FRANE PETRIĆ O POJMU NEPREKINUTOSTI I BESKONAČNOSTI

Žarko Dadić

Petrić je raspravljao o pojmu neprekinutosti i beskonačnosti donekle u svom djelu *Della nuova geometria, libri XV* koje je izašlo u Ferrari god. 1587, a osobito u svom glavnom djelu *Nova de universis philosophia,* koje je prvi put tiskano u Ferrari god. 1591, a drugi put u Veneciji god. 1593.

Petrićeva shvaćanja neprekinutosti u oštroj su opreci s Aristotelovim, pa se i veliki dio njegova teksta odnosi na kritiku Aristotelovih stavova, što je uostalom bio slučaj i u svim drugim pitanjima. Petrić postavlja nove tvrdnje za koje smatra da su logičnije od Aristotelovih i da izbjegavaju teškoće na koje, po Petrićevom shvaćanju, dolazi Aristotel.

Aristotel je držao da je bit neprekinutosti u tome što dijelovi, koji se nastavljaju neposredno jedni na druge, imaju zajedničku granicu. Ovo nije moguće ako su krajnje granice dvaju dijelova dvije, nego tek onda ako padnu zajedno. Ti su dijelovi tada spojeni u jedno[1]. Drugim riječima, razdijeli li se crta točkom na dva dijela, ta točka je kraj prvog, a početak drugog, ali je brojem jedno. Ta točka drži tako obje polovine zajedno, a u isto ih vrijeme dijeli[2].

Ali po Aristotelu sve što je neprekinuto, djeljivo je u beskonačnost, pa se tako tu očituje i taj pojam. On se sreće i u brojenju kojemu nema kraja. To beskonačno za Aristotela nije nešto što se može realizirati, nego nešto što stalno nastaje, pa je time uvijek drugo. Ono što se uzima uvijek je omeđeno, ali je uvijek različito[3].

Demokrit je držao da su crte sastavljene iz nedjeljivih crta — matematičkih atoma, a isto tako površine i tijela. Te crte, površine

[1] Aristotel, *Fizika,* V/3, Vidi: Oskar Becker, *Grundlagen der Mathematik in geschichtlicher Entwicklung,* München 1954, str. 69—71.

[2] Ž. Marković, *Matematika u Platona i Aristotela,* Rad JAZU, knj. 261, Zagreb 1938, str. 124.

[3] Ž. Marković, isto, str. 126.

i tijela bili bi tada zbrojevi tih matematičkih atoma. Platon je svakako bio pod utjecajem Demokrita, ali nije priznavao nedjeljivim dijelovima nikakvu protežnost. On je osim toga odbijao da prizna kontinuum kao zbroj nedjeljivih dijelova, nego ga je promatrao kao rezultat gibanja nedjeljive bezdimenzionalne točke[4]. Pojam nedjeljive crte u Platonovoj školi svakako je imao istaknuto mjesto, pa je Platonov učenik i kasniji vođa škole, Ksenokrat izgradio teoriju nedjeljive crte[5]. Platonističke ideje nedjeljive crte utjecale su znatno na shvaćanja u Srednjem vijeku i Renesansi.

Aristotel je kritizirao takve stavove i o toj kritici se kasnije moralo voditi računa. Nemoguće je po Aristotelu da bi crta nastala iz nedjeljivih dijelova, pa ni iz nedjeljivih točaka. Kako nedjeljivo nema dijelova. nema ni krajnjeg dijela, pa ne može krajnja granica jednog i slijedećeg komada biti jedno. Iz dvije točke ne bi se mogla dobiti nikakva protežnost, nego bi one pale skupa. Po Aristotelu bi do toga došlo i u slučaju da imamo dvije nedjeljive dužine, jer ni one nemaju dijelova koji bi se mogli spojiti u zajedničku granicu[6].

Petrić napada mogućnost dijeljenja kontinuuma u beskonačnost, a ne može prihvatiti ni definiciju kontinuuma onako kako ju je dao Aristotel. On ne prihvaća ni da bi prostor bio potencijalno beskonačan. Za Petrića je prostor aktualno beskonačan, a bit te beskonačnosti je u tome što ne može biti veća[7].

Ovom pak beskonačnom prostoru može se postaviti protivnost. Ako postoji najveći prostor nužno je da postoji i najmanji. I kao što je najveći onaj koji veći ne može da bude, tako je najmanji onaj koji manji ne može da bude. I kao što je najveći beskonačan, tako je najmanji konačan. I kao što se najveći može dijeliti tako se najmanji ne može dijeliti[8]. Na taj način dolazi Petrić do pojma najmanjeg nedjeljivog prostora: crte, površine, tijela.

Taj pojam ima svoje korijene, kao što je istaknuto, još u staroj Grčkoj. U Srednjem vijeku nastavila se borba između pristaša pojma neprekinutosti u Aristotelovom smislu i pristaša nedjeljivih dijelova, pa su se te koncepcije i transformirale. Jedan od najistaknutijih pristaša pojma nedjeljivih najmanjih dijelova bio je *Nikola Kuzanski* (1401—1464). Kuzanskog spominje i Petrić u predgovoru svoga djela *Della nuova geometria* na prvom mjestu među istaknutim novijim matematičarima, ali ga tu ne dovodi u vezu s pojmom nedjeljivih dijelova. Ipak Petrićeva i Kuzanskova koncepcija bile

[4] Carl Boyer, *The History of the Calculus and its Conceptual* Development, New York 1959, str. 28; C. Boyer, A History of Mathematics, New York 1968, str. 97.

[5] George Sarton, *Introduction to the history of science,* vol. I, Baltimore 1953, str. 139; C. Boyer, The History of the Calculus, str. 39.

[6] Aristotel, *Fizika VI/1,* Vidi: O. Becker, isto, str. 71—72.

[7] F. Petrić, *Nova de universis philosophia,* str. 66r, stupac I.

[8] F. Petrić, isto, str. 66r, stupac I.

su vrlo slične, tako da se može sa sigurnošću reći, da je glavne pojmove u vezi s tim on crpio iz djela Kuzanskoga. I Kuzanski je držao da je beskonačno veliko ono koje se ne može učiniti većim, a beskonačno malo ono koje se ne može učiniti manjim. Kuzanski je dalje držao da su beskonačno veliko i beskonačno malo granice unutar kojih se mogu vršiti operacije s konačnim veličinama. Beskonačno veliko i beskonačno malo aktualno postoje[9]. Definicije beskonačno velikog i beskonačno malog potpuno su dakle istovjetne kod Kuzanskoga i Petrića, i jasno je da su inspirirane pojmom konačnog maksimuma i minimuma. Kod Petrića je također sadržano shvaćanje da se sve konačne veličine nalaze između spomenuta dva ekstrema, a to uključuje tvrdnju da se i operacijama s njima ne može odatle izaći. Petrić stalno naglašava da je moguć samo najveći, najmanji i srednji prostor, dakle takav koji se nalazi između prva dva. Taj se pak može povećavati, npr. crta, do najvećeg — beskonačnog, ili smanjivati do najmanjeg — nedjeljivog[10]. Najveći i najmanji prostor je za Petrića aktualan kao što je i za Kuzanskoga beskonačno veliko i beskonačno malo. Utjecaj je dakle očigledan, ali se kod Petrića to gledište ipak mijenja i dopunjuje.

Postojao je, kao što smo rekli, Aristotelov dokaz protiv mogućnosti postojanja nedjeljivih dijelova. Petrić nigdje eksplicite ne spominje taj dokaz, ali cjelokupna Petrićeva koncepcija prostora, nedjeljivih dijelova i točke, govore protiv takvog dokaza. U tom pogledu bit će osobita razlika prema njegovim prethodnicima.

Po Petriću postoji najmanji nedjeljivi dio prostora. Ali u njemu postoji neki minimum koji je različit od prostora i nije prostor. To je ono, kaže Petrić, što se obično naziva točkom. Točka za Petrića nije prostor, ni njegov dio, ona je samo u prostoru. Ona nema protežnosti i zato je upravo protivna prostoru koji je ima. Ali ona nema ni dijelova, pa je nedjeljiva[11].

Kakav je odnos između točke, koja nije prostor, i dijelova prostora? Već je Platon dovodio točku i crtu u vezu na taj način što bi točka svojim gibanjem izvodila crtu, a to mišljenje je bilo rašireno i u Srednjem vijeku[12]. Petrić međutim izričito odbacuje da bi crta bila tok crte[13], pa je tako njegova koncepcija kontinuuma različita od Platonove. Crta je naprotiv dio prostora koji leži između dvije točke[14]. Na drugom mjestu Petrić kaže: Prostor koji leži između dvije točke je crta i tu crtu s obje strane dodiruju te točke. Ako je obje dodiruju onda su to njezini ekstremi. A ako su ekstremi

[9] Carl Boyer, *The History of the Calculus*, str. 90—91.
[10] F. Petrić, *Della nuova geometria*, str. 44.
[11] F. Petrić, *Nova de universis philosophia*, str. 66r, stupac II.
[12] Platonovo gledište o izvođenju crte tokom točke zastupao je i Ivan Česmički (1434—1472). Vidi: Jani Pannonii Libri III, *Poematum Elegiarum et Epigrammatum*, Budae 1754, str. 296.
[13] F. Petrić, *Nova de universis philosophia*, str. 66v, stupac I.
[14] F. Petrić, isto, str. 66v, stupac I.

onda su i granice (terminus)[15]. Točka je granica crte, pa i one najmanje. I Euklid je tvrdio da su točke krajevi crte[16]. Međutim ovo isticanje te činjenice ima kod Petrića drugačiju značajku, jer je crta prostor, a točka je samo u prostoru. Zbog toga će se bitno razlikovati nedjeljivi najmanji dio prostora i nedjeljiva točka koja je u prostoru. Dvije najmanje crte premda su nedjeljive neće se stopiti u jedno, što vrijedi za točke, jer će se samo granice tih crta podudarati. Ova zadnja misao nije sasvim jasno izražena kod Petrića, iako je implicite sadržana. Kod Giordana Bruna to je izrečeno nešto jasnije.

Giordano Bruno je imao vrlo sličnu teoriju nedjeljivih crta, površina i tijela kao i Petrić. I Bruno kao i Petrić drži da je izvor svih zabluda u matematici, ali i u fizici, dijeljenje prostora u beskonačnost[17]. I Bruno, potpuno jednako kao i Petrić, tvrdi da postoji najmanji dio prostora, koji nema dijelova, ali da postoji i njegova granica koja je također nedjeljiva, ali nije dio ničega. Ta bi tvrdnja odgovarala Petrićevoj, po kojoj točka, odnosno granica crte, nije prostor, nego je samo u prostoru. Najmanji dio stoga po Brunu ne dodiruje se s drugim najmanjim dijelom čitav niti svojim dijelom, nego samo granicom[18].

Petrićevo i Brunovo prihvaćanje pojma nedjeljivih najmanjih crta, površina i tijela bilo je u skladu s vrlo raširenim gledištima u njihovo doba. U 16. stoljeću znatno je bio veći broj matematičara koji su pristajali uz taj pojam nego onih koji su slijedili Aristotelovu koncepciju. Vjerojatno su tome pogodovale i ideje iz platonističke škole, budući da je neoplatonizam općenito igrao važnu ulogu u stvaranju novih kozmologija i nove fizike. I Galileo Galilei je prihvaćao takve ideje, pa je na tom pojmu temeljio svoj dokaz za ubrzano gibanje. Upotrebljavao ga je i Kepler u izvođenju obujmova tijela, a posebno Cavalieri u svojoj teoriji indivizibila. U 17. stoljeću, u razdoblju uspostavljanja korespondencije između geometrijskih i algebarskih objekata, Fermat je uveo pojam i numeričkog infinitezimala. Pojam nedjeljivih dijelova, odnosno indivizibila i s druge strane numeričkog infinitezimala koji je odatle proizašao, odigrali su važnu ulogu u izgradnji infinitezimalnog računa uopće. Ipak, činjenica da je nemoguće odrediti razliku dvaju brojeva, koje danas nazivamo realnim, da bi bila manja od bilo kojeg pozitivnog broja, navela je Leibniza da umjesto realnih brojeva promatra tzv. idealne brojeve koji mogu biti infinitezimalno mali i beskonačno veliki, a da su podvrgnuti istim zakonima kao obični brojevi. To je bio pokušaj da se zbog zgodnijeg računa zadrži po-

[15] F. Petrić, isto, str. 70r, stupac I.
[16] Euklid, *Elementi*, I. def. 3.
[17] Ksenija Atanasijević, *Brunovo učenje o najmanjem*, Beograd 1922, str. 10.
[18] K. Atanasijević, isto, str. 11.

jam beskonačno malog, odnosno infinitezimala. Usprkos tome, Leibnizu, niti bilo kojem njegovom učeniku ili sljedbeniku nije uspjelo da i ostvari tu ideju. U daljnjem razvoju infinitezimalnog računa takvi nedjeljivi dijelovi, infinitezimali ili beskonačno male veličine sve više gube na značenju, ili se promatraju na posve drugačiji način. Tako Bošković smatra da su beskonačno male veličine promjenljive veličine koje postaju manje od svake, ma kako male, u sebi određene veličine[19]. Sve više se umjesto pojma beskonačno male veličine počeo uvoditi pojam granice, da na kraju pojam nedjeljivih, u bilo kojem obliku, bude sasvim prezren u matematici[20]. Ako se i govorilo o beskonačno malim veličinama, to je bilo samo terminološki isto, a sadržajno je pod tim smatran proces, promjenljiva veličina koja teži nuli. Time bi ideja nedjeljivih, koju je zastupao i Petrić, dovršila svoju glavnu ulogu u razvoju matematike.

Usprkos tome ta je ideja ipak u stanovitom obliku rehabilitirana krajem 19. stoljeća. Bila je to najprije pojava nearhimedskih geometrija. God. 1891. objavio je G. Veronese teoriju kontinuuma u kojoj se opet javljaju aktualno beskonačno mali segmenti[21]. Pored njegovog bilo je dakako još i drugih pokušaja. Godine 1904. Branimir Petronijević iznio je svoju ideju diskretne geometrije[22] koja se čak neposredno vezala na Bruno-Petrićevu interpretaciju. Naime, prema K. Atanasijević[23] slijedi da ona izlazi iz Brunova shvaćanja najmanjih nedjeljivih dijelova, a tada dakako i iz Petrićeva gledišta. Konačno, u najnovije doba javio se novi pokušaj, ali s posve novim pristupom. Abraham Robinson god. 1966. objavljuje svoju *Nestandardnu analizu*[24] u kojoj na određeni način obnavlja Leibnizovu ideju. U općem uvodu on piše: »U ovoj knjizi je pokazano da se Leibnizove ideje mogu potpuno opravdati i da one vode na novi i plodni pristup klasičnoj Analizi i mnogim drugim granama matematike«[25] Robinsonov pokušaj ima i sljedbenika[26].

[19] R. Bošković, *De Natura et usu Infinitorum et Infinite parvorum Dissertatio,* 1741; Usporedi: Željko Marković, Ruđer Bošković, dio I, Zagreb 1968, str. 95—96.

[20] Abraham Robinson, *Non-Standard Analysis,* Amsterdam 1966, str. 2. i 261.

[21] Gino Fano, *Geometrie non Euclidee e non Archimedee,* Enciclopedia delle Matematiche elementari II/2, Milano 1938, str. 499—502, Vladimir Varićak, Matematički rad Boškovićev, dio I, Zagreb 1910, 1911, 1912, str. 5—6.

[22] Branislav Petronijević, *Principien der Metaphysik,* Erster Band, Erste Abtheilung. Allgemeine Ontologie und die formalen Kategorien. (Mit einem Anhang: Elemente der neuen Geometrie.) Heidelberg 1904.

[23] K. Atanasijević, isto, str. 4.

[24] Abraham Robinson, *Non-Standard Analysis,* Amsterdam 1966.

[25] Abraham Robinson, isto, str. 2.

[26] A. H. Lightstone, *Infinitesimals,* The American Mathematical Monthly, vol. 79, br. 3, str. 242—251.

Vidi se da su ideje koje je zastupao Franjo Petrić imale veliku povijesnu važnost, osobito u pogledu početne izgradnje infinitezimalnog računa. Obnavljanje tih ideja, mada i u modificiranom obliku, pokazuje, da pojedine ideje u matematici nisu nikada definitivno odbačene, nego da se oplođene novim spoznajama u određenom smislu ponovno vraćaju. Ako to uzmemo u obzir onda Petrićeva gledišta imaju veću vrijednost nego bi to na prvi pogled izgledalo.

Riassunto

FRANE PETRIĆ SUL CONCETTO DI CONTINUITÀ E DI INFINITÀ

Il Petrić ha esposto il suo punto di vista sulla continuità nell'opera *Della nuova geometria* (Ferrara 1587) e nell'opera principale *Nova de universis philosophia* (Ferrara 1591). Le sue concezioni contrastano nettamente con quelle di Aristotele. Aristotele riteneva che l'essenza della continuità stesse nel fatto che le parti che si susseguono direttamente le une alle altre hanno un limite comune. Aristotele criticava la concezione, sostenuta da alcuni filosofi greci, per cui lo spazio era composto di parti indivisibili. Infatti, lui afferma, se queste parti sono indivisibili allora non possonno susseguirsi ma cadono insieme, come due punti non si possono toccare ma solo fondere in uno. Tutto ciò che e continuo, secondo Aristotele, si può dividere nell'infinità. E quest'infinito può essere solo infinito potenziale.

Il Petrić ritiene che esiste lo spazio attuale infinito, e che la sua proprietà è di non poter essere maggiore. In opposizione al massimo spazio sta il minimo spazio, cioè uno spazio che non può venir ridotto ulteriormente. È una parte indivisibile per es. di una linea o della superficie. Questa parte minima è finita. Un tale concetto di infinità attuale, come pure la concezione dell'infinito che non si può render maggiore e del minimo che non si può rendere minore, il Petrić l'ha preso da Niccolò da Cusa.

Aristotele dimostrava che non può esistere lo spazio indivisibile. Il Petrić non nomina da nessuna parte esplicitamente questa prova ma la complessiva concezione del Petrić dello spazio, delle parti indivisibili e del punto, parla contro una tale prova. È in ciò la grande differenza tra il Petrić e Niccolò da Cusa. Secondo il Petrić esiste la minima parte indivisibile dello spazio.

Ma in esso esiste un minimum che è diverso dallo spazio e non è spazio. È quello — dice il Petrić — che di solito viene chiamato punto. Il punto per il Petrić non è né spazio né sua parte, esso si trova solo nello spazio. Non ha estensione e perciò è opposto allo spazio, che invece la possiede. La linea è lo spazio che sta tra due punti cosicché i punti sono i suoi estremi. Così anche la minima

linea indivisibile ha per estremi i punti. Queste parti indivisibili per es. due linee indivisibili avranno così un estremo comune, ma le parti non saranno congruenti. In tal modo viene respinta l'obiezione di Aristotele sull'accettazione delle parti indivisibili, e questo punto di vista si può ritenere il maggior contributo del Petrić alla comprensione del continuum. Il Petrić afferma inoltre che, siccome esiste la minima parte dello spazio, questo spazio non può venir diviso all'infinito.

Giordano Bruno aveva quasi identiche concezioni sulle parti indivisibili e sull'infinità.