

Jedan dokaz iracionalnosti broja e^p

NENAD STOJANOVIĆ*

ZORAN MITROVIĆ†

Sažetak. U prvom dijelu rada izloženi su osnovni pojmovi i tvrdnje koji su vezani uz algebarske i transcendentne brojeve s kratkim povijesnim osvrtom te je pokazano nekoliko osnovnih tvrdnji koji se odnose na iracionalnost i transcendentnost broja e . U drugom dijelu rada motivirani dokazom W. Ramasinghe, koji je dao jednostavan dokaz iracionalnosti broja e^2 , dajemo dokaz iracionalnosti broja e^p za bilo koji prost broj p .

Ključne riječi: iracionalnost broja e , broj e , transcendentni brojevi

One proof of e^p irrationality

Sažetak. The first part presents the basic concepts and attitudes related to algebraic and transcendental numbers, with a brief historical review, and it was shown that several basic principles regarding the irrationality and transcendence of e . The second part motivated by evidence Ramasinghe W., who gave a simple proof of the irrationality of e^2 , we give a proof of irrationality of e^p for any prime number p .

Key words: irrationality of numbers e , number e , transcendental numbers

1. Uvod

Rješavanje problema vezanih uz transcendentnost broja dalo je značajan doprinos razvoju matematike. Dokaz o postojanju transcendentnih brojeva dao je francuski matematičar *Joseph Liouville* 1851. godine, dok je *David Hilbert* 1900. godine na II. međunarodnom kongresu matematičara izložio problem vezan uz iracionalnost i transcendentnost brojeva, poznat kao problem VII., a formulirao ga je na sljedeći način:

Pokazati da je α^β transcendentan ili u krajnjoj mjeri iracionalan broj ako je α algebarski, a β iracionalan broj ([2]).

*Visoka Škola poslovnog menadžmenta, Primus, Dositejeva bb, 78 400 Gradiška, Bosna i Hercegovina nsnest1@gmail.com

†Faculty of Electrical Engineering, University of Banja Luka, Patre 5, 78 000 Banja Luka, Bosna i Hercegovina zmitrovic@etfbl.net

Postavku tog problema uveo je 1748. godine *Leonhard Paul Euler* u svom djelu *Introductio in Analysin infinitorum (Uvod u analizu beskonačnih veličina)* i utvrdio da za racionalnu bazu a logaritam svakog racionalnog broja b nije racionalan broj stupnja a , odnosno nije algebarski broj. Djelimičan dokaz ovog problema dao je *Alexander Osipovich Gelfond* najprije 1929. godine dokazavši da, ako je α algebarski broj tada je $i \alpha^{\sqrt{p}}$, gdje $\alpha \neq \{0, 1\}$, a p pozitivan racionalan broj koji nije potpun kvadrat, transcendentan broj, a zatim 1934. godine je dopunio dokaz pokazujući transcendentnost svake takve klase brojeva. *Theodor Schneider* je 1934. dao novi dokaz rezultata koje je dobio Gelfond. Veliki uspjeh u teoriji transcendentnih brojeva dao je i *A. B. Shidlovski*, kada je VII. Hilbertov problem već bio riješen (vidi [3]).

2. Algebarski i transcendentni brojevi

Realne brojeve dijelimo na racionalne i iracionalne. Suprotno racionalnim brojevima čiji je skup zatvoren u odnosu na operacije zbrajanja, oduzimanja, množenja i dijeljenja (isključujući dijeljenja s nulom) skup iracionalnih brojeva ne sadrži niti jedno od navedenih svojstava. Odnosno vrijedi sljedeći teorem:

Teorem 1. ([7]) *Neka je α proizvoljan iracionalan broj i r bilo koji racionalan broj različit od nule. Tada zbrajanje, oduzimanje, množenje i dijeljenje primijenjeno na brojeve α i r daje iracionalan broj. Osim toga brojevi $-\alpha$ i α^{-1} su također iracionalni brojevi.*

Teorem pokazuje da se može konstruirati široka klasa iracionalnih brojeva iz jednog danog iracionalnog broja. Primjerice od iracionalnog broja $\sqrt{2}$ primjenom teorema možemo konstruirati brojeve $-\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2} + 3, \dots, 3 - \sqrt{2}, -2\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{5}, \frac{3}{\sqrt{2}}$ koji su također iracionalni. Dakle, možemo konstruirati beskonačno mnogo iracionalnih brojeva. Osim podjele realnih brojeva na racionalne i iracionalne postoji i podjela na algebarske i transcendentne brojeve. Ako realan broj zadovoljava jednadžbu oblika

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$$

gdje su $a_i \in \mathbb{Z}$, $i \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$, kažemo da je algebarski, a realan broj koji ne zadovoljava ni jednu jednadžbu takvog oblika nazivamo transcendentnim.

Lako se pokaže da je svaki racionalan broj algebarski. Primjerice, racionalan broj $\frac{3}{4}$ zadovoljava jednadžbu $4x - 3 = 0$. Generalno svaki racionalan broj $\frac{b}{a}$ zadovoljava jednadžbu oblika $ax - b = 0$ samim tim je algebarski broj. Kako je svaki racionalan broj ujedno i algebarski broj, tako svaki realan broj, koji nije algebarski, jeste iracionalan, odnosno: svaki transcendentan broj je iracionalan.

J. Liouvilleu pripada zasluga za dokaz (1844. godine) egzistencije transcendentnih brojeva, kao i za prvi decimalni prikaz takvog broja, tzv. *Liouvilleova konstanta* (1851. godine), dok *Euleru* pripada zasluga za definiranje transcendentnih brojeva u današnjem smislu, a sam naziv "transcendentan" dolazi od *Leibniza* koji je 1682. godine dokazao da $\sin x$ nije algebarska funkcija po varijabli x . Prvi broj za kojeg je dokazana transcendentnost je broj e (1873. godine), a zasluga pripada *Charlesu Hermiteu*, dok je *Georg Cantor* 1874. godine pokazao da je skup transcendentnih brojeva gust skup (vidi [7])

Značajno je spomenuti *Gelfond-Schneiderov* teorem (vidi [3]) kojim je dokazano da ako su α i β algebarski brojevi različiti od nule i jedinice, tada je broj $\frac{\ln \alpha}{\ln \beta}$ ili racionalan ili transcendentan.

Posljedica tog teorema je tvrdnja da ako je α algebarski broj ($\alpha \neq \{0, 1\}$), a β iracionalan algebarski broj, tada je $\alpha^\beta = e^{\beta \log \alpha}$ transcendentan broj. Brojevi $\log 2$, π itd. su primjeri transcendentnih brojeva. Transcendentnost broja $2^{\sqrt{2}}$, kojeg nazivamo Gelfond-Schneiderova konstanta, (čija je vrijednost $2^{\sqrt{2}} = 2.6651441426902251\dots$) i $\log 2$ je dokazana 1934. godine (vidi [7]).

Iz Gelfond-Schneiderovog teorema slijedi tvrdnja da su svi brojevi oblika $\log r$ gdje je r racionalan broj, ili transcendentni ili racionalni brojevi. U tom smislu je $\log r$ transcendentan za sve pozitivne racionalne brojeve r isključujući sljedeće brojeve; $\dots, 10^{-3}, 10^{-2}, 10^{-1}, 10^0, 10^1, 10^2, 10^3, \dots$ jer za te vrijednosti r je $\log r$ cijeli broj. Na primjer svi brojevi $\log r$ gdje je r cijeli broj između 1 i 1000, isključujući $r = 1$, $r = 10$, $r = 100$ su transcendentni.

Pokažimo na primjer da je $\log 2$ transcendentan broj. Najprije pokažimo da je $\log 2$ iracionalan broj. Pretpostavimo suprotno, da je $\log 2 = \frac{a}{b}$ gdje su a, b pozitivni cijeli brojevi. Brojeve a, b možemo uzeti pozitivnim, ako je $\log 2$ pozitivan broj. Prema definiciji logaritma imamo da je $2 = 10^{\frac{a}{b}}$. Potenciramo li obje strane s b , dobivamo $2^b = 10^a = 2^a \cdot 5^a$.

Posljednja jednakost veže dva cijela pozitivna broja, pa možemo primijeniti osnovni teorem aritmetike o jedinstvenosti rastava cijelog broja na umnožak prostih faktora. U skladu s tim teoremom, jednakost $2^b = 2^a \cdot 5^a$ nije moguća, jer 2^b predstavlja cijeli broj koji ni za jednu vrijednost b nije djeljiv s 5, a istovremeno je broj $2^a \cdot 5^a$ djeljiv s 5 za bilo koji pozitivan cijeli broj b . Slijedi, broj $\log 2$ nije racionalan nego iracionalan broj. Neka je $\beta = \log 2, \alpha = 10$. U smislu definicije dekadskog logaritma je $10^{\log 2} = \alpha^\beta = 2$. Ako bi broj β bio algebarski i iracionalan, tada bi prema Gelfond-Schneiderovom teoremu broj 2 bio transcendentan. Ukoliko nije tako, tada je $\beta = \log 2$ ili racionalan ili transcendentan. Pokazali smo da je broj $\log 2$ iracionalan, dakle, on je transcendentan.

Primjer transcendentnog broja je *Liouvilleova* konstanta čiji je decimalni zapis

$$\alpha = \sum_{k=1}^{\infty} 10^{-k!} = 0,110001000000\dots \quad (1)$$

Ovaj transcendentan broj ima svojstvo, da su sve znamenke u decimalnom zapisu isključujući one čiji se broj izražava faktorijelom cijelog broja jednake nuli. Pokažimo da je *Liouvilleov* broj transcendentan.

Ideje dokaza zasniva se na tome da se broj $\alpha = \sum_{k=1}^{\infty} 10^{-k!}$ zamijeni racionalnim brojem β koji ga dobro predstavlja i pri tome razlika $(\alpha - \beta)$ između broja α i β je veoma mala u odnosu na broj β . Prodemonstrirajmo primjer racionalne ocjene broja α , tako da odaberemo konačan broj članova reda (1) iz definicije broja α . Neka je β suma prvih j članova reda (1) tada je

$$\beta = \sum_{i=1}^j 10^{-i!}. \quad (2)$$

Primijetimo da je broj β racionalan broj koji možemo prikazati kao sumu razlomaka

čiji su nazivnici potencije broja deset, $\beta = \frac{1}{10^{1t}} + \frac{1}{10^{2t}} + \dots + \frac{1}{10^{jt}}$.
Nakon svodenja na jednake nazivnike (10^{jt}) i sređivanja, dobivamo razlomak oblika

$$\beta = \frac{t}{10^{jt}} \quad (3)$$

gdje je $t \in \mathbb{Z}$, a čija vrijednost se lako odredi. Primijetimo da se broj β malo razlikuje od broja α . Ta razlika iznosi

$$\alpha - \beta = 10^{-(j+1)!} + 10^{-(j+2)!} + \dots \quad (4)$$

Dekadski rastav od $\alpha - \beta$ isto je kao i od broja α , sastoji se od nula i jedinica. Znamenka 1 se najprije javlja na $(j+1)!$ mjestu, zatim na $(j+2)!$, itd. Očito je broj $\alpha - \beta$ manji od broja 0.0000...0002, gdje su sve znamenke jednake nuli izuzev znamenke 2 koja se nalazi na $(j+1)!$ mjestu, što možemo zapisati u obliku nejednakosti

$$\alpha - \beta < \frac{2}{10^{(j+1)!}}$$

Na ovaj način smo pokazali lemu

Lema 1. *Neka je broj α definiran izrazom (1). Broj α se može aproksimirati proizvoljnim racionalnim brojem β sa po želji odabranom točnošću, tj. vrijedi $\alpha - \beta < \frac{2}{10^{(j+1)!}}$, gdje je j broj prvih članova desne strane izraza (1).*

Za dalji dokaz transcendentnosti broja α trebaju nam još neke nejednakosti između α i β . Ako su α i β pozitivni brojevi definirani izrazima (1) i (2) tada uzimajući u obzir da je $\alpha < 1$, $\beta < 1$ vrijede nejednakosti

$$0 < \alpha^p < 1, \quad 0 < \beta^s < 1, \quad 0 < \alpha^p \beta^s < 1, \quad \forall p, s \in \mathbb{N}. \quad (5)$$

Da bismo dokazali transcendentnost broja α polazimo od suprotne pretpostavke da je α algebarski broj i pokažimo neodrživost takve pretpostavke. Kada bi α bio algebarski broj tada bi on zadovoljavao neku algebarsku jednadžbu sa cijelim koeficijentima. Među svim algebarskim jednadžbama koje zadovoljava, odaberimo jednadžbu sa najmanjim stupnjem. Neka je to jednadžba

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0. \quad (6)$$

Neka je polinom

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \quad (7)$$

odgovarajući polinom. Pretpostavimo da za polinom $f(x)$ vrijede uvjeti:

1. $f(x)$ ima cjelobrojne koeficijente,
2. broj α je korijen jednadžbe $f(x) = 0$, tj. $f(\alpha) = 0$,
3. broj α nije korijen ni jedne jednadžbe sa cjelobrojnim koeficijentima stupnja manjeg od n .

Dokažimo sljedeći teorem kojim se pokazuje da veličina $|f(\alpha) - f(\beta)|$ ima isti predznak kao i $|\alpha - \beta|$.

Teorem 2. *Neka su α i β definirani s (1) i (2), a $f(x)$ oblika (7). Tada je odnos između koeficijenata polinoma $f(x)$ i njegovog stupnja iskazan nejednakošću*

$$|f(\alpha) - f(\beta)| < N(\alpha - \beta)$$

gdje je N suma koeficijenata navedenog polinoma.

Dokaz. Broj N definiramo jednakošću

$$N = n|a_n| + (n-1)|a_{n-1}| + (n-2)|a_{n-2}| + \dots + 2|a_2| + |a_1| \quad (8)$$

Primijetimo da broj N ne ovisi od broja j koji se pojavljuje u definiciji broja β u izrazu (2). U procesu dokazivanja koristimo formulu rastava $\alpha^k - \beta^k$ na faktore i nejednakost koju ta razlika zadovoljava. Kako je

$$\alpha^k - \beta^k = (\alpha - \beta)(\alpha^{k-1} + \alpha^{k-2}\beta + \alpha^{k-3}\beta^2 + \dots + \alpha^2\beta^{k-3} + \alpha\beta^{k-2} + \beta^{k-1}) \quad (9)$$

gdje je $k \in \mathbb{N}$.

Iz ove jednakosti, u skladu s nejednakostima (5), svaki član desne strane rastava (9) je manji od 1. Slijedi, ukoliko tih članova ima k , i $\alpha - \beta > 0$, vrijedi nejednakost

$$\alpha^k - \beta^k < (\alpha - \beta)(1 + 1 + 1 + \dots + 1 + 1 + 1) = k(\alpha - \beta). \quad (10)$$

Obzirom na rastav (9) imamo da je

$$\begin{aligned} f(\alpha) - f(\beta) &= a_n(\alpha^n - \beta^n) + a_{n-1}(\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}) + \dots \\ &\quad \dots + a_2(\alpha^2 - \beta^2) + a_1(\alpha - \beta) \\ &= (\alpha - \beta)[a_n(\alpha^{n-1} + \alpha^{n-2}\beta + \dots \\ &\quad + \alpha\beta^{n-2} + \beta^{n-1}) + a_{n-1}(\alpha^{n-2} + \alpha^{n-3}\beta + \dots + \alpha\beta^{n-2}) + \dots + a_1]. \end{aligned}$$

Koristeći dalje apsolutnu vrijednost i nejednakost (10), nalazimo da je

$$|f(\alpha) - f(\beta)| < |\alpha - \beta|[n|a_n| + (n-1)|a_{n-1}| + \dots + |a_1|].$$

Kako je $|\alpha - \beta| = \alpha - \beta$ na osnovu definicije broja N dobivamo traženi odnos $|f(\alpha) - f(\beta)| < N(\alpha - \beta)$. □

Razmotrimo ponovo razliku $f(\alpha) - f(\beta)$ ali na drugi način.

Teorem 3. *Za svaki pozitivan cijeli broj j*

$$|f(\alpha) - f(\beta)|10^{n \cdot j!} \quad (11)$$

je također pozitivan cijeli broj.

Dokaz. Kako je $f(\alpha) = 0$, promatrani broj možemo napisati u obliku $|-f(\beta)|10^{n \cdot j!}$ ili u obliku $|f(\beta)|10^{n \cdot j!}$. Sada, suglasno (3) vrijedi

$$\begin{aligned} f(\beta) &= a_n\beta^n + a_{n-1}\beta^{(n-1)} + a_{n-2}\beta^{(n-2)} + \dots + a_1\beta + a_0 \\ &= \frac{a_n t^n}{10^{n \cdot j!}} + \frac{a_{n-1} t^{n-1}}{10^{(n-1)j!}} + \frac{a_{n-2} t^{n-2}}{10^{(n-2)j!}} + \dots + \frac{a_1 t}{10^{j!}} + a_0. \end{aligned}$$

Odavde, množenjem jednakosti s $10^{nj!}$ dobivamo

$$f(\beta)10^{nj!} = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} 10^{j!} + a_{n-2} t^{n-2} 10^{2j!} \dots + a_1 t 10^{(n-1)j!} + a_0 10^{nj!}.$$

Desna strana ove jednakosti je cijeli broj različit od nule ako je β definiran izrazom (2), jer je tada $f(\beta) \neq 0$, ($f(\alpha) = 0$ po pretpostavci).

Dalje, prelaskom na apsolutnu vrijednost dobivamo, $|f(\beta)10^{nj!}| = |f(\beta)|10^{nj!}$, a obzirom na desnu stranu posljednje jednakosti to je pozitivan cijeli broj.

Na osnovu izloženog zaključujemo da je $|f(\alpha) - f(\beta)|10^{nj!}$ pozitivan cijeli broj. Time je teorem dokazan. □

Sada pokažimo da protivno Teoremu 2 broj zadan s (11) se nalazi između 0 i 1. U tu svrhu odaberimo cijeli broj j , korišten pri definiranju broja β , tako da vrijedi

$$\frac{2N \cdot 10^{nj!}}{10^{(j+1)!}} < 1 \quad (12)$$

Da možemo odabrati takav broj j slijedi iz toga da je nejednakost (12) ekvivalentna nejednakosti $\frac{2N}{10^{(j+1)! - nj!}} < 1$. Odavde obzirom da se izraz stupnja u nazivniku posljednje nejednakosti može napisati u obliku $(j+1)! - nj! = (j+1-n)j!$, fiksni broj n možemo odabrati dovoljno velik, ako je izabrani j dovoljno velik.

Kako su n i N zadani izrazima (6) i (8), a j ne zavise od n i N , možemo odabrati dovoljno veliki j da vrijedi (12). Pokažimo sada da broj definiran sa (11) ima vrijednost između 0 i 1.

U smislu Teorema 2, nejednakosti

$$\alpha - \beta < \frac{2}{10^{(j+1)!}}, \alpha - \beta \neq 0 \text{ i (11) vrijedi}$$

$$|f(\alpha) - f(\beta)|10^{nj!} < N(\alpha - \beta)10^{nj!} < \frac{2N \cdot 10^{nj!}}{10^{(j+1)!}} < 1$$

Već smo pokazali (Teorem 2) da je $|f(\alpha) - f(\beta)|10^{nj!}$ pozitivan cio broj, ako je broj α definiran sa (1) algebarski broj. Iz dobivene nejednakosti vidimo da je ta pretpostavka neodrživa, odnosno dobivena nejednakost je u suprotnosti s Teoremom 3. Dakle broj α definiran sa (1) ne zadovoljava ni jednu algebarsku jednadžbu (6), odnosno α je transcendentan broj.

3. Iracionalnost i transcendentnost broja e

Poznato je da je broj e definiran kao granična vrijednost niza čiji je opći član $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ odnosno, $e = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n$.

Dokažimo da je broj e iracionalan broj. U dokazu iracionalnosti broja koristimo Taylorovu i MacLaurinovu formulu, koje imaju značajnu ulogu u postupku aproksimiranja funkcije f polinomom (vidi [4]).

1. Ako funkcija f ima neprekidne sve derivacije do n -tog reda na segmentu $[a, b]$ i postoji $f^{(n+1)}$ na intervalu $< a, b >$, tada za svaki $x \in [a, b]$ vrijedi Taylorova

formula

$$f(x) = f(a) + \frac{(x-a)}{1!}f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f''(a) + \dots + \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \frac{(x-a)^{(n+1)}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(a + \theta(x-a)), 0 < \theta(x) < 1 \quad (13)$$

2. Specijalno za $a = 0$ i $x \in [a, b]$ imamo MacLaurinovu formulu

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!}f'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \dots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi). \quad (14)$$

gdje je $\xi = \theta x$ i $0 < \xi = \xi(x) < 1$. Polinom

$$P_n(x) = f(0) + \frac{x}{1!}f'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \dots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0)$$

se naziva MacLaurinov polinom stupnja n za funkciju f s pogreškom

$$R_n = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi), \quad \xi = \theta x, \quad 0 < \xi = \xi(x) < 1.$$

Koristeći ove rezultate dokažimo iracionalnost broja e .

Teorem 4. Broj e je iracionalan broj.

Dokaz. Kako je $(e^x)' = (e^x)'' = \dots = (e^x)^{(n)} = e^x$, $x \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}$, slijedi da je za $f(x) = e^x, f(0) = f'(0) = \dots = f^{(n)}(0) = e^0 = 1$. MacLaurinov polinom stupnja n funkcije $f(x) = e^x$ dan je formulom

$$f(0) + f'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \dots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!},$$

gdje je ostatak dan izrazom $R_n = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{(\xi)}$, i $\xi = \theta x$, $0 < \xi < 1$.

Dakle, za svaki $x \in \mathbb{R}$ funkciju $f(x) = e^x$ možemo pisati u obliku

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{(n+1)}}{(n+1)!}e^{\theta x}$$

gdje je $0 < \theta < 1$. Stavimo li u posljednju jednakost da je $x = 1$, dobivamo

$$e^x = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!}e^{\theta}, 0 < \theta < 1. \quad (15)$$

Najprije pokažimo da vrijedi nejednakost $0 < e < 3$. Krenimo od toga da pokažemo da je $a_n < 3$ tj. da je $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n < 3$. Koristeći binomnu formulu imamo da je

$$\begin{aligned}
\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= 1 + \binom{n}{1} \frac{1}{n} + \binom{n}{2} \frac{1}{n^2} + \cdots + \binom{n}{n} \frac{1}{n^n} \\
&= 1 + \frac{n}{n} + \frac{n(n-1)}{2!} \frac{1}{n^2} + \cdots + \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-n+1)}{n!} \frac{1}{n^n} \\
&= 1 + 1 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdots + \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right) \\
&< 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} < 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} \\
&= 2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \frac{1}{2^{n-1}}}{1 - \frac{1}{2}} = 3 - \frac{1}{2^{n-1}}.
\end{aligned}$$

Zaključujemo da je niz zadan općim članom $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ omeđen niz. Obzirom da je $a_n - a_{n-1} = \frac{1}{n!} > 0, \forall n \in \mathbb{N}$, a svaki omeđen i rastući niz je konvergentan, slijedi da (a_n) konvergira. Dakle vrijedi nejednakost $0 < e < 3$. Ostaje pokazati iracionalnost broja e . Pretpostavimo suprotno, odnosno da je broj e racionalan broj tj. $e = \frac{p}{q}$. Nakon produkta jednakosti (15) sa $n!$ dobivamo,

$$en! = m + \frac{e^\theta}{n+1}, m \in \mathbb{N}. \quad (16)$$

Kako je $e < 3$ za $n \geq 3$ vrijedi $\frac{e^\theta}{n+1} < 1$ pa desna strana jednakosti (16) nije cijeli broj tj. $m + \frac{e^\theta}{n+1} \notin \mathbb{Z}$. S druge strane, ako za n vrijedi $n \geq q$ tada je $n!$ djeljivo s q , pa je lijeva strana jednakosti (16) prirodan broj. Dakle, za prirodan broj $n, n \geq 3$ i $n \geq q$ imamo da je lijeva strana cijeli broj, a desna nije, što je kontradikcija, pa pretpostavka da je e racionalan broj je neodrživa odnosno, broj e je iracionalan broj. Dokažimo da je broj e transcendentan.

Prije toga dokažimo lemu

Lema 2. *Ako je h polinom sa cjelobrojnim koeficijentima tada za polinom $f(x) = \frac{x^{m-1}}{(m-1)!} h(x), m \in \mathbb{N}, m \geq 2$ vrijedi*

1. $f^{(i)}(0) = 0, i < m - 1,$
2. $f^{(m-1)}(0) = h(0),$
3. $f^{(i)}(r)$ je djeljiv sa $m, i \geq m, r \in \mathbb{Z}.$

Dokaz. Za dokaz tvrdnje 1. koristimo teorem o nul-točkama polinoma, koju navodimo bez dokaza (vidi [4]), x_0 je nul-točka reda $k, k \in \{1, 2, \dots, n\}$ polinoma $f_n(x)$ stupnja $n > 0$ ako i samo ako su ispunjeni uvjeti $f_n(x_0) = f'_n(x_0) = \dots = f_n^{(k-1)}(x_0) = 0, f_n^{(k)}(x_0) \neq 0$. Sljedeća posljedica ovog teorema je za nas značajna: *Ako je x_0 nul-točka reda k polinoma $f_n(x)$, tada je x_0 nul-točka reda $(k-1)$ polinoma $f'_n(x)$.*

Imajući u vidu ovaj teorem i njegovu posljedicu dokaz tvrdnje 1. slijedi iz činjenice da je $x = 0$ nul-točka polinoma $f(x)$ višestrukosti $m - 1$, pa je na osnovi posljedice navedenog teorema $x = 0$ nul-točka i polinoma $f^{(i)}(0) = 0, i < m - 1$.

2. Neka je $h(x)$ polinom čiji su koeficijenti cijeli brojevi

$$h(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n, \quad h(0) = a_0,$$

tada polinom $f(x)$ ima oblik

$$f(x) = \frac{x^{m-1}}{(m-1)!} (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n).$$

Ako ovaj polinom uzastopno deriviramo, dobivamo

$$f^{(m-1)}(x) = \frac{1}{(m-1)!} \left[a_0(m-1)! + a_1 \frac{m!}{1!} x + a_2 \frac{(m+1)!}{2!} x^2 + \cdots + a_n \frac{(m+n-1)!}{n!} x^n \right]$$

Uvrstimo li u posljednju jednakost $x = 0$ imamo da je $f^{(m-1)}(0) = a_0 = h(0)$, što je i trebalo pokazati.

Da pokažemo tvrdnju 3. uočimo da je

$$\left(\frac{a_k x^k}{(m-1)!} \right)^i = \begin{cases} a_k \binom{k}{i} \frac{i!}{(m-1)!} x^{k-1}, & i \leq k \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

Ako je $i \geq m$ tada $(i!)$ sadrži faktor m i sve faktore od $(m-1)!$. Kako su $\binom{k}{i}, a_k \in \mathbb{Z}$ koeficijenti polinoma $f^{(i)}$ cijeli brojevi djeljivi sa m , to $f^{(i)}(r) \in \mathbb{Z}$ i $m | f^{(i)}(r)$ za svaki cijeli broj r .

□

Dokaz o transcendentnosti broja e dao je *Hermit* 1873. godine (vidi [3]). To je bio prvi konkretan dokaz transcendentnosti nekog konkretnog broja, a koji nije direktna posljedica Liuvilovog teorema. Hermitov dokaz zasnivao se na poznatim identitetima eksponencijalne funkcije s kojom je uspio uspostaviti vezu između aritmetičke prirode vrijednosti eksponencijalne funkcije, njenog analitičkog svojstva i aritmetičkog svojstva koeficijenata njenog Taylorovog reda. Sljedeći teorem daje primjer takvog dokaza.

Teorem 5. *Broj e je transcendentan broj.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, da je broj e algebarski broj. Tada prema definiciji algebarskog broja postoji prirodan broj n i cijeli brojevi $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ takvi da je

$$a_0 + a_1e + a_2e^2 + \cdots + a_n e^n = 0. \quad (17)$$

Uočimo funkciju $g(x) = e^{-x}$. Derivacije funkcije $g(x)$ su redom

$$(e^{-x})' = -e^{-x}, (e^{-x})'' = e^{-x}, \dots, (e^{-x})^{(n)} = (-1)^n e^{-x}.$$

U dokazu koristimo sljedeće rezultate analize. Ako su f, g derivabilne funkcije na segmentu $[a, b]$, tada vrijedi formula parcijalne integracije

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx.$$

Ako su funkcije f, g derivabilne reda $(n+1)$ na $[a, b]$, tada vrijedi

$$\int_a^b f(x)g^{(n+1)}(x)dx = [f(x)g^{(n)}(x)]_a^b - [f'(x)g^{(n-1)}(x)]_a^b \\ + \dots + (-1)^n [f^{(n)}(x)g(x)]_a^b - (-1)^n \int_a^b f^{(n+1)}(x)g(x)dx.$$

Očito za polinom stupnja n je $f^{(n+1)}(x) = 0$ pa posljednji integral ima vrijednost nula. Promatramo li funkcije na segmentu $[0, 1]$ i pri tome je stupanj polinoma, $\deg f = n$, tada posljednja jednakost prelazi u oblik:

$$\int_0^1 f(x)g^{(n+1)}(x)dx = f(1)g^{(n)}(1) - f'(1)g^{(n-1)}(1) \\ + f''(1)g^{(n-2)}(1) + \dots + (-1)^n f^{(n)}(1)g(1) \\ - [f(0)g^{(n)}(0) - f'(0)g^{(n-1)}(0) + \dots + (-1)^n f^{(n)}(0)g(0)]. \quad (18)$$

Ako se u (18), varijabla x zamijeni s αx i $g(x) = e^{-x}$ dobivamo

$$(-1)^n + 1 \cdot \alpha \int_0^1 f(\alpha x)e^{-x}dx = (-1)^n [e^{-\alpha}(f(\alpha) \\ + f'(\alpha) + \dots + f(\alpha)^n - (f(0) + f'(0) + \dots + f^n(0))], \quad (19)$$

gdje je n stupanj polinoma f . Stavimo li da je $F(x) = f(x) + f'(x) + \dots + f^n(x)$, tada se desna strana (19) može napisati u obliku

$$(-1)^{n+1} \cdot \alpha \int_0^1 f(\alpha x)e^{-\alpha x}dx = (-1)^n [e^{-\alpha} \cdot (F(\alpha) - F(0))]$$

Množenjem posljednje jednakost s $(-1)^{n+1}e^\alpha$ nakon sređivanja dobivamo

$$\alpha \cdot e^\alpha \cdot \int_0^1 f(\alpha x)e^{-\alpha x}dx = e^\alpha F(0) - F(\alpha)$$

odavde je

$$e^\alpha F(0) = F(\alpha) + \alpha e^\alpha \int_0^1 f(\alpha x)e^{-\alpha x}dx. \quad (20)$$

S druge strane jednakost (17) nakon množenja s $F(0)$, prelazi u oblik

$$F(0)(a_0 + a_1 e + a_2 e^2 + \dots + a_n e^n) = 0$$

odnosno,

$$\sum_{k=0}^n a_k e^k F(0) = a_0 F(0) + \sum_{k=1}^n a_k e^k F(0),$$

Iskoristimo li (20) posljednja jednakost se može napisati u obliku

$$a_0 + F(0) + \sum_{k=1}^n a_k (F(k) + k e^k \int_0^1 f(kx)e^{-kx}dx) = 0,$$

odakle je

$$a_0 + F(0) + \sum_{k=1}^n a_k(F(k)) = - \sum_{k=1}^n k a_k e^k \int_0^1 f(kx) e^{-kx} dx. \quad (21)$$

Da bismo dokazali da je broj e transcendentan potrebno je pokazati da je jednakost (21) nemoguća. Odnosno, da na lijevoj strani jednakosti imamo cijeli broj, a na desnoj racionalan. Dakle, ideja dokaza o transcendentnosti broja e zasniva se na tome da se odabere pogodan polinom f kojim bi postigli da desna strana jednakosti (21) bude po apsolutnoj vrijednosti broj manji od 1, a lijeva strana da je cijeli broj različit od nule i po apsolutnoj vrijednosti veći ili jednak jedinici, čime bi se dobila kontradikcija koja bi potvrdila da naša pretpostavka da je e algebarski broj nije točna. Koristeći rezultate Leme 2 odredimo polinom f . Neka je za proizvoljan prim broj p polinom $h(x)$ stupnja np oblika $h(x) = (x-1)^p(x-2)^p \cdots (x-n)^p$, tada polinom f oblika

$$f(x) = \frac{x^{p-1}}{(p-1)!} \cdot h(x) \quad (22)$$

zadovoljava uvjete Leme 2 (stav 1), odnosno vrijedi

$$f^{(i)}(0) = 0, i = 0, 1, 2, \dots, p-2 \quad (23)$$

$$f^{(i)}(0) = 0, i = 0, 1, 2, \dots, p-2 \quad (24)$$

$$p|f^{(i)}(r), i \geq p, r \in \mathbb{Z} \quad (25)$$

Primijetimo da je stupanj polinoma $f(x)$, $N = np + p - 1$. Na osnovi ranije uvedene oznake za funkciju $F(x)$ i uvjeta (23) je

$$F(0) = f(0)^{(p-1)} + f(0)^{(p)} + \dots + f(0)^{(pn+p-1)}.$$

Produkt ove jednakosti s a_0 i jednakost (24) daje

$$a_0 F(0) = a_0 [(-1)^n n!]^p + a_0 \cdot f(0)^{(p)} + \dots + a_0 f^{(np+p-1)}(0) \quad (26)$$

Na desnoj strani jednakosti (26) obzirom da je $a_0 \in \mathbb{Z}$ i kako vrijedi (25), članovi $a_0 f^{(p)}(0), a_0 f^{(p+1)}(0), \dots, a_0 \cdot f^{(np+p-1)}(0)$ sume su cijeli brojevi djeljivi s p . Odaberimo takav prost broj p da je $p > a_0, p > n$. Tada broj $a_0 [(-1)^n n!]^p$ nije djeljiv s prostim brojem p , pa zbog toga cijela desna strana (26) nije djeljiva s p , odnosno broj $a_0 F(0)$ je cijeli broj koji nije djeljiv s p . Imajući u vidu oblik funkcije $f(x)$ i činjenicu da su $k = 0, 1, 2, \dots, n$ njene nul-točke reda p vrijedi $f^{(i)}(k) = 0$, $i \leq p-1$, $k = 1, 2, \dots, n$, pa je

$$F(k) = f^{(p)}(k) + f^{(p+1)}(k) + \dots + f^{(pn+p-1)}(k)$$

Uzimajući u obzir relaciju (25) zaključujemo da $p|F(k) \in \mathbb{Z}$. Kako je, $a_k \in \mathbb{Z}$, $k = 1, 2, \dots, n$ i $p|F(k)$, imamo da je $\sum_{k=1}^n a_k F(k)$ na lijevoj strani jednakosti (21) djeljiva s p . Na osnovu toga i (26) lijevu stranu jednakosti (21) čine dva cijela broja od kojih je jedan djeljiv s p , a drugi nije, pa lijeva strana (21) je cijeli broj koji nije

djeljiv s p . Apsolutna vrijednost tog broja je zbog toga, barem 1. Za desnu stranu jednakosti (21) možemo dakle pisati da je

$$\left| - \sum_{k=1}^n ka_k e^k \cdot \int_0^1 f(kx) e^{-kx} dx \right| \geq 1. \quad (27)$$

Da završimo dokaz potrebno je procijeniti funkciju $f(kx)$ kako bi ocijenili izraz pod znakom apsolutne vrijednosti.

Uočimo da za $x \in [0, 1]$ i nenegativne cijele brojeve $r, k \leq n$ vrijedi $|kx - r| \leq n$. Primjenimo li to na funkciju $f(kx)$ definiranu sa (22) dobivamo

$$f(kx) = \frac{1}{(p-1)!} |kx|^{p-1} |kx-1|^p |kx-2|^p \dots |kx-n|^p \leq \frac{n^{np+p-1}}{(p-1)!} < \frac{n^{p(n+1)}}{(p-1)!}$$

Kako je $0 < e^{-kx} \leq 1$ vrijedi

$$\begin{aligned} & \left| - \sum_{k=1}^n k|a_k| e^k \int_0^1 f(kx) e^{-kx} dx \right| \leq \sum_{k=1}^n |ka_k e^k \int_0^1 f(kx) e^{-kx} dx| \\ & \leq \sum_{k=1}^n k|a_k| e^k \int_0^1 f(kx) e^{-kx} dx < \sum_{k=1}^n k|a_k| e^k \int_0^1 \frac{n^{p(n+1)}}{(p-1)!} \sum_{k=1}^n k|a_k| e^k \\ & = \frac{(n^{n+1})^{p-1}}{(p-1)!} n^{n+1} \sum_{k=1}^n k|a_k| e^k. \end{aligned}$$

Iskoristimo li poznatu graničnu vrijednost $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0$, lako se pokaže da je $\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{(n^{n+1})^{p-1}}{(p-1)!} = 0$, pa postoji prost broj p za koji vrijedi nejednakost

$$\frac{(n^{n+1})^{p-1}}{(p-1)!} < \frac{1}{n^{n+1} \sum_{k=1}^n k|a_k| e^k}. \quad (28)$$

Na taj način iz provedenog niza nejednakosti nalazimo da vrijedi

$$\left| - \sum_{k=1}^n ka_k e^k \int_0^1 f(kx) e^{-kx} dx \right| < 1. \quad (29)$$

Iz dokazane nejednakosti zaključujemo da je pretpostavka u nejednakosti (27) pogrešna, odnosno da desna strana jednakosti (21) nije cijeli broj, koji je po apsolutnoj vrijednosti barem jednak jedinici. S druge strane, pokazali smo da lijevu stranu jednakosti (21) čini cijeli broj. Iz provedenog dokaza zaključujemo da je jednakost (21) neodrživa, uz pretpostavku da je broj e algebarski broj. Odnosno, pretpostavka da je broj e algebarski je pogrešna, dakle on je transcendentan broj. \square

4. Iracionalnost broja e^p

W. Ramasinghe (vidi [8]) je na vrlo jednostavan način dokazao iracionalnost broja e^2 . Rukovodeći se tom idejom dajemo dokaz iracionalnosti broja e^p za bilo koji prost broj p . Prije nego to dokažemo dokažimo dvije leme na koje se taj dokaz oslanja.

Podsjetimo se da, svaki prirodan broj različit od 1 koji je djeljiv jedino s 1 i sa samim sobom zovemo prost ili prim broj, a prirodan broj koji nije prost nazivamo složenim prirodnim brojem.

Lema 3. *Neka je p bilo koji prost broj. Tada za svaki prirodan broj n , vrijedi tvrdnja $p^{p^{n-1}}$ dijeli $(p^n)!$, odnosno kraće zapisano $p^{p^{n-1}} | (p^n)!, \forall n \in \mathbb{N}$.*

Dokaz. Dokaz leme provodimo matematičkom indukcijom. Neka je p bilo koji prost broj. Za $n = 1$ imamo da je $p^{p^{1-1}} = p^0 = p$, dok je $p! = p(p-1)(p-2)(p-3) \dots 2 \cdot 1$. Dakle, tvrdnja je točna za $n = 1$, jer vrijedi $p|p!$.

Pretpostavimo da je tvrdnja točna za prirodan broj n , tj. da vrijedi $p^{p^{n-1}} | (p^n)!$. Dokažimo da vrijedi i za $n + 1$, tj. da je točna tvrdnja $p^{p^n} | (p^{n+1})!$. Kako je

$$\begin{aligned} (p^{n+1})! &= (p^n)!(p^{n+1}(p^n + 1) \dots (p^n + p) \\ &\quad \dots (p^n + p^2) \dots (p^n + p^{n-1}) \dots (2p^n) \\ &\quad \dots (2p^n + p) \dots (2p^n + p^2) \dots (2p^n + p^{n-1}) \dots (3p^n) \\ &\quad \dots ((p-1)p^n + p) \dots ((p-1)p^n + p^2) \dots ((p-1)p^n + p^{n-1}) \dots (p^{n+1}) \end{aligned}$$

gdje je

$$\begin{aligned} 2p^n &= (p^n + (p-1)p^{n-1} + (p-1)p^{n-2} + \dots + (p-1)p + p) \\ 3p^n &= (2p^n + (p-1)p^{n-1} + (p-1)p^{n-2} + \dots + (p-1)p + p) \\ &\quad \vdots \\ p^{n+1} &= ((p-1)p^n + (p-1)p^{n-1} + (p-1)p^{n-2} + \dots + (p-1)p + p). \end{aligned}$$

Pogodnim grupiranje članova raspisane forme $(p^{n+1})!$ i to članova oblika

$$\begin{aligned} p^n + p &= p(p^{n-1} + 1), 2p^n + p = p(2p^{n-1} + 1), 3p^n + p = p(3p^{n-1} + 1) \\ \dots (p-1)p^n + p &= p((p-1)p^{n-1} + 1), p^n + p^2 = p^2(p^{n-2} + 1), 2p^n + p^2 = p^2(2p^{n-2} + 1), \\ \dots (p-1)p^n + p^2 &= p^2((p-1)p^{n-2} + 1), p^n + p^3 = p^3(p^{n-3} + 1), 2p^n + p^3 = p^3(2p^{n-3} + 1), \\ \dots (p-1)p^n + p^3 &= p^3((p-1)p^{n-3} + 1), p^n + p^{n-1} = p^{n-1}(p+1), 2p^n + p^{n-1} = p^{n-1}(2p+1), \\ &\quad \dots (p-1)p^n + p^{n-1} = p^{n-1}((p-1)p + 1) \end{aligned}$$

nakon sređivanja nalazimo da se produkt na desnoj strani posljednje jednakosti

može napisati u obliku

$$\begin{aligned}
(p^{n+1})! &= (p^n)!(p^n + 1)(p^n + 2) \dots (p^n + p) \dots (p^n + p^2) \dots (p^n + p^{n-1}) \dots (2p^n) \\
&\quad \dots (2p^n + p) \dots (2p^n + p^2) \dots (2p^n + p^{n-1}) \dots (3p^n) \\
&= ((p-1)p^n + p) \dots ((p-1)p^n + p^2) \dots ((p-1)p^n + p^{n-1}) \dots (p^{n+1}) \\
&= (p^n)! \dots p(p^{n-1} + 1) \dots p(2p^{n-1} + 1) \dots p((p-1)p^{n-1} + 1) \\
&\quad \dots p^2(p^{n-2} + 1) \dots p^2(2p^{n-2} + 1) \dots p^2((p-1)p^{n-2} + 1) \\
&\quad \dots p^{n-1}(p + 1)p^{n-1}(2p + 1) \dots p^{n-1}((p-1)p + 1) \dots 2p^n \dots (p-1)p^n p^{n+1}
\end{aligned}$$

Nakon sređivanja uzimajući u obzir da je $p^{p^{n-1}} | (p^n)!$ po pretpostavci, odnosno, da postoji cijeli broj q takav da je $(p^n)! = p^{p^{n-1}} q$, desna strana posljednje jednakosti se može napisati u obliku

$$(p^{n+1})! = (p^{p^{n-1}} q)(p^{(p-1)p^{n-1}} r = p^{p^{n-1} + (p-1)p^{n-1}} s = p^{p^n} s,$$

gdje su q, r, s pozitivni cijeli brojevi i $s = qr$. Iz posljednje jednakosti slijedi da $p^{p^n} | (p^{n+1})!$, odnosno tvrdnja je točna za svaki prirodan broj n . \square

Druga lema koja nam je potrebna glasi

Lema 4. *Ako je p prost broj, tada za svaki prirodan broj n i za svaki $k \in \{0, 1, 2, \dots, p^n\}$, $p^{p^{n-1}}$ dijeli $\frac{p^k(p^n)!}{k!}$. Kraće zapisano, $p^{p^{n-1}} | \frac{p^k(p^n)!}{k!}, \forall n \in \mathbb{N}, i \forall k \in \{0, 1, 2, \dots, p^n\}$.*

Dokaz. Oslanjajući se na rezultate Leme(3) matematičkom indukcijom pokažimo da vrijedi tvrdnja. Za $n = 1$ i $k \in \{0, 1, 2, \dots, p^n\}$, očito vrijedi

$$p^{p^{1-1}} | \frac{p^k(p^1)!}{k!} \Leftrightarrow p | \frac{p^k p!}{k!} \Leftrightarrow p | \frac{p^k p(p-1)(p-2) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1}{k!},$$

što je točno. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za bilo koji prirodan broj n tj. da $p^{p^{n-1}} | \frac{p^k(p^n)!}{k!}$ i pokažimo da tada vrijedi tvrdnja i za prirodan broj $n + 1$ tj. $p^{p^n} | \frac{p^k(p^{n+1})!}{k!}$ odnosno, postoji pozitivan cijeli broj q_n tako da vrijedi jednakost $p^k(p^{n+1})! = p^{p^n} k! q_n$. Primijetimo da ako vrijedi pretpostavka, tada postoji pozitivan cijeli broj s_n takav da je $p^k(p^n)! = k! p^{p^{n-1}} \cdot s_n$ za $k \in \{0, 1, 2, \dots, p^n\}$ za bilo koji prost broj p . Provjerimo sada tvrdnju za $n + 1$. Vrijedi niz jednakosti

$$\begin{aligned}
p^k(p^{n+1})! &= p^k(p^n)!(p^n + 1)(p^n + 2) \dots (p^n + p) \dots (p^n + p^2) \dots (p^n + p^{n-1}) \dots (2p^n) \\
&\quad \dots (2p^n + p) \dots (2p^n + p^2) \dots (2p^n + p^{n-1}) \dots (3p^n) \\
&\quad \dots ((p-1)p^n + p) \dots ((p-1)p^n + p^2) \dots ((p-1)p^n + p^{n-1}) \dots (p^{n+1}) \\
&= k! p^{p^{n-1}} s_n p^{p^{n-1}(p-1)} r_n = k! p^{p^n} q_n,
\end{aligned}$$

s_n, r_n, q_n su pozitivni cijeli brojevi, $q_n = s_n r_n$. Iz posljednje jednakosti zaključujemo da tvrdnja vrijedi i za $n + 1$. Dakle Lema(4) vrijedi za svaki prirodan broj n i $k \in \{0, 1, 2, \dots, p^n\}$. \square

Sada možemo formulirati i dokazati teorem.

Teorem 6. *Broj e^p je iracionalan broj za svaki prost broj p .*

Dokaz. Pretpostavimo da je $e^p = \frac{a}{b}$, $a, b \in \mathbb{N}$. Odaberimo prirodan broj n tako da vrijedi $\frac{bp^2}{p^n - p + 1} < \frac{1}{2}$. Primjenom Taylorove formule za funkciju e^p dobivamo jednakost

$$\frac{a}{b} = 1 + p + \frac{p^2}{2!} + \frac{p^3}{3!} + \dots + \frac{p^{p^n}}{(p^n)!} + \frac{p^{p^n+1}}{(p^n+1)!} + \frac{p^{p^n+2}}{(p^n+2)!} + \dots$$

Množenjem jednakosti sa $(bp^n)!$ dobivamo da je

$$(p^n)!a = b[(p^n)! + p(p^n)! + \frac{p^2(p^n)!}{2!} + \frac{p^3(p^n)!}{3!} + \dots + p^{p^n}]$$

$$bp^{p^n+1} \left[\frac{1}{p^n+1} + \frac{p}{(p^n+1)(p^n+2)} + \frac{p^2}{(p^n+1)(p^n+2)(p^n+3)} + \dots \right]$$

Na osnovi Leme 3 postoji prirodan broj c , takav da je $(p^n)! = p^{p^n-1} \cdot c$. Slično, koristeći Lemu 4 dobivamo da postoji prirodan broj d takav da je

$$[(p^n)! + p(p^n)! + \frac{p^2(p^n)!}{2!} + \frac{p^3(p^n)!}{3!} + \dots + p^{p^n}] = p^{p^n-1}d.$$

Na osnovu toga imamo jednakost

$$p^{p^n-1}ac - p^{p^n-1}bd = bpp^{p^n+1} \left[\frac{1}{p^n+1} + \frac{p}{(p^n+1)(p^n+2)} + \frac{p^2}{(p^n+1)(p^n+2)(p^n+3)} + \dots \right]$$

Odnosno

$$ac - bd = bp^2 \left[\frac{1}{p^n+1} + \frac{p}{(p^n+1)(p^n+2)} + \frac{p^2}{(p^n+1)(p^n+2)(p^n+3)} + \dots \right]$$

Kako je

$$\begin{aligned} & \frac{1}{p^n+1} + \frac{p}{(p^n+1)(p^n+2)} + \frac{p^2}{(p^n+1)(p^n+2)(p^n+3)} + \dots \\ & \leq \frac{1}{p^n+1} + \frac{p}{(p^n+1)^2} + \frac{p^2}{(p^n+1)^3} + \dots = \frac{1}{p^n-p+1} \end{aligned}$$

nalazimo da je $0 < ac - bd < \frac{bp^2}{p^n-p+1} < \frac{1}{2}$. To je kontradikcija s pretpostavkom da su a, b, c, d prirodni brojevi. Primijetimo, kao što čini i W. Ramasinghe, da se kao posljedica teorema dobiva iracionalnost broja e , jer ako bi e bio racionalan onda bi takvi bili primjerice i $e^2, e^3, e^5, e^7, \dots$ to nije moguće.

Literatura

- [1] K. CONRAD, *Irrationality of π and e* , Math 121, 2005.
- [2] S.S. DEMIDOV, *Problemi Hilberta*, Znanje, Moskva, 1969.
- [3] N.I. FELDMAN SHIDLOVSKI, *Razvoj i trenutno stanje teorije transcendentnih brojeva*, Uspjeh Matematičke znanosti, XXII, N.3(135), 1967.
- [4] O. HADŽIĆ, Đ. TAKAČI, *Matematičke metode*, Univerzitet u Novom Sadu, PMF, Novi Sad, 2000.
- [5] A. IVIĆ, *Uvod u analitičku teoriju brojeva*, Novi Sad, 1996.
- [6] Đ. KUREPA, *Viša Algebra*, Knjiga 1, Školska knjiga Zagreb, 1965.
- [7] A. NIVEN, *Racionalni i iracionalni brojevi*, Mir, Moskva, 1966.
- [8] W. RAMASINGHE, *A simple proff e^2 is irrational*, International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, **36**(2005), No. 4, 407–410.