrednovanje europskih *call opcija* prema rezultatima Duana (1995).

[12] Opcije američkog tipa mogu se izvršiti bilo kojeg datuma do datuma dospijeća i uključujući taj datum.

Europska *call (put) opcija* na devize[13] (engl. *Euopean call (put) option*) daje vlasniku opcije pravo, ali ne i obvezu, na terminsku kupnju (prodaju) devize točno određenog datuma u budućnosti T (engl. *maturity*), koji se može izraziti terminima broja dana do datuma dospijeća $\tau > 0$ (engl. *time to maturity*), a K je izvršna cijena opcije (engl. *strike*).

U daljnjem tekstu koristit ćemo se oznakom *co* za cijenu europske *call opcije*. Dani do datuma dospijeća τ broje se u kalendarskim danima (365 u godini), a ne poslovnim danima, odnosno danima trgovanja. Kažemo da je opcija u trenutku *t u novcu* (engl. *in the money*) ako vrijedi $C_t > K$ *pri novcu* (engl. *at the money*) ako $C_t = K$, odnosno *izvan novca* (engl. *out of the money*) ako $C_t < K$. Kako bismo *pravedno* odredili cijenu opcije, potrebno je uvesti kriterij neutralnosti na rizik. To ne znači kako podrazumijevamo da su agenti na tržištu neutralni na rizik, već se za vrednovanje opcija koristimo mjerom ravnoteže cijena (engl. *equilibrium price measure*). S ekonomskog stajališta to je ujedno i vrlo logična pretpostavka. Naime, zbog uvjeta nearbitraže u svijetu neutralnom na rizik današnja cijena vrijednosnice trebala bi biti očekivana vrijednost svih diskontiranih budućih isplata koje proizlaze iz vrijednosnice od interesa.

Kažemo da mjera ravnoteže cijena za domaće tržište zadovoljava relaciju valuacije lokalno neutralne na rizik[14] (engl. *local risk-neutral valuation relationship*), odnosno RVLNR, ako svaka vrijednost vrijednosnice X_t koja se mjeri domaćom valutom zadovoljava sljedeće odrednice:

- X_{t+1} / X_t uvjetno je log-normalno distribuirana u odnosu prema mjeri ravnoteže
- očekivana stopa prinosa vrijednosnice jednaka je bezrizičnoj domaćoj kamatnoj stopi, odnosno:

$$E_t^*[X_{t+1} / X_t] = e^{r_d}, \tag{13}$$

- uvjetna varijanca prinosa s obzirom na mjeru neutralnu na rizik jednaka je uvjetnoj varijanci originalnog procesa, odnosno:

$$Var_t^*[\ln(X_{t+1} / X_t)] = Var_t[\ln(X_{t+1} / X_t)], \tag{14}$$

pri čemu E_t^*, Var_t^* označavaju, respektivno, uvjetno očekivanje i uvjetnu varijancu s obzirom na mjeru ravnoteže. Kako bismo mogli izračunati uvjetno očekivanje i uvjetnu varijancu prema prethodnim uvjetima, potrebno je specificirati proces s obzirom na novu mjeru.

Proces definiran pomoću:

$$P_{t+1} \equiv \ln(C_{t+1}) - \ln(C_t) = r_d - r_s - \frac{1}{2}\sigma_{t+1}^2 + \sigma_{t+1} Z_{t+1}^*, \tag{15}$$

[13] Tzv. *call-put relacija* (20) omogućuje nam da analizu vrednovanja opcija baziramo na europskoj *call opciji*, a zatim cijenu *put opcije* izračunamo pomoću spomenute relacije.

[14] Definicija vrijedi i za stranu vrijednosnicu dokle god se ona mjeri domaćom valutom. Jasno je da je strana valuta specijalan primjer strane vrijednosnice koja je prikazana domaćom valutom. U tom slučaju, zbog racionalnog investiranja u devizni račun uz neprekidno ukamaćivanje, vrijedi relacija $X_t = C_t \exp(r_s t)$.

i:

$$\sigma_{t+1}^2 = \omega + \alpha[\sigma_t Z_t^* - (\lambda + \rho)\sigma_t]^2 + \beta\sigma_t^2, \tag{16}$$

pri čemu su $Z_{t+1}^* = Z_{t+1} + \lambda \sim N(0,1)$ odnosno varijable Z_t^* nezavisne, normalno distribuirane s obzirom na mjeru lokalno neutralnu na rizik, zadovoljava svojstva 1, 2 i 3 prethodne definicije.[15]

Relacija (15) omogućuje nam vrednovanje opcija na stranu valutu. Nadalje, prema relaciji (16) slijedi da premija za rizik λ globalno utječe na proces uvjetne varijance iako je rizik lokalno neutraliziran s obzirom na mjeru ravnoteže koja zadovoljava kriterij RVLNR, s tim što je u specifikaciji očekivanja (15) nadomješten bezrizičnom kamatnom stopom, a uvjetna varijanca ostala je nepromijenjena prema uvjetu 3. Prema navedenome, proizlazi da će cijena opcije prikazana NGARCH modelom biti funkcija premije za rizik.

Pravedna cijena europske *call opcije* (u svijetu neutralnome na rizik) u trenutku t izvršne cijene K, s datumom dospijeća $t + \tau$, $\tau > 0$ prikazana je kao diskontirana očekivana vrijednost isplate s obzirom na mjeru lokalno neutralnu na rizik, uz dostupnost svih informacija do tog trenutka, odnosno:

$$co_t = \exp(-r_d\tau)E_t^*[\max(C_{t+\tau} - K, 0)]. \tag{17}$$

Budući da distribucija vremenski agregirane cijene $C_{t+\tau}$ u analitičkoj formi nije poznata, uvjetno očekivanje E_t^* ne može se eksplicitno izračunati. Stoga se potrebno koristiti simulacijama za računanje prosječne buduće isplate i potom dobivenu vrijednost iskoristiti kao procjenu očekivane vrijednosti $E_t^*[.]$. Aproksimacije dobivene simulacijom zovemo Monte Carlo procjenitelji. Kada je broj Monte Carlo ponavljanja *MC* dovoljno velik (*MC* $\rightarrow \infty$), prosječna vrijednost konvergira očekivanju. Simulacije se izvršavaju rekurzivnom primjenom relacija (15) i (16) i prikazane su u sljedećem odjeljku.

Osobito je važno istaknuti da je, za razliku od formule (17), čiju vrijednost ne možemo izravno izračunati, prema modelu Blacka i Scholesa (10), uz određene pretpostavke, cijena europske *call opcije* prikazana formulom (Campbell, Lo and MacKinlay, 1997, pogl. 9):

$$co_t = C_t\exp(-r_s\tau)\Phi(d) - \exp(-r_d\tau)K\Phi(d - \sigma\sqrt{\tau}), \tag{18}$$

pri čemu je $\Phi(z)$ funkcija distribucije standardne normalne slučajne varijable, a d zadan jednakošću:

$$d = \frac{\ln(C_t / K) + \tau(r_d - r_s + \sigma^2/2)}{\sigma\sqrt{\tau}}. \tag{19}$$

[15] Dokaz tvrdnje prikazan je u dodatku 1.

Formula (18) poznata je pod nazivom Black-Scholes-Mertonova formula.[16] Za opcije na stranu valutu $\Phi(d)\exp(-r_s\tau)$ određuje osjetljivost cijene opcije na promjene cijene samog tečaja. Tu vrijednost zovemo *delta* opcije i označavamo sa Δ. Iako smo analizu uglavnom usredotočili na europsku *call opciju*, dobivene formule mogu se iskoristiti za određivanje cijene europske *put opcije, po_t*, pomoću tzv. *call-put relacije* prikazane sa:

$$C_t \exp(-r_s) + po_t = co_t + K \exp(-r_d \tau). \tag{20}$$

U daljnjem ćemo tekstu cijenu opcije dobivene uz NGARCH model označiti sa co^{GH}, a uz Black-Scholesov model sa co^{BS} Prije same usporedbe GARCH modela za vrednovanje opcija s Black-Scholesovim numeričkom analizom uočimo da GARCH model u svojoj općenitosti obuhvaća i Black-Scholesov model jer je homoskedastični proces prinosa vrijednosnica specijalni slučaj GARCH procesa (za $\alpha = 0$ i $\beta = 0$).

4. Analiza cijena opcija na stranu valutu uz NGARCH model

Kako bi se standardizirale cijene opcija koje odgovaraju različitim datumima dospijeća i izvršnim cijenama, u istraživanju opcija uobičajeno je primijeniti formulu kako bi se izračunala Black-Scholesova implicirana volatilnost. Budući da je Black-Scholesova cijena opcije kao funkcija parametra volatilnosti σ, strogo rastuća[17], moguće je naći jedinstvenu vrijednost volatilnosti $\tilde{\sigma}(T, K)$ takvu da vrijedi:

$$co_t^{BS}(C_t, K, T, \tilde{\sigma}) = C_t^*(T, K), \tag{21}$$

pri čemu $C_t^*(T, K)$ označava opaženu tržišnu cijenu opcije u trenutku t za datum dospijeća T i izvršnu cijenu K. Za fiksni t, implicirana volatilnost $\tilde{\sigma}(T, K)$ ovisi o karakteristikama opcije kao što su datum dospijeća T i izvršna cijena K. Funkcija $\tilde{\sigma}(T, K)$ zove se površina implicirane volatilnosti (engl. *implied volatility surface*) u trenutku t. Cijene opcija na tržištu obično su predočene terminima Black-Scholesove implicirane volatilnosti[18], odnosno za svaki fiksni t promatra se:

$$\tilde{\sigma} = co_t^{BS}(C_t, K, \tau, C_t^*)^{-1}. \tag{22}$$

Zbog pretpostavke o konstantnoj volatilnosti Black-Scholesov model predviđa ravnu površinu implicirane volatilnosti, odnosno konstantnu $\sigma = \tilde{\sigma}(T, K)$. Postoji mnogo dokumentiranih empirijskih studija o tome da implicirana volatilnost nije konstantna kao funkci-

[16] Uz pretpostavke nearbitraže i nepostojanja tržišnih nesavršenosti, npr. poreza i troškova transakcija, Black i Scholes došli su do formule pretpostavljajući da vrijedi CAPM (engl. *capital assset pricing model*), odnosno model za procjenu kapitalne imovine, dok je Merton do iste formule došao promatranjem samofinancirajućeg portfelja koji se sastoji od dionica, opcija i bezrizičnih obveznica.

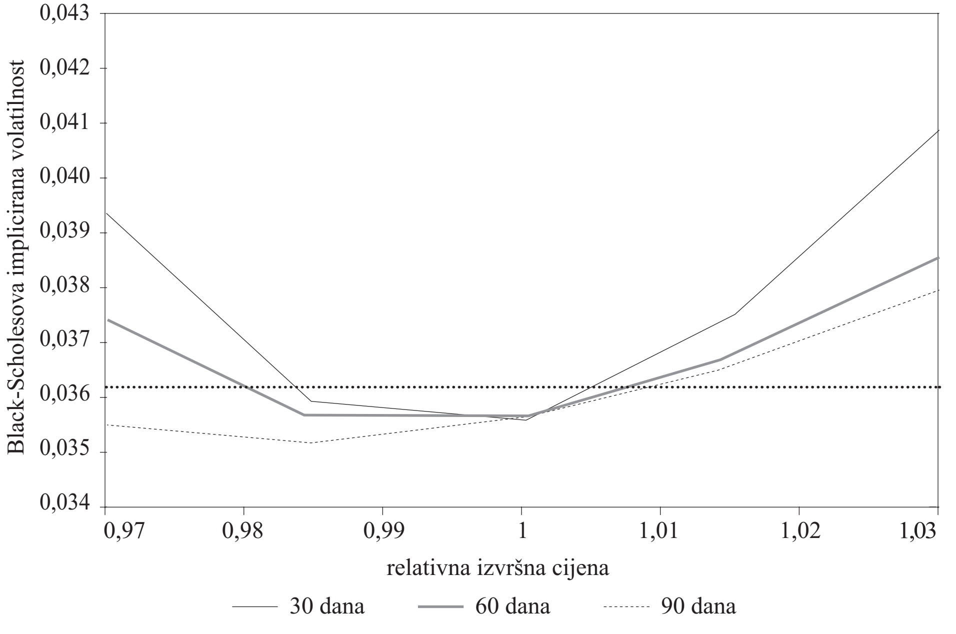
[17] Za svaki $\sigma \in (0, \infty)$ vrijedi $\frac{\partial co^{BS}}{\partial \sigma} > 0$.

[18] Vrijedi napomenuti da, prema tvrdnji (21), postoji inverzna funkcija funkcije co^{BS}.

ja izvršne cijene niti kao funkcija datuma dospijeća (npr. Cont i da Fonseca, 2002; Rubinstein, 1985). Prilikom vrednovanja opcija na dionice Johnson i Shanno (1987), Scott (1987) i Wiggins (1987) u svojim radovima analiziraju efekt stohastičke volatilnosti i pokazuju da su predviđene cijene opcija europskog tipa uglavnom niže od cijena opcija dobivenih modelom Blacka i Scholesa za opcije "pri novcu". Ako je opcija "jako u novcu", predviđene cijene opcija obično su veće od Black-Scholesovih. Za opcije "jako izvan novca", rezultati koje dobivaju osjetljivi su na parametre zastupljene u stohastičkom procesu koji opisuje dinamiku volatilnosti te na korelaciju između promjena u volatilnosti i cijene dionice.

Za provođenje studije o tome mogu li okviri asimetričnog GARCH modela opisati empirijska opažanja na svjetskom tržištu opcija, u numeričkoj su analizi pomoću parametara iz tablice 1. najprije izračunane cijene opcija[19] uz NGARCH specifikaciju, a zatim su, za različite dane do dospijeća τ, prikazani grafovi $(m, \widetilde{\sigma}(m))$ pri čemu je m definiran kao K/C_t i zovemo ga relativna izvršna cijena (engl. *moneyness*). Veličina $\widetilde{\sigma}$ definirana je pomoću (22) tako da se umjesto C^* u jednadžbu uvrštava co^{GH} odnosno cijena opcije dobivena GARCH modelom. Za početnu vrijednost volatilnosti uzeta je procijenjena bezuvjetna volatilnost izračunana na bazi parametara iz tablice 1, prema relaciji (7), koja na godišnjoj razini, pretpostavljajući 252 dana u godini, iznosi 0,036128 i ucrtana je isprekidanom linijom u svaku od slika 6, 7. i 8. Budući da nije signifikantan, parametar λ izbačen je iz daljnje analize.[20]

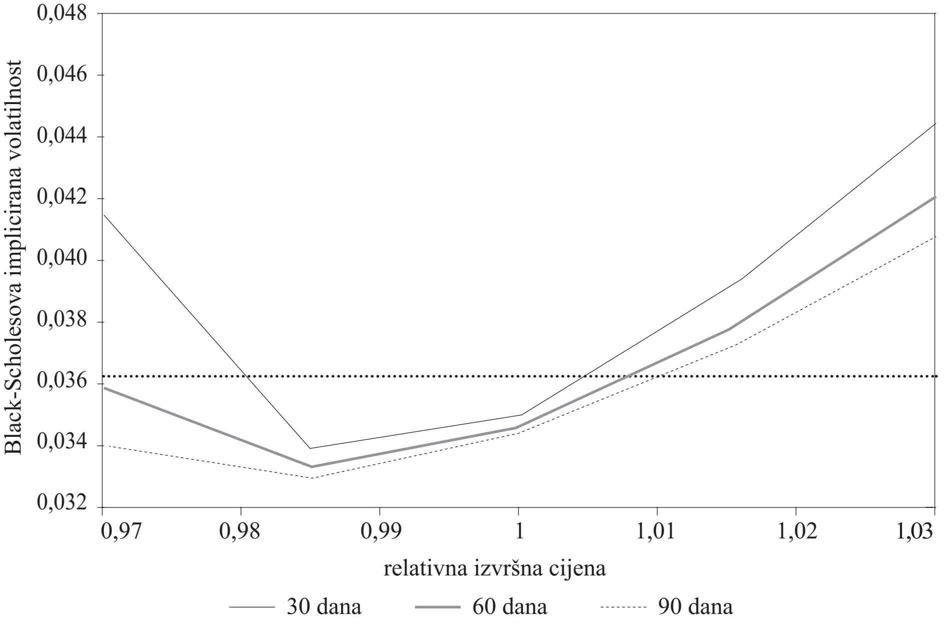
Slika 6. Implicirana volatilnost kao funkcija relativne izvršne cijene za europsku call opciju na stranu valutu, ρ= – 0,17074



[19] Svaka cijena opcije simulirana je uz 50.000 izvršenja. Za simuliranje je korišten programski jezik MATLAB.

[20] Prema relaciji (16), jasno je da izraz $(\lambda + \rho)$ utječe na vrednovanje opcija kao jedan od parametara, pa stoga bez smanjenja općenitosti možemo promatrati slučaj $\lambda = 0$ dokle god se analizira utjecaj parametra ρ.

Slika 7. Implicirana volatilnost na godišnjoj razini kao funkcija relativne izvršne cijene za europsku call opciju na stranu valutu, ρ= – 0,461



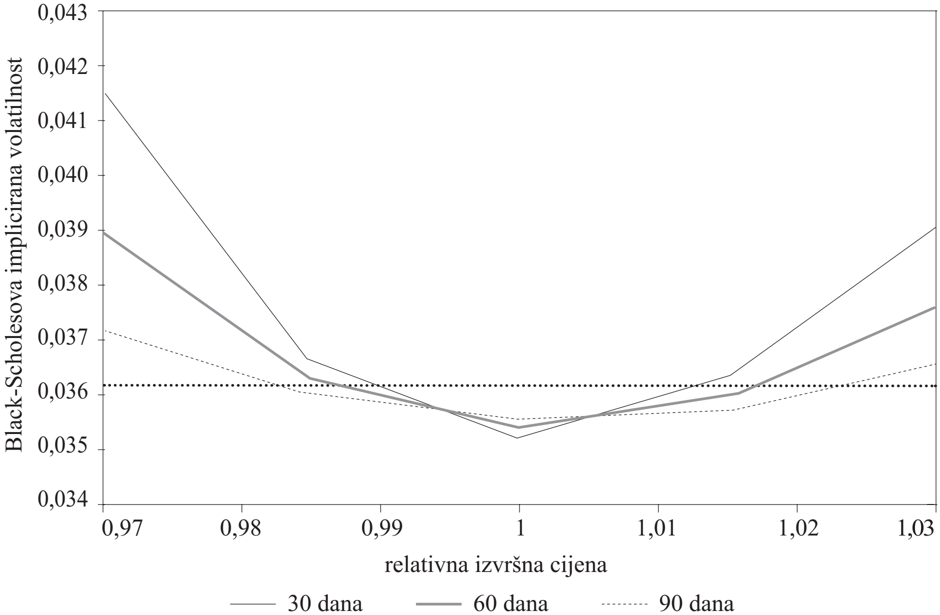
Nadalje, cijene opcija prikazane su u terminima broja dana do datuma dospijeća. Cijene opcija izračunane su za različite rokove do dospijeća (τ = 30, 60 i 90 dana) i različite relativne izvršne cijene (*m* = 0,97, 0,985, 1,0, 1,015 i 1,03, koje redom odgovaraju izvršnim cijenama opcije *K* = 7,11495, 7,224975, 7,335, 7,445, 7,555), uz spot-cijenu tečaja C_t = 7,335. Primjenom relacije (17), cijena opcije dobivena simulacijom prikazana je pomoću:

$$c^{GH} \approx \exp(-r_d \tau) \frac{1}{MC} \sum_{i=1}^{MC} \max\{C_{i,t+\tau} - K, 0\}, \tag{23}$$

pri čemu je *MC = 50.000*, a za *i* – tu simulaciju vrijedi:

$$C_{i,t+\tau} = C_t \exp(\sum_{j=1}^{\tau} P_{i,t+j}), \qquad i = 1, 2, \ldots, MC. \tag{24}$$

Slika 8. Implicirana volatilnost kao funkcija relativne izvršne cijene za europsku call opciju na stranu valutu, ρ= 0.



Sve dobivene vrijednosti odnose se na cijenu opcije na današnji dan, koji je označen kao $t = 0$ i u daljnjem ga indeksiranju izostavljamo. Dobivene cijene opcija zatim su uspoređene s onima koje proizlaze implementacijom Black-Scholesova modela, uz procijenjenu godišnju konstantnu volatilnost 0,036128. Dobiveni su rezultati prikazani u dodatku 2. Slika 6. temelji se na procijenjenim parametrima iz tablice 1. Blaga negativna asimetrija ρ = -0,17074 utječe na činjenicu da su opcije izvan novca ($K/C > 1$) u Black-Scholesovu modelu konstantne volatilnosti σ = 0,036128 podcijenjene. Opcije "pri novcu" u modelu konstantne volatilnosti precijenjene su. Budući da je cijena opcije rastuća funkcija volatilnosti, volatilnosti čija je vrijednost veća od one stacionarne upućuju na višu cijenu opcije nego što bi je Black-Scholesov model uz volatilnost σ = -0,036128 i iste terminske uvjete predvidio. Radi analize utjecaja parametra asimetrije, postupak simulacije je opetovan[21], uz ρ = -0,461 i ρ = 0 redom, a rezultati su prikazani na slikama 7. i 8. Vrijednost parametra ω prilagođena je kako bi stacionarna volatilnost ostala nepromijenjena. Pri umjerenoj asimetriji ρ = -0,467 opcije "izvan novca" u modelu konstantne volatilnosti podcijenjene su, dok su neke od opcija (τ = 30) "u novcu" u modelu konstantne volatilnosti također podcijenjene. Efekt precjenjivanja u modelu konstantne volatilnosti sada je izraženiji za opcije "u novcu". Ako je ρ = 0 graf implicirane volatilnosti postaje gotovo simetričan (centriran u K/C =

[21] Dobivene cijene prikazane su u dodatku 3) i dodatku 4).

1) jer je asimetričnost potpuno izostala. Prema slici 8. vidljivo je da su opcije “jako u novcu” i “jako izvan novca” u modelu konstantne volatilnosti značajno podcijenjene. Dobiveni su rezultati konzistentni s opažanjima Taylora i Xua (1994) i Duana (1999). Za opcije “izvan novca”, neovisno o kojem je parametru asimetrije riječ, implicirana je volatilnost opadajuća funkcija datuma dospijeća. Za opcije koje su “blizu novca” (K/C = 1) pri nepostojanju asimetričnosti ili pak pri vrlo blagoj asimetričnosti (ρ = 0 ili ρ = -0,17074) implicirana je volatilnost rastuća funkcija datuma do dospijeća. Spoznaje su podudarne s opažanjima Shastrija i Wethyavivorna (1987) te Duana (1999).

5. Zaključak

U posljednje je vrijeme na hvatskom tržištu naglo poraslo zanimanje profesionalnih investitora za financijskim derivatima. Tržište derivata u Hrvatskoj još ne postoji, ali se u skoroj budućnosti očekuje njegovo osnivanje. U tom slučaju, kao alternativu Brownovu modelu, u ovom se radu za vrednovanje opcija predlaže NGARCH model. Za ilustraciju su prikazane posljedice koje model ima za vrednovanje opcija na stranu valutu. Identificirana je mjera vrednovanja za domaću ekonomiju, koja je lokalno neutralna na rizik te je prikazana dinamika cijena strane valute s obzirom na tu mjeru. Analiza pokazuje da uvođenje heteroskedastičnosti rezultira boljom prilagodbom empirijske distribucije strane valute s obzirom na model koji se bazira na Brownovu gibanju. Simulacije pokazuju da je unutar predloženog modela moguće opisati empirijska opažanja na svjetskim tržištima opcija na stranu valutu. Za razliku od Black-Scholesova modela, koji je imun na preferencije, NGARCH model za vrednovanje opcija u svojoj formulaciji obuhvaća i premiju za rizik. Nije *a priori* jasno koja je vrijednost premije razumna za rizik volatilnosti. U ovom se radu u primjeru procjene parametara primjenom vremenskog niza vrijednosnice od interesa premija nije pokazala signifikantnom. No jednom kada podaci s ustanovljenog tržišta budu dostupni, bit će moguće provesti procjenu parametara korištenjem isključivo podataka s tržišta derivata, bez potrebe za vremenskim nizom same vrijednosnice. Tada će biti zanimljivo analizirati razlikuju li se predikcije cijena opcija dobivene NGARCH modelom za vrednovanje opcija od onih na tržištu te u kojoj mjeri unapređenje rezultira samom procjenom parametara, a s ciljem predikcije cijena opcija. Budući da je u granicama nelinearnoga asimetričnog GARCH modela moguće modelirati koreliranost uvjetne varijance i pomak prinosa, zbog empirijski poznatog efekta poluge model može biti vrlo koristan i prilikom modeliranja dionica (npr. Christie, 1982), a samim time i za vrednovanje opcija na dionice. To upućuje na moguću primjenu NGARCH modela za vrednovanje opcija na bilo koju vrijednosnicu od interesa na burzi. Nadalje, uz dostupnost podataka s tržišta opcija, bilo bi zanimljivo istražiti koliko se dobivene predikcije cijena mogu poboljšati modelima koji obuhvaćaju procese skokova jer oni mogu reflektirati nepredvidive promjene na tržištu. Zaključno, jednom kada podaci s tržišta derivata budu dostupni, neće izostati modeli kojima će se pokušati modelirati različiti fenomeni.

Dodatak 1.

Izvod lokalne neutralnosti na rizik za GARCH model

Pretpostavimo da je specifikacija procesa uz novu mjeru dana izrazima (15) i (16). Prema racionalnom ponašanju investitora (u smislu da preferira više a ne manje novca), strana je valuta specijalni slučaj strane vrijednosnice prikazane relacijom:

$$X_t = C_t \exp(r_s t). \tag{25}$$

Budući da je, prema pretpostavkama modela, σ^2_{t+1} vrijednost koja je poznata u trenutku t, a Z^* normalno distribuirana slučajna varijabla, prema specifikaciji (15) slijedi da je $\ln(X_{t+1}/X_t) = r_s + \ln(C_{t+1}/C_t)$ uvjetno normalno distribuirana slučajna varijabla, odnosno da je X_{t+1}/X_t uvjetno log-normalno distribuirana.

Nadalje, računajući uvjetno očekivanje relacije (15), slijedi:

$$\begin{aligned} E_t^*[X_{t+1}/X_t] &= E_t^*[C_{t+1}\exp(r_s(t+1))/(C_t \exp(r_s t))] \\ &= \exp(r_s) E_t^*[\exp(r_d - r_s - \frac{1}{2}\sigma^2_{t+1} + \sigma_{t+1} Z^*_{t+1})] \\ &= \exp(r_d - \frac{1}{2}\sigma^2_{t+1}) E_t^*[\exp(\sigma_{t+1} Z^*_{t+1})]. \end{aligned} \tag{26}$$

No, $\sigma^2_{t+1} Z^*_{t+1}$ je uvjetno normalno distribuirna slučajna varijabla očekivanja nula i varijance σ^2_{t+1}, pa stoga izraz $E^*_t[\exp(\sigma_{t+1} Z^*_{t+1})]$ predočuje generirajuću funkciju momenata za normalnu slučajnu varijablu izračunanu u jedinici, što u promatranom primjeru iznosi $\exp(\frac{1}{2}\sigma^2_{t+1})$. Stoga, prema jednakosti (26), slijedi:

$$E_t^*[X_{t+1}/X_t] = \exp(r_d), \tag{27}$$

što ispunjava drugi uvjet.

Napokon, uzimajući u obzir da je "sutrašnja" varijanca prinosa, tj. σ^2_{t+1} poznata na kraju današnjeg dana, tj. u trenutku t, primjenom relacija (15) i (16) dobiva se:

$$\begin{aligned} Var_t^*[\ln(X_{t+1}/X_t)] &= E_t^*[\omega + \alpha(\sigma_t Z_t^* - \lambda\sigma_t - \rho\sigma_t)^2 + \beta\sigma_t^2] \\ &= E_t^*[\omega + \alpha(P_t - r_d + r_s + \frac{1}{2}\sigma_t^2 - \lambda\sigma_t - \rho\sigma_t)^2 + \beta\sigma_t^2] \\ &= E_t[\omega + \alpha(\sigma_t Z_t - \rho\sigma_t)^2 + \beta\sigma_t^2] \\ &= Var_t[\ln(X_{t+1}/X_t)], \end{aligned} \tag{28}$$

pri čemu posljednja jednakost proizlazi iz relacije (3). Time je ispunjen i treći uvjet.

Dodatak 2.

Cijene opcija na stranu valutu dobivene uz GARCH model i Black-Scholesov model za vrednovanje opcija za različite datume dospijeća i izvršne cijene uz volatilnost $\sigma_0 = 0,036128$ spot-cijenu tečaja $C = 7,335$ i parametre iz tablice 1.[22]

Dani do dospijeća τ	m	Izvršna cijena opcije	co^{GH}	co^{BS}
30	0,97	7,12	0,22308690122941	0,22288483536895
	1,00	7,22	0,11741870260476	0,11766584897751
	1,00	7,34	0,03721059194186	0,03812329096746
	1,02	7,45	0,00624557117497	0,00563250518454
	1,03	7,56	0,00080196491670	0,00030742586018
60	0,97	7,12	0,22756291771718	0,22720379640897
	1,00	7,22	0,12794447130915	0,12867323461609
	1,00	7,34	0,05362443201262	0,05477715335458
	1,02	7,45	0,01624776243006	0,01581733927356
	1,03	7,56	0,00392655032981	0,00287215360745
90	0,97	7,12	0,23210542851231	0,23267520409955
	1,00	7,22	0,13733693276207	0,13898858113885
	1,00	7,34	0,06638849391364	0,06784528392649
	1,02	7,45	0,02594685840856	0,02563837476337
	1,03	7,56	0,00857959351282	0,00720066693796

Dodatak 3.

Cijene opcija na stranu valutu dobivene uz GARCH model i Black-Scholesov model za vrednovanje opcija za različite datume dospijeća i izvršne cijene uz volatilnost $\sigma_0 = 0,036128$, spot-cijenu tečaja $C = 7,335$ i $\rho = -0,461$.

Dani do dospijeća τ	m	Izvršna cijena opcije	co^{GH}	co^{BS}
30	0,97	7,12	0,22329682837468	0,22288483525001
	1,00	7,22	0,11663240889513	0,11766584778476
	1,00	7,34	0,03681841852915	0,03812328834133
	1,02	7,45	0,00738232725972	0,00563250382702
	1,03	7,56	0,00140489838562	0,00030742568463
60	0,97	7,12	0,22711154073123	0,22720379566394
	1,00	7,22	0,12581817310359	0,12867323219096
	1,00	7,34	0,05224104494910	0,05477714965717
	1,02	7,45	0,01770478546070	0,01581733654321
	1,03	7,56	0,00587851654204	0,00287215259940
90	0,97	7,12	0,23137836550745	0,23267520260550
	1,00	7,22	0,13472117261886	0,13898857779652
	1,00	7,34	0,06468078932117	0,06784527941821
	1,02	7,45	0,02735599257122	0,02563837101399
	1,03	7,56	0,01151890310116	0,00720066497420

[22] U tablici su prikazani rezultati koji kao početnu vrijednost NGARCH varijance imaju procijenjenu bezuvjetnu vrijednost σ_0^2. No kao početne vrijednosti NGARCH varijance ispitane su i vrijednosti jednake bezuvjetnoj varijanci povećanoj za 15% odnosno za 20%. Grafove Black-Scholesove implicirane volatilnosti s obzirom na promijenjene početne vrijednosti varijance izostavljamo jer ne upućuju na nove spoznaje već samo na one logične, npr. Na to da model konstantne volatilnosti podcjenjuje opcije ako je početna vrijednost NGARCH varijance veća.

Dodatak 4.

Cijene opcija na stranu valutu dobivene uz GARCH model i Black-Scholesov model za vrednovanje opcija za različite datume dospijeća i izvršne cijene uz volatilnost $\sigma_0 = 0,036128$, spot-cijenu tečaja $C = 7,335$ i $\rho = 0$.

Dani do dospijeća τ	m	Izvršna cijena opcije	co^{GH}	co^{BS}
	0,97	7,12	0,22325783421416	0,22288483525001
	1,00	7,22	0,11790141075531	0,11766584778476
30	1,00	7,34	0,03725499961867	0,03812328834133
	1,02	7,45	0,00575698868902	0,00563250382702
	1,03	7,56	0,00054626948211	0,00030742568463
	0,97	7,12	0,22811189670277	0,22720379566394
	1,00	7,22	0,12880164404218	0,12867323219096
60	1,00	7,34	0,05376611877815	0,05477714965717
	1,02	7,45	0,01565558552787	0,01581733654321
	1,03	7,56	0,00345550578795	0,00287215259940
	0,97	7,12	0,23329522296873	0,23267520260550
	1,00	7,22	0,13885967166104	0,13898857779652
90	1,00	7,34	0,06687554640161	0,06784527941821
	1,02	7,45	0,02507359991214	0,02563837101399
	1,03	7,56	0,00752584342935	0,00720066497420

LITERATURA

Bernstein, P., 1992. *Capital Ideas: The Improbable Origins of Modern Wall Street.* New York: Free Press.

Black, F. and Scholes, M., 1973. "The Pricing of Options and Corporate Liabilities". *Journal of Political Economy*, 81 (3), 637-654.

Bollerslev, T., 1986. "A generalized autoregressive conditional heteroscedasticity". *Journal of Econometrics*, 31, 307-327.

Bollerslev, T., Chou, R. and Kroner, K., 1992. "ARCH Modeling in Finance: A review of the Theory and Empirical Evidence". *Journal of Econometrics*, 52 (1-2), 5-59.

Campbell, J. Y., Lo, A. W. and MacKinlay, A. C., 1997. *The Econometrics of Financial Markets*. Princeton, New Jersey: Princeton University Press.

Christie, A. A., 1982. "The Stochastic Behaviour of Common Stock Variances: Value, Leverage and Interest Rate Effects". *Journal of Financial Economics*, 10 (4), 407-432.

Christoffersen, P. F., 2003. *Elements of Financial Risk Management.* San Diego: Academic Press.

Cont, R. and da Fonseca, J., 2002. "Dynamics of Implied Volatility Surfaces". *Quantitative Finance*, 2 (1), 45-60.

Cooper, I. [et al.], 1986. *Option Hedging*. Mimeo. London: London Business School.

Ding, Z., Granger, C. W. J. and Engle, R. F., 1993. "A Long Memory Property of Stock Market Returns and a New Model". *Journal of Empirical Finance*, 1 (1), 83-106.

Duan, J.-C., 1995. "The GARCH Option Pricing Model". *Mathematical Finance*, 5 (1), 13-32.

Duan, J.-C., 1997. "Augmented GARCH (*p, q*) Process and its Diffusion Limit". *Journal of Econometrics*, 79 (1), 97-127.

Duan, J.-C., 1999. "Pricing Foreign Currency and Cross-Currency Options Under GARCH". *The Journal of Derivatives*, 7 (1), 51-63.

Engle, R. F., 1982. "Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflation". *Econometrica*, 50 (4), 987-1007.

Engle, R. F., 1995. *ARCH: Selected Readings*. Oxford: Oxford University Press.

Engle, R. F. and Ng, V. K., 1993. "Measuring and testing the impact of news on volatility". *Journal of Finance*, 48, 1749-1778.

Fama, E., 1965. "The behavior of stock market prices". *Journal of Business*, 38 (1), 34-105.

Geske, R., 1979. "The Valuation of Compound Options". *Journal of Financial Economics*, 3 (7), 125-144.

Glosten, L., Jagannathan, R. and Runkle, D., 1993. "On the Relation between the Expected Value and the Volatility of the Nominal Excess Return on Stocks". *Journal of Finance*, 48 (5), 1779-1801.

Hentschel, L., 1995. "All in the Family: Nesting Symmetric and Asymmetric GARCH Models". *Journal of Financial Economics*, 39 (1), 71-104.

Hull, J. and White, A., 1987. "The Pricing of Options on Assets with Stochastic Volatilities". *Journal of Finance*, 42 (2), 281-300.

Johnson, H. and Shanno, D., 1987. "Option Pricing When the Vaiance is Changing". *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 22, 143-151.

Mandelbrot, B., 1963. "The variation of certain speculative prices". *Journal of Business*, 36 (4), 394-419.

Merton, R., 1973. "The Theory of Rational Option Pricing". *Bell Journal of Economics and Management Science*, 4 (1), 141-183.

Merton, R., 1976. "Option Pricing When Underlying Stock Returns are Discontinuous". *Journal of Financial Economics*, 4, 141-183.

Nelson, D., 1991. "Conditional Heteroskedasticity in Asset Returns: A New Approach". *Econometrica*, 59 (2), 347-370.

Rebonato, R., 1999. *Volatility and Correlation in the pricing of Equity, FX and Interest Rate Options.* Chichester: Wiley.

Rubinstein, M., 1983. "Displaced Diffusion Option Pricing". *Journal of Finance*, 38 (1), 213-217.

Rubinstein, M., 1985. "Nonparametric Tests of Alternative Option Pricing Models Using all Reported Trades and Quotes on the 30 Most Active CBOE Option Classes from August 23, 1976 through August 31, 1978". *Journal of Finance*, 40 (2), 455-480.

Scott, L., 1987. "Option Pricing When the Variance Changes Randomly: Theory, Estimation and an Application". *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 22 (4), 419-438.

Shastri, K. and Wethyavivorn, K., 1987. "The Valuation of Currency Options for Alternate Stochastic Processes". *Journal of Financial Research*, 10, 283-293.

Shephard, N. 1996. "Statistical aspects of ARCH and stochastic volatility" in: D. R. Cox, D. V. Hinkley and O. E. Barndorff-Nielsen: *Time Series Models in Econometrics, Finance and Other Fields*. London: Chapman; Hall, 1-67.

Stein, E. and Stein, J., 1991. "Stock Price Distributions with Stochastic Volatility: An Analytic Approach". *Review of Fianncial Studies*, 4 (4), 727-752.

Šestović, D. i Latković, M., 1998. "Modeliranje volatilnosti vrijednosnica na Zagrebačkoj burzi". *Ekonomski pregled*, 49 (4-5), 292-303.

Taylor, S., 1986. *Modelling Financial Time Series.* New York: Wiley.

Taylor, S. J. and Xu, X., 1994. "The Magnitude of Implied Volatility Smiles: Theory and Empirical Evidence for Exchange Rates". *Review of Future Markets*, 13, 355-380.

Wiggins, J., 1987. "Option Values Under Stochastic Volatility: Theory and Empirical Estimates". *Journal of Financial Economics*, 19, 351-372.

Petra Posedel: Analysis of the Exchange Rate and Pricing Foreign Currency Options in the Croatian Market: The NGARCH Model as an Alternative to the Black-Scholes Model

Abstract

The interest of professional investors in financial derivatives on the Croatian market is steadily increasing and trading is expected to start after the establishment of the legal framework. The quantification of the fair price of such financial instruments is therefore becoming increasingly important. Once the derivative market is formed, the use of the Black-Scholes option pricing model can also be expected. However, contrary to the assumptions of the Black-Scholes model, research in the field of option markets worldwide suggests that the volatility of the time series returns is not constant over time. The present study analyzes the implications of volatility that changes over time for option pricing. The nonlinear-in-mean asymmetric GARCH model that reflects the asymmetry in the distribution of returns and the correlation between returns and variance is suggested. For the purpose of illustration, we use the NGARCH model for the pricing of foreign currency options. Possible prices for such options having different strikes and maturities are then determined using Monte Carlo simulations. The improvement provided by the NGARCH model is that the option price is a function of the risk premium embedded in the underlying asset. This contrasts with the standard preference-free option pricing result that is obtained in the Black-Scholes model.

Key words: Black-Scholes model, NGARCH model, heteroskedasticity, volatility, risk premium, risk-neutral measure, no arbitrage, Monte Carlo simulations