

## Primjena Cauchy-Schwarz-Buniakowskyjeve nejednakosti na rješavanje algebarskih jednadžbi i sustava jednadžbi

ILIJA ILIŠEVIĆ\*

**Sažetak.** *Razmatra se primjena Cauchy-Schwarz-Buniakowskyjeve nejednakosti na rješavanje algebarskih jednadžbi i sustava jednadžbi, koje su ilustrirane na nizu zanimljivih zadataka prilagođenih učenicima srednjih škola.*

**Ključne riječi:** *nejednakosti Cauchy-Schwarz-Buniakowskyjeve, jednadžbe, sustavi jednadžbi*

### Application of Cauchy-Schwarz-Buniakowsky inequality on solving equations and system of equations

**Abstract.** *Applications of Cauchy-Schwarz-Buniakowsky inequality on solving equations and system of equations are considered. These applications are illustrated on a number of interesting tasks adapted for high school students.*

**Key words:** *Cauchy-Schwarz-Buniakowsky inequality, equations, system of equations*

Nejednakost o kojoj će biti riječi zove se Cauchyjeva<sup>1</sup> ili Cauchy-Schwarzova<sup>2</sup> ili Cauchy-Buniakowskyjeva ili Cauchy-Schwarz-Buniakowskyjeva nejednakost<sup>3</sup>. Usvojit ćemo posljednji naziv (kraće: CSB-nejednakost). Izreći ćemo ovu nejednakost, dokazati je i primijeniti je na rješavanje algebarskih jednadžbi i sustava jednadžbi.

**Teorem 1 [CSB-nejednakost].** *Neka su  $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  i  $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$  dvije  $n$ -torke realnih brojeva. Tada vrijedi*

$$\left( \sum_{k=1}^n a_k b_k \right)^2 \leq \left( \sum_{k=1}^n a_k^2 \right) \left( \sum_{k=1}^n b_k^2 \right). \quad (1)$$

\*III. gimnazija, Kamila Firingera 14, HR-31000 Osijek

<sup>1</sup>A. L. Cauchy (1789.–1857.), francuski matematičar

<sup>2</sup>H. A. Schwarz (1843.–1921.), njemački matematičar

<sup>3</sup>V. J. Buniakowsky (1804.–1869.), ukrajinski matematičar

Pri tome jednakost u (1) vrijedi ako i samo ako su  $n$ -torke razmjerne, tj. ako i samo ako postoji realan broj  $m$  takav da je

$$b_k = ma_k, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

**Dokaz.** Promotrimo kvadratnu funkciju  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definiranu formulom

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=1}^n (a_k x + b_k)^2 \\ &= (a_1 x + b_1)^2 + (a_2 x + b_2)^2 + \dots + (a_n x + b_n)^2 \\ &= (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)x^2 + 2(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n)x + (b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) \\ &= \left( \sum_{k=1}^n a_k^2 \right) x^2 + 2 \left( \sum_{k=1}^n a_k b_k \right) x + \left( \sum_{k=1}^n b_k^2 \right). \end{aligned} \quad (2)$$

Kako je ova funkcija nenegativna ( $f(x) \geq 0$  za svaki  $x \in \mathbb{R}$ ), njezina diskriminanta  $D$  ne može biti pozitivna, tj.

$$D = 4 \left( \sum_{k=1}^n a_k b_k \right)^2 - 4 \left( \sum_{k=1}^n a_k^2 \right) \left( \sum_{k=1}^n b_k^2 \right) \leq 0,$$

odakle slijedi tražena nejednakost (1).

Iz (2) zaključujemo da jednakost u (1) vrijedi ako i samo ako postoji realan broj  $m$  takav da je  $b_k = ma_k$  za svaki  $k = 1, 2, \dots, n$ , tj. ako i samo ako su  $n$ -torke  $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  i  $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$  razmjerne.  $\square$

Riješimo sada nekoliko zadataka.

**Zadatak 1.** Odredite realne brojeve  $x_1, x_2, x_3$  za koje vrijedi

$$\left( \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{6}x_3 \right)^2 = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{3}x_2^2 + \frac{1}{6}x_3^2.$$

*Rješenje.* Prema CSB-nejednakosti je

$$\begin{aligned} \left( \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{6}x_3 \right)^2 &= \left( \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}}x_1 + \sqrt{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt{\frac{1}{3}}x_2 + \sqrt{\frac{1}{6}} \cdot \sqrt{\frac{1}{6}}x_3 \right)^2 \\ &= \left( \left( \sqrt{\frac{1}{2}} \right)^2 + \left( \sqrt{\frac{1}{3}} \right)^2 + \left( \sqrt{\frac{1}{6}} \right)^2 \right) \cdot \left( \left( \sqrt{\frac{1}{2}}x_1 \right)^2 + \left( \sqrt{\frac{1}{3}}x_2 \right)^2 + \left( \sqrt{\frac{1}{6}}x_3 \right)^2 \right) \\ &= \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \right) \left( \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{3}x_2^2 + \frac{1}{6}x_3^2 \right) \\ &= \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{3}x_2^2 + \frac{1}{6}x_3^2. \end{aligned}$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako je

$$\frac{\sqrt{\frac{1}{2}x_1}}{\sqrt{\frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt{\frac{1}{2}x_2}}{\sqrt{\frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt{\frac{1}{2}x_3}}{\sqrt{\frac{1}{2}}},$$

odnosno  $x_1 = x_2 = x_3$ .

**Zadatak 2.** *Riješite jednadžbu*

$$\sqrt{x-1} + \sqrt{9-x} = x^2 - 10x + 29, \quad x \in \mathbb{R}.$$

*Rješenje.* Da bi jednadžba imala smisla, mora biti  $x-1 \geq 0$  i  $9-x \geq 0$ , tj.  $x \in [1, 9]$ . Prema CSB-nejednakosti je

$$\begin{aligned} \sqrt{x-1} + \sqrt{9-x} &= 1 \cdot \sqrt{x-1} + 1 \cdot \sqrt{9-x} \\ &\leq \sqrt{1^2 + 1^2} \cdot \sqrt{(\sqrt{x-1})^2 + (\sqrt{9-x})^2} \\ &= \sqrt{2} \cdot \sqrt{x-1 + 9-x} = \sqrt{16} = 4. \end{aligned}$$

S druge strane je  $x^2 - 10x + 29 = (x-5)^2 + 4 \geq 4$ . Dakle, vrijedi  $\sqrt{x-1} + \sqrt{9-x} = 4$  i  $(x-5)^2 + 4 = 4$ . Iz druge jednadžbe ovog sustava dobivamo  $x = 5$ , a ta vrijednost zadovoljava i prvu jednadžbu sustava, pa je rješenje zadane jednadžbe.

**Zadatak 3.** *Odredite nenegativne realne brojeve  $x$  i  $y$  tako da vrijedi*

$$\sqrt{x(x+y)^3} + y\sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{2}(x^2+xy+y^2).$$

*Rješenje.* Očigledno je  $(x, y) = (0, 0)$  jedno rješenje ove jednadžbe. Dalje pretpostavimo  $x > 0$  i  $y > 0$ . Prema CSB-nejednakosti je

$$\begin{aligned} \sqrt{x(x+y)^3} + y\sqrt{x^2+y^2} &= (x+y) \cdot \sqrt{x^2+xy} + \sqrt{x^2+y^2} \cdot y \\ &\leq \sqrt{(x+y)^2 + (x^2+y^2)} \cdot \sqrt{(x^2+xy) + y^2} \\ &= \sqrt{2x^2 + 2xy + 2y^2} \cdot \sqrt{x^2+xy+y^2} = \sqrt{2}(x^2+xy+y^2). \end{aligned}$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako je

$$\begin{aligned} \frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}} &= \frac{\sqrt{x^2+xy}}{y} \iff y(x+y) = \sqrt{(x^2+y^2)(x^2+xy)} \\ \iff y^2(x+y)^2 &= x(x+y)(x^2+y^2) \iff (x+y)(y^2(x+y) - x(x^2+y^2)) = 0 \\ \iff (x+y)(y^3 - x^3) &= 0 \iff (x+y)(x-y)(x^2+xy+y^2) = 0. \end{aligned}$$

Kako je  $x^2 + xy + y^2 = \left(x + \frac{1}{2}y\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 > 0$ , to je  $x+y = 0$  ili  $x-y = 0$ , tj.  $x = -y$  ili  $x = y$ . No, kako  $x$  i  $y$  oba moraju biti pozitivni, to je  $x = y$ . Konačno,

$$(x, y) = (k, k), \quad k \in \mathbb{R}_0^+.$$

Uvrštavanjem u danu jednadžbu zaključujemo da je to zaista rješenje.

**Zadatak 4.** *Odredite realne brojeve  $a, b, c$  za koje vrijedi*

$$a^2b(a-b) + b^2c(b-c) + c^2a(c-a) = 0.$$

*Rješenje.* Označimo

$$x = -a + b + c, \quad y = a - b + c, \quad z = a + b - c.$$

Tada je

$$a = \frac{y+z}{2}, \quad b = \frac{z+x}{2}, \quad c = \frac{x+y}{2}$$

i dana jednadžba prelazi u

$$(y+z)^2(z+x)(y-x) + (z+x)^2(x+y)(z-y) + (x+y)^2(y+z)(x-z) = 0,$$

tj.

$$x^3z + y^3x + z^3y - x^2yz - y^2zx - z^2xy = 0. \quad (3)$$

Pretpostavimo li da je  $xyz \neq 0$ , dijeljenjem sa  $xyz$  dobivamo

$$\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{z} + \frac{z^2}{x} = x + y + z. \quad (4)$$

Prema CSB-nejednakosti je

$$\begin{aligned} (x+y+z)^2 &= \left( \frac{x}{\sqrt{y}} \cdot \sqrt{y} + \frac{y}{\sqrt{z}} \cdot \sqrt{z} + \frac{z}{\sqrt{x}} \cdot \sqrt{x} \right)^2 \\ &\leq \left( \frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{z} + \frac{z^2}{x} \right) (x+y+z). \end{aligned}$$

Zbog (4) ova nejednakost postaje jednakost. Jednakost vrijedi ako i samo ako je

$$\frac{x}{\sqrt{y}} = \frac{y}{\sqrt{z}} = \frac{z}{\sqrt{x}},$$

tj.  $\frac{x}{y} = \frac{y}{z} = \frac{z}{x}$ , odnosno  $x = y = z$ . Tada je  $a = b = c$ .

Ako je  $x = 0$ , tada (3) postaje  $z^3y = 0$ , pa je  $y = 0$  ili  $z = 0$ . U slučaju  $x = y = 0$  imamo  $a = b$  i  $c = 0$ , a u slučaju  $x = z = 0$  imamo  $a = c$  i  $b = 0$ .

Ako je  $y = 0$  ili  $z = 0$ , zaključujemo analogno.

Dakle,

$$(a, b, c) \in \{(k, k, k), (k, k, 0), (k, 0, k), (0, k, k) : k \in \mathbb{R}\}.$$

**Zadatak 5.** *Riješite sustav jednadžbi*

$$\begin{aligned} 2x + 3y + 6z &= 49 \\ x^2 + y^2 + z^2 &= 49. \end{aligned}$$

*Rješenje.* Prema CSB–nejednakosti je

$$(2x + 3y + 6z)^2 \leq (2^2 + 3^2 + 6^2)(x^2 + y^2 + z^2),$$

tj.

$$(2x + 3y + 6z)^2 \leq 49(x^2 + y^2 + z^2),$$

odnosno

$$49^2 \leq 49 \cdot 49;$$

dakle,

$$49 = 49.$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako je

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{6} = k, \quad k \in \mathbb{R},$$

tj.  $x = 2k$ ,  $y = 3k$ ,  $z = 6k$ ,  $k \in \mathbb{R}$ . Tada iz  $2x + 3y + 6z = 49$  slijedi  $4k + 9k + 36k = 49$ , pa je  $k = 1$ . Stoga je  $x = 2$ ,  $y = 3$ ,  $z = 6$ . Dakle, uređena trojka  $(2, 3, 6)$  je rješenje danog sustava.

**Zadatak 6.** *Odredite pozitivne realne brojeve  $x, y, z$  za koje vrijedi*

$$\begin{aligned} x + y + z &= 3, \\ \sqrt{x+3} + \sqrt{y+3} + \sqrt{z+3} &= 6. \end{aligned}$$

*Rješenje.* Prema CSB–nejednakosti je

$$\begin{aligned} \sqrt{x+3} + \sqrt{y+3} + \sqrt{z+3} &\leq \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} \cdot \sqrt{x+3 + y+3 + z+3} \\ &= \sqrt{3} \cdot \sqrt{x+y+z+9} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{3+9} = 6. \end{aligned}$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako je

$$\frac{\sqrt{x+3}}{1} = \frac{\sqrt{y+3}}{1} = \frac{\sqrt{z+3}}{1},$$

tj.  $x = y = z$ . Tada iz prve jednadžbe sustava dobivamo  $x = y = z = 1$ .

**Zadatak 7.** *Odredite realne brojeve  $a, b, c$  tako da vrijedi*

$$\begin{aligned} a + b + c &= 6, \\ a^2 + b^2 + c^2 &= 12. \end{aligned}$$

*Rješenje.* Prema CSB–nejednakosti je

$$\begin{aligned} 6^2 &= (a \cdot 1 + b \cdot 1 + c \cdot 1)^2 \\ &\leq (a^2 + b^2 + c^2)(1^2 + 1^2 + 1^2) = 3(a^2 + b^2 + c^2). \end{aligned}$$

Dakle,  $a^2 + b^2 + c^2 \geq 12$ . Jednakost vrijedi ako i samo ako je  $\frac{a}{1} = \frac{b}{1} = \frac{c}{1}$ , tj. za  $a = b = c = 2$ .

**Zadatak 8.** *Odredite pozitivne realne brojeve  $x, y, z$  tako da vrijedi*

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 + z^2 &= 1, \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} &= \sqrt[4]{27}.\end{aligned}$$

*Rješenje.* Prema CSB–nejednakosti je

$$\begin{aligned}1 \cdot 3 &= (x^2 + y^2 + z^2)(1^2 + 1^2 + 1^2) \geq (x \cdot 1 + y \cdot 1 + z \cdot 1)^2 \\ &= (x + y + z)^2 \iff x + y + z \leq \sqrt{3}.\end{aligned}$$

Dalje, opet prema CSB–nejednakosti, imamo

$$\begin{aligned}3\sqrt{3} &\geq 3(x + y + z) = ((\sqrt{x})^2 + (\sqrt{y})^2 + (\sqrt{z})^2) \cdot (1^2 + 1^2 + 1^2) \\ &\geq (\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z})^2,\end{aligned}$$

tj.

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} \leq \sqrt{3\sqrt{3}} = \sqrt[4]{3^3}.$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako je  $\frac{\sqrt{x}}{1} = \frac{\sqrt{y}}{1} = \frac{\sqrt{z}}{1}$ , tj.  $x = y = z$ . Tada iz  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  slijedi  $x = y = z = \frac{\sqrt{3}}{3}$ .

**Zadatak 9.** *Odredite nenegativne realne brojeve  $x, y, z$  tako da vrijedi*

$$\begin{aligned}x + y + z &= 1, \\ x\sqrt{y} + y\sqrt{z} + z\sqrt{x} &= \frac{\sqrt{3}}{3}.\end{aligned}$$

*Rješenje.* Prema CSB–nejednakosti je

$$\begin{aligned}(x\sqrt{y} + y\sqrt{z} + z\sqrt{x})^2 &= (\sqrt{xy} \cdot \sqrt{x} + \sqrt{yz} \cdot \sqrt{y} + \sqrt{xz} \cdot \sqrt{z})^2 \\ &\leq ((\sqrt{xy})^2 + (\sqrt{yz})^2 + (\sqrt{xz})^2) \cdot ((\sqrt{x})^2 + (\sqrt{y})^2 + (\sqrt{z})^2) \\ &= (xy + yz + xz)(x + y + z) = xy + yz + xz.\end{aligned}$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako postoji realan broj  $m$  takav da je

$$\sqrt{xy} = m\sqrt{x}, \sqrt{yz} = m\sqrt{y}, \sqrt{xz} = m\sqrt{z},$$

odnosno  $x = y = z$ . Tada iz prve jednadžbe sustava slijedi  $3x = 1$ , tj.  $x = \frac{1}{3}$ . Dakle,

$$(x, y, z) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right).$$

**Zadatak 10.** *Odredite pozitivne realne brojeve  $x, y, z$  tako da vrijedi*

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 + z^2 &= 1, \\x^2yz + xy^2z + xyz^2 &= \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

*Rješenje.* Prema CSB–nejednakosti je

$$\begin{aligned}(x^2yz + xy^2z + xyz^2)^2 &= (x \cdot xyz + y \cdot xyz + z \cdot xyz)^2 \\&\leq (x^2 + y^2 + z^2)(x^2y^2z^2 + x^2y^2z^2 + x^2y^2z^2),\end{aligned}$$

odnosno

$$\frac{1}{3\sqrt{3}} \leq xyz.$$

Iz druge jednadžbe sustava, primjenom aritmetičko-geometrijske nejednakosti, dobivamo

$$\frac{1}{3} = xyz(x + y + z) \geq xyz \cdot 3\sqrt[3]{xyz} = 3 \cdot \sqrt[3]{(xyz)^4},$$

odakle slijedi

$$xyz \leq \frac{1}{3\sqrt{3}}.$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako je  $x = y = z$ . Tada iz prve jednadžbe sustava dobivamo  $x^2 + x^2 + x^2 = 1$ , odakle je  $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ . Rješenje danog sustava je

$$(x, y, z) = \left( \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3} \right).$$

**Zadatak 11.** *Odredite pozitivne realne brojeve  $x, y, z$  tako da vrijedi*

$$\begin{aligned}xyz &= 1, \\x(y^3 - 1) + y(z^3 - 1) + z(x^3 - 1) &= 0.\end{aligned}$$

*Rješenje.* Iz druge jednadžbe dobivamo

$$xy^3 + yz^3 + zx^3 = x + y + z.$$

Kako  $x, y, z = 0$  nisu rješenja danog sustava, to možemo jednadžbu podijeliti sa  $xyz$ , pa dobivamo

$$\begin{aligned}\frac{y^2}{z} + \frac{z^2}{x} + \frac{x^2}{y} &= \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} + \frac{1}{xy}, \\ \frac{y^2}{z} + \frac{z^2}{x} + \frac{x^2}{y} &= \frac{x}{xyz} + \frac{y}{xyz} + \frac{z}{xyz}, \\ \frac{y^2}{z} + \frac{z^2}{x} + \frac{x^2}{y} &= x + y + z.\end{aligned}$$

Neka je  $m = \frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{z} + \frac{z^2}{x}$ ,  $m \in \mathbb{R}^+$ . Tada je prema CSB–nejednakosti

$$\begin{aligned} m(x+y+z) &= \left( \frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{z} + \frac{z^2}{x} \right) (x+y+z) \\ &= \left( \left( \frac{x}{\sqrt{y}} \right)^2 + \left( \frac{y}{\sqrt{z}} \right)^2 + \left( \frac{z}{\sqrt{x}} \right)^2 \right) \cdot ((\sqrt{x})^2 + (\sqrt{y})^2 + (\sqrt{z})^2) \\ &\geq \left( \frac{x}{\sqrt{y}} \cdot \sqrt{y} + \frac{y}{\sqrt{z}} \cdot \sqrt{z} + \frac{z}{\sqrt{x}} \cdot \sqrt{x} \right)^2 = (x+y+z)^2, \end{aligned}$$

odnosno  $m \geq x+y+z$ . Jednakost vrijedi ako i samo ako je

$$\frac{\frac{x}{\sqrt{y}}}{\sqrt{y}} = \frac{\frac{y}{\sqrt{z}}}{\sqrt{z}} = \frac{\frac{z}{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}},$$

tj.  $\frac{x}{y} = \frac{y}{z} = \frac{z}{x}$  odnosno  $x = y = z$ . Sada iz prve jednadžbe sustava zaključujemo

$$x = y = z = 1.$$

**Zadatak 12.** *Odredite realne brojeve  $x, y, z$  tako da vrijedi*

$$\begin{aligned} 3(x^2 + y^2 + z^2) &= 1, \\ x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 &= xyz(x+y+z)^3. \end{aligned}$$

*Rješenje.* Kako je  $x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 \geq 0$ , iz druge jednadžbe sustava slijedi i  $xyz(x+y+z)^3 \geq 0$ .

Ako je  $xyz(x+y+z) = 0$ , onda iz druge jednadžbe sustava slijedi  $xy = yz = zx = 0$ , pa je  $x = y = 0$  ili  $y = z = 0$  ili  $z = x = 0$ . Ako je  $x = y = 0$ , onda iz prve jednadžbe sustava dobivamo  $z = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$ . Analogno iz  $y = z = 0$  dobivamo  $x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$ , a iz  $z = x = 0$  dobivamo  $y = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$ .

Neka je  $xyz(x+y+z) > 0$ . Prema CSB–nejednakosti je

$$\begin{aligned} (xy + yz + zx)^2 &= (1 \cdot xy + 1 \cdot yz + 1 \cdot zx)^2 \\ &\leq (1^2 + 1^2 + 1^2)(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2), \end{aligned}$$

što je ekvivalentno sa

$$xyz(x+y+z) \leq x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2,$$

a zbog druge jednadžbe sustava je

$$xyz(x+y+z) \leq xyz(x+y+z)^3.$$

Posljednju nejednakost možemo podijeliti sa  $xyz(x+y+z)$ , pa dobivamo

$$1 \leq (x+y+z)^2 \leq 3(x^2 + y^2 + z^2) = 1.$$

Tada je  $(x + y + z)^2 = 3(x^2 + y^2 + z^2)$ , što je ekvivalentno sa  $(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 = 0$ , odakle je  $x = y = z$ . Tada iz prve jednadžbe sustava dobivamo  $x = y = z = \pm \frac{1}{3}$ . Dakle,

$$(x, y, z) \in \left\{ \left( \frac{\sqrt{3}}{3}, 0, 0 \right), \left( -\frac{\sqrt{3}}{3}, 0, 0 \right), \left( 0, \frac{\sqrt{3}}{3}, 0 \right), \left( 0, -\frac{\sqrt{3}}{3}, 0 \right), \right. \\ \left. \left( 0, 0, \frac{\sqrt{3}}{3} \right), \left( 0, 0, -\frac{\sqrt{3}}{3} \right), \left( \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right), \left( -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3} \right) \right\}.$$

**Zadatak 13.** *Odredite realna rješenja sustava jednadžbi*

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^2} + \frac{4}{y^2} + \frac{9}{z^2} &= 4, \\ x^2 + y^2 + z^2 &= 9, \\ xyz &= \frac{9}{2}. \end{aligned}$$

*Rješenje.* Ako je  $(x, y, z)$  rješenje sustava, onda je to i  $(x, -y, -z)$ ,  $(-x, y, -z)$ ,  $(-x, -y, z)$ . Neka je  $x, y, z > 0$ . Prema CSB–nejednakosti je

$$\begin{aligned} 36 &= (x^2 + y^2 + z^2) \left( \frac{1}{x^2} + \frac{4}{y^2} + \frac{9}{z^2} \right) \\ &\geq \left( x \cdot \frac{1}{x} + y \cdot \frac{2}{y} + z \cdot \frac{3}{z} \right)^2 = (1 + 2 + 3)^2 = 36. \end{aligned}$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako je

$$\frac{x}{\frac{1}{x}} = \frac{y}{\frac{2}{y}} = \frac{z}{\frac{3}{z}} = k, \quad k \in \mathbb{R}^+,$$

tj.  $x^2 = \frac{y^2}{2} = \frac{z^2}{3} = k$ , odnosno  $x^2 = k$ ,  $y^2 = 2k$ ,  $z^2 = 3k$ . Iz druge jednadžbe sustava tada dobivamo  $6k = 9$  tj.  $k = \frac{3}{2}$ . Tada je  $x = \sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$ ,  $y = \sqrt{3}$ ,  $z = \sqrt{\frac{9}{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ .

**Zadatak 14.** *Neka su  $a_1 < a_2 < a_3 < a_4$  dani pozitivni brojevi. Odredite sve realne vrijednosti parametra  $c$  za koje sustav jednadžbi*

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 1, \\ a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_4 &= c, \\ a_1^2 x_1 + a_2^2 x_2 + a_3^2 x_3 + a_4^2 x_4 &= c^2 \end{aligned}$$

*ima rješenje  $(x_1, x_2, x_3, x_4)$ , gdje je  $x_i \in \mathbb{R}_0^+$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ .*

*Rješenje.* Prema CSB–nejednakosti je

$$\begin{aligned} c^2 &= (a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4)^2 \\ &= (a_1\sqrt{x_1} \cdot \sqrt{x_1} + a_2\sqrt{x_2} \cdot \sqrt{x_2} + a_3\sqrt{x_3} \cdot \sqrt{x_3} + a_4\sqrt{x_4} \cdot \sqrt{x_4})^2 \\ &\leq (a_1^2x_1 + a_2^2x_2 + a_3^2x_3 + a_4^2x_4)(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) \\ &= a_1^2x_1 + a_2^2x_2 + a_3^2x_3 + a_4^2x_4. \end{aligned}$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako postoji realan broj  $m$  takav da je

$$a_1\sqrt{x_1} = m\sqrt{x_1}, a_2\sqrt{x_2} = m\sqrt{x_2}, a_3\sqrt{x_3} = m\sqrt{x_3}, a_4\sqrt{x_4} = m\sqrt{x_4}.$$

Međutim,  $a_1, a_2, a_3, a_4$  su svi različiti, pa tri od  $x_i$  moraju biti jednaki nula. Tada iz prve jednadžbe sustava slijedi da je preostali  $x_i$  jednak 1 i tada druga jednadžba povlači da je  $c$  jednak odgovarajućem  $a_i$ .

Zaključimo: dani sustav ima traženo svojstvo ako i samo ako je  $c$  jednak jednom od četiri broja  $a_1, a_2, a_3, a_4$ .

## Literatura

- [1] Š. ARSLANAGIĆ, I. GLOGIĆ, *Zbirka riješenih zadataka sa takmičenja iz matematike učenika srednjih škola u Federaciji Bosne i Hercegovine (1995.–2008.)*, Grafičar promet, Sarajevo, 2009.
- [2] D. O. SHKLARSKY, N. N. CHENTZOV, I. M. YAGLOM, *The USSR Olympiad problem book – selected problems and theorems of elementary mathematics*, Dover Publications Inc., New York, 1993.
- [3] I. ILIŠEVIĆ, *Primjena Cauchy–Schwarz–Buniakowskyjeve nejednakosti u geometriji*, Osječki matematički list **5**(2005), br. 2, 77–84.
- [4] M. E. KUCZMA, *144 Problems of the Austrian–Polish Mathematics Competition 1978–1993*, The Academic Distribution Center, Freeland, USA