Hrvatski matematički elektronski časopis *math.e*

Broj 10

http://e.math.hr/

Kosinus-sinus dekompozicija ortogonalnih matrica malog reda

Vjeran Hari i Vida Zadelj-Martić

Sadržaj:

1. Uvod u kosinus-sinus dekompoziciju

Realna matrica Q reda n je *ortogonalna* ako zadovoljava jedan od uvjeta: $Q^\tau Q = I$ ili $QQ^\tau = I$, pri čemu je sa Q^τ označena transponirana matrica matrice Q, dok je I jedinična matrica. Može se pokazati da uvjet $Q^\tau Q = I$ povlači $QQ^\tau = I$, a vrijedi i obratno, uvjet $QQ^\tau = I$ povlači $Q^\tau Q = I$. Uvjet $Q^\tau Q = I$ zapravo znači da su stupci matrice Q međusobno ortogonalni i da svi imaju jediničnu (duljinu) normu. Zato se kaže da su stupci ortogonalne matrice ortonormirani. Uvjet $QQ^\tau = I$ znači da su retci od Q ortonormirani.

Ortogonalne matrice su vrlo važne u konstrukciji matričnih algoritama jer imaju još neka važna svojstva. Ako pomnožimo proizvoljnu $n \times m$ matricu A slijeva s ortogonalnom matricom Q, tada stupci matrice QA imaju redom iste norme kao i stupci matrice A. Čak i više, kutovi između stupaca matrice A ostaju nepromijenjeni pri prelasku na matricu QA. Ista svojstva invarijantnosti vrijede i za retke prizvoljne $m \times n$ matrice B pri prelasku na matricu BQ. Konačno, produkt ortogonalnih matrica je opet ortogonalna matrica, inverz ortogonalne matrice je ortogonalna matrica, a i jedinična matrica je ortogonalna.

Kosinus-sinus dekompozicija (kraće, CS dekompozicija ili CSD) ortogonalne matrice Q vezana je uz 2×2 particije matrice Q,

$$Q = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{bmatrix}, \tag{1}$$

pri čemu su Q_{11} i Q_{22} kvadratne reda k i $n-k$, gdje je k između 1 i $n-1$. Za takvu particiju CS dekompozicija ima sljedeći oblik

$$\begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{11} & \\ & U_{22} \end{bmatrix} \Theta \begin{bmatrix} V_{11} & \\ & V_{22} \end{bmatrix}^\tau, \tag{2}$$

gdje je

$$\Theta = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & \Gamma & -\Sigma \\ 0 & \Sigma & \Gamma \end{bmatrix} \begin{matrix} \left.\vphantom{\begin{matrix} I \\ 0 \end{matrix}}\right\} k \\ \} \; n-k \end{matrix} \qquad \text{ili} \qquad \Theta = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & \Gamma & -\Sigma \\ 0 & \Sigma & \Gamma \end{bmatrix} \begin{matrix} \} \; k \\ \left.\vphantom{\begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}}\right\} n-k \end{matrix}, \tag{3}$$

ovisno o tome je li $k \geqslant n - k$ ili je $k < n - k$. Ako je $k = n - k$, tada se u prvom ili drugom obliku matrice Θ u relaciji (3) ispušta jedinična matrica.

Pritom su Γ i Σ dijagonalne matrice s nenegativnim dijagonalnim elementima γ_i i σ_i za koje vrijedi $\gamma_1 \geqslant \gamma_2 \geqslant \ldots \geqslant 0$ i $\gamma_i^2 + \sigma_i^2 = 1$ za sve i. Zbog zadnjeg svojstva, dijagonalni elementi γ_i poistovjećuju se s kosinusima, a σ_i sa sinusima nekih kutova, pa odatle i naziv kosinus-sinus dekompozicija ortogonalne matrice. Očito mora vrijediti $0 \leqslant \sigma_1 \leqslant \sigma_2 \leqslant \ldots \leqslant 1$. Uočimo također da za dijagonalne matrice Γ i Σ vrijedi $\Gamma^2 + \Sigma^2 = I$. U gornjim relacijama 0 označava nul-matricu odgovarajućeg tipa. Matrice U_{11} i V_{11} (U_{22} i V_{22}) su ortogonalne reda k (reda $n - k$).

Kako bi izlaganje bilo što jednostavnije, mi ćemo u ovom članku izvesti CS dekompozicije ortogonalnih matrica reda 2, 3 i 4, te pokazati jednu njihovu primjenu. No, prije toga trebamo razviti "alate" koje ćemo koristiti. Jedan od najvažnijih alata je singularna dekompozicija koju ćemo uglavnom koristiti za matrice reda dva.

2. Singularna dekompozicija matrice reda dva

U konstrukciji algoritma za računanje CS dekompozicije ortogonalnih matrica koristi se jedna od najvažnijih matričnih dekompozicija: *singularna dekompozicija* (engl. *singular value decomposition* ili kraće SVD). Za naše potrebe, bit će dovoljno znati kako ju izračunati za matrice reda dva.

Neka je A proizvoljna matrica reda dva. Singularna dekompozicija matrice A je svaki rastav oblika

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = U \begin{bmatrix} \alpha_1 & \\ & \alpha_2 \end{bmatrix} V^\tau = U \Xi V^\tau, \quad \alpha_1 \geqslant \alpha_2 \geqslant 0, \tag{4}$$

gdje su U i V ortogonalne matrice reda dva. Kako izgledaju ortogonalne matrice reda dva? To su ili rotacije ili reflektori (zrcaljenja) u ravnini, pa proizvoljna ortogonalna matrica W reda dva ima jedan od sljedećih dvaju oblika

$$W = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \quad \text{ili} \quad W = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{bmatrix}.$$

Pritom je $\varphi \in [0\,,\,2\pi]$ kut kojim je određena W. Neka je

$$x = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \rho \begin{bmatrix} \cos\psi \\ \sin\psi \end{bmatrix}, \quad \rho = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$$

proizvoljni vektor. Tada produkt $y = Qx$ ima u slučaju rotacije oblik

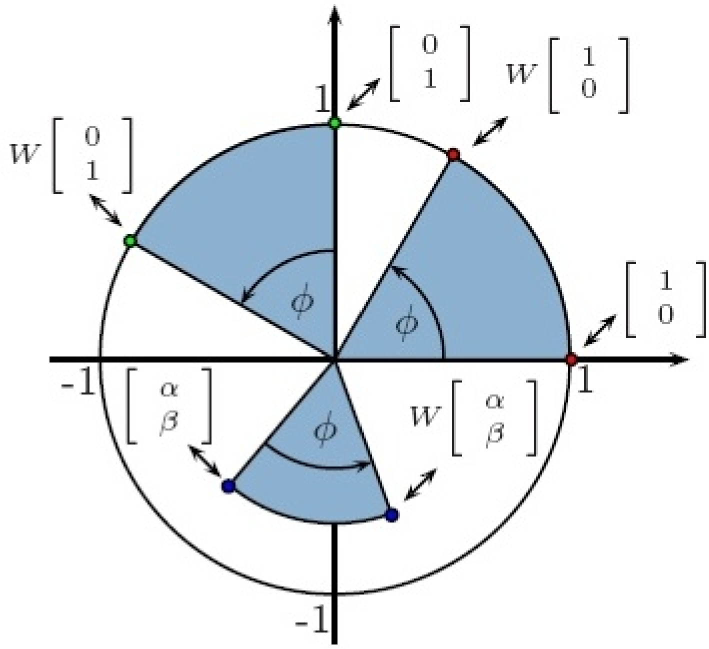
$$y = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} x = \rho \begin{bmatrix} \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi & \sin\psi \\ \sin\varphi\cos\psi + \cos\varphi & \sin\psi \end{bmatrix} = \rho \begin{bmatrix} \cos(\varphi+\psi) \\ \sin(\varphi+\psi) \end{bmatrix},$$

dok u slučaju reflektora postaje

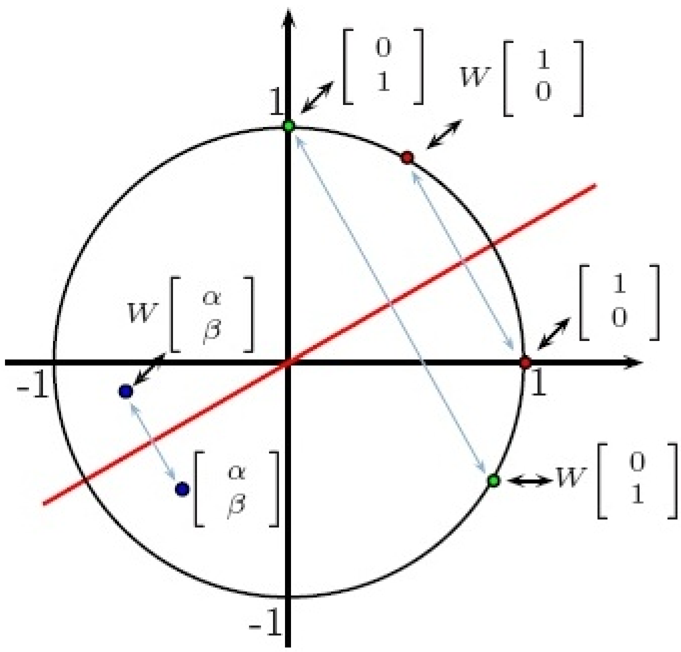
$$y = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{bmatrix} x = \rho \begin{bmatrix} \cos\varphi\cos\psi + \sin\varphi \sin\psi \\ \sin\varphi\cos\psi - \cos\varphi \sin\psi \end{bmatrix} = \rho \begin{bmatrix} \cos(\varphi-\psi) \\ \sin(\varphi-\psi) \end{bmatrix}.$$

Uočimo da se vektori x definirani kutem $\varphi/2$ ne mijenjaju kad se množe s reflektorom (oni su u "zrcalu").

Sljedeća slika daje geometrijski prikaz ovih transformacija pomoću točaka ravnine. Pritom smo vektoru $[\alpha\ \beta]^\tau$ jednoznačno pridružili točku (α, β) ravnine. Prikazali smo kako se transformiraju vektori $[1\ 0]^\tau$, $[0\ 1]^\tau$ i $[\alpha\ \beta]^\tau$ pri množenju s W. Odabrali smo $\varphi = 60°$.



W **je rotacija**



W **je reflektor**

Budući da W ne mijenja normu vektora x, možemo smatrati da je Wx rotirani vektor x. Pritom, ako je W rotacija, onda se svaki x rotira za kut φ. Ako je W reflektor, onda kut rotacije ovisi i o vektoru x

(kutu ψ). Stoga nam singularna dekompozicija daje jednostavnu geometrijsku interpretaciju transformacije $x \mapsto Ax = U\Xi V^\tau x$: prvo se x rotira u vektor $V^\tau x$, zatim se komponente od $V^\tau x$ pomnože nenegativnim brojevima α_1 i α_2, te se dobije vektor $\Xi V^\tau x$. Konačno, $\Xi V^\tau x$ se rotira matricom U. Budući da množenje s V^τ i U ne mijenja normu vektora, norma od Ax ovisi jedino o singularnim vrijednostima matrice A. Isti zaključak vrijedi i kad je A višeg reda.

Jedan algoritam kako izračunati singularnu dekompoziciju (4), pri čemu su U i V matrice rotacije, opisan je u članku [ZA]. Stoga, kad nam zatreba singularna dekompozicija matrice reda dva, možemo koristiti taj algoritam. Više o singularnoj dekompoziciji može se naći npr. u poznatoj knjizi [GO].

3. CS dekompozicija ortogonalnih matrica reda 2 i 3

CS dekompozicija ortogonalne matrice Q reda 2, koja je definirana kutem φ, ima oblik

$$Q = \begin{bmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} |\cos\varphi| & -|\sin\varphi| \\ |\sin\varphi| & |\cos\varphi| \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{bmatrix}.$$

Bez obzira je li Q rotacija ili reflektor, uvijek je moguće odabrati predznake u 1. i 3. matrici na desnoj strani gornje jednakosti tako da relacija vrijedi. Budući da ortogonalna matrica reda jedan ima oblik [1] ili [−1], desna strana u zadnjoj relaciji doista predstavlja CSD od Q.

Neka je sada ortogonalna matrica Q reda 3. Gledajući relacije (1), (2), (3), zaključujemo da CSD za Q ima jedan od oblika,

$$Q = \left[\begin{array}{c|c} Q_{11} & Q_{12} \\ \hline Q_{21} & Q_{22} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} U_{11} & 0 \\ \hline 0 & \pm 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ \hline 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} V_{11}{}^{\tau} & 0 \\ \hline 0 & \pm 1 \end{array}\right] \quad Q_{11} \text{ je reda 2,}$$

ili

$$Q = \left[\begin{array}{c|c} Q_{11} & Q_{12} \\ \hline Q_{21} & Q_{22} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} \pm 1 & 0 \\ \hline 0 & U_{22} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|cc} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} \pm 1 & 0 \\ \hline 0 & V_{22}{}^{\tau} \end{array}\right] \quad Q_{11} \text{ je reda 1,}$$

pri čemu ±1 znači 1 ili -1.

Promotrimo prvi slučaj, kad je Q_{11} reda dva. Prvo izračunajmo singularnu dekompoziciju od Q_{11}. Dobijemo ortogonalne matrice $\tilde{U}_{11}$ i $\tilde{V}_{11}$, te nenegativne brojeve γ_1 i γ_2, takve da vrijedi

$$Q_{11} = \tilde{U}_{11} \begin{bmatrix} \gamma_1 & 0 \\ 0 & \gamma_2 \end{bmatrix} \tilde{V}_{11}{}^{\tau}, \quad \gamma_1 \geqslant \gamma_2 \geqslant 0\,.$$

Pomoću $\tilde{U}_{11}$ i $\tilde{V}_{11}$ načinimo ortogonalne matrice

$$\mathrm{U} = \begin{bmatrix} \tilde{U}_{11} & 0 \\ 0 & \mathrm{sign}(q_{33}) \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad V = \begin{bmatrix} \tilde{V}_{11} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

gdje je $Q_{22} = [q_{33}]$, a $\mathrm{sign}(q_{33})$ je predznak od q_{33} (1 ili -1). Pomnožimo $U^\tau QV$ i označimo taj umnožak s X. Ako pokažemo da je $X = \Theta$, gdje je Θ oblika kao prva matrica u relaciji (3), dokazali smo da je $Q = U\Theta V^\tau$, CSD matrice Q.

Izračunajmo elemente od X,

$$X = U^\tau Q V = \begin{bmatrix} \tilde{U}_{11} & 0 \\ 0 & \mathrm{sign}(q_{33}) \end{bmatrix}^\tau \left[\begin{array}{c|c} Q_{11} & Q_{12} \\ \hline Q_{21} & Q_{22} \end{array}\right] \begin{bmatrix} \tilde{V}_{11} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \left[\begin{array}{c|c} \tilde{U}_{11}{}^\tau Q_{11} \tilde{V}_{11} & \tilde{U}_{11}{}^\tau Q_{12} \\ \hline \mathrm{sign}(q_{33}) Q_{21} & |q_{33}| \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|c} \gamma_1 & 0 & \alpha_1 \\ 0 & \gamma_2 & \alpha_2 \\ \hline \beta_1 & \beta_2 & |q_{33}| \end{array}\right].$$

Budući da je X ortogonalna, prva dva stupca, kao i prva dva retka, moraju biti ortogonalna. To nam daje sljedeće relacije

$$\gamma_1 \cdot 0 + 0 \cdot \gamma_2 + \beta_1 \beta_2 = 0, \quad \text{dakle } \beta_1 \beta_2 = 0,$$
$$\gamma_1 \cdot 0 + 0 \cdot \gamma_2 + \alpha_1 \alpha_2 = 0, \quad \text{dakle } \alpha_1 \alpha_2 = 0.$$

Kad bi bilo $\gamma_1 = 0$ moralo bi zbog $\gamma_1 \geqslant \gamma_2 \geqslant 0$ biti i $\gamma_2 = 0$. To, zajedno s uvjetom $\beta_1\beta_2 = 0$ povlači da je ili prvi ili drugi stupac od X sastavljen od samih nula. Budući da se to protivi ortogonalnosti matrice X (svi stupci i svi retci od X su jedinični), mora biti $\gamma_1 > 0$. Tvrdimo da mora biti $\gamma_1 = 1$. Zaista, kad bi bilo $\gamma_1 < 1$, bilo bi zbog $\gamma_2 \leqslant \gamma_1$, $\gamma_2 < 1$. Kako je $|\beta_1| = \sqrt{1-\gamma_1^2}$, $|\beta_2| = \sqrt{1-\gamma_2^2}$ morali bi β_1 i β_2 biti različiti od nule, a to je nemoguće jer je $\beta_1\beta_2 = 0$. Time smo pokazali da je $\gamma_1 = 1$ i $\beta_1 = 0$. Također, budući da je $|\alpha_1| = \sqrt{1-\gamma_1^2}$, mora biti i $\alpha_1 = 0$. Dakle, ortogonalna matrica X ima oblik

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_2 & \alpha_2 \\ 0 & \beta_2 & |q_{33}| \end{bmatrix} \quad \text{pa je} \quad \begin{bmatrix} \gamma_2 & \alpha_2 \\ \beta_2 & |q_{33}| \end{bmatrix} \text{ ortogonalna.}$$

Stoga je $|q_{33}| = \gamma_2$ i $\alpha_2 = -\beta_2$. Ako je $\beta_2 \geqslant 0$, $X = \Theta$. Ako je $\beta_2 < 0$, treba kao U i V uzeti matrice

$$U = \begin{bmatrix} \tilde{U}_{11} & 0 \\ 0 & -\mathrm{sign}(q_{33}) \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad \mathrm{V} = \begin{bmatrix} \tilde{V}_{11} & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Time je dokaz egzistencije CSD vezane za prvu particiju gotov.

Dokaz za drugu particiju matrice Q vrlo je sličan, pa ćemo ga sažeto prikazati. Prvo izračunamo singularnu dekompoziciju 2×2 podmatrice Q_{22},

$$Q_{22} = \tilde{U}_{22} \begin{bmatrix} \gamma_1 & 0 \\ 0 & \gamma_2 \end{bmatrix} \tilde{V}_{22}{}^\tau, \quad \gamma_1 \geqslant \gamma_2 \geqslant 0,$$

a zatim sagradimo matrice U i V kako slijedi

$$U = \begin{bmatrix} \mathrm{sign}(q_{11}) & 0 \\ 0 & \tilde{U}_{22} \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad V = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \tilde{V}_{22} \end{bmatrix},$$

gdje je $Q_{11}=[q_{11}]$. Matrica $X=U^\tau QV$ sada ima oblik

$$X = \begin{bmatrix} |q_{11}| & \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \gamma_1 & 0 \\ \beta_2 & 0 & \gamma_2 \end{bmatrix}, \quad \gamma_1 \geqslant \gamma_2 \geqslant 0.$$

Istim zaključivanjem, odmah dobijemo $\gamma_1 = 1$, $\alpha_1 = 0$, $\beta_1 = 0$, te $|q_{11}| = \gamma_2$ i $\beta_2 = -\alpha_2$. Ako je $\beta_2 \geqslant 0$, U i V daju $X = \Theta$. Ako je $\beta_2 < 0$, moramo U i V promijeniti, tako da im promijenimo predznake u svim elementima zadnjih stupaca.

Uočimo da prvi oblik CS rastava ortogonalne matrice Q ima rotacije u istim ravninama kao i rotacije vezane uz Eulerove kutove. Stoga je θ Eulerov kut ako je $q_{33} \geqslant 0$, jer je $|q_{33}| = \cos\theta \geqslant 0$ i jer je q_{33} kosinus Eulerova kuta. Za ostale kutove mogla bi se napraviti analiza, jer matrice U_{11} i V_{11} mogu biti i reflektori. Također, u analizi bi se trebalo pretpostaviti da je determinanta od Q jednaka 1.

4. CS dekompozicija ortogonalne matrice reda 4

Za ortogonalnu matricu Q reda 4 postoje tri moguće particije koje daju CS dekompoziciju: kad je Q_{11} reda 1, 2 i 3. Započnimo razmatranje s najzanimljivijim slučajem kad su obje podmatrice Q_{11} i Q_{22} reda dva.

4.1 Q_{11} je reda dva

Izračunajmo singularne dekompozicije podmatrica Q_{11} i Q_{22}, $Q_{11} = U_{11}\Gamma_1 V_{11}^\tau$, $Q_{22} = U_{22}\Gamma_2 V_{22}^\tau$ i sagradimo ortogonalne matrice

$$U = \begin{bmatrix} U_{11} & 0 \\ 0 & U_{22} \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad V = \begin{bmatrix} V_{11} & 0 \\ 0 & V_{22} \end{bmatrix}. \tag{5}$$

Množenjem lako dobijemo

$$\tilde{Q} = U^\tau Q V = \begin{bmatrix} U_{11}^\tau Q_{11} V_{11} & U_{11}^\tau Q_{12} V_{22} \\ U_{22}^\tau Q_{21} V_{11} & U_{22}^\tau Q_{22} V_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Gamma_1 & \tilde{Q}_{12} \\ \tilde{Q}_{21} & \Gamma_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \gamma_1 & 0 & a & b \\ 0 & \gamma_2 & c & d \\ e & f & \gamma_3 & 0 \\ g & h & 0 & \gamma_4 \end{bmatrix}, \quad \begin{array}{l} \gamma_1 \geqslant \gamma_2 \geqslant 0, \\ \gamma_3 \geqslant \gamma_4 \geqslant 0. \end{array} \tag{6}$$

Pritom su γ_1 i γ_2 singularne vrijednosti od Q_{11}, dok su γ_3 i γ_4 singularne vrijednosti od Q_{22}. Odatle je proizašlo da je $\gamma_1 \geqslant \gamma_2 \geqslant 0$ i $\gamma_3 \geqslant \gamma_4 \geqslant 0$.

Matrica $\tilde{Q}$ ima jedinične retke i stupce. Stoga je suma kvadrata elemenata svakog retka i svakog stupca jednaka jedan. To nam daje 8 jednadžbi, koje slijede iz oblika (6) matrice $\tilde{Q}$, a koje zapisujemo kroz četiri relacije:

$$\gamma_1^2 + a^2 + b^2 = 1 = \gamma_1^2 + e^2 + g^2 \tag{7}$$

$$\gamma_2^2 + c^2 + d^2 = 1 = \gamma_2^2 + f^2 + h^2 \tag{8}$$

$$\gamma_3^2 + a^2 + c^2 = 1 = \gamma_3^2 + e^2 + f^2 \tag{9}$$

$$\gamma_4^2 + b^2 + d^2 = 1 = \gamma_4^2 + g^2 + h^2 \tag{10}$$

Budući da je $\tilde{Q}$ ortogonalna, različiti stupci i retci međusobno su ortogonalni. To nam daje 12 jednadžbi, koje zapisujemo kroz 6 relacija:

$$ef + gh = \ 0 \ = ac + bd \tag{11}$$

$$\gamma_1 a + \gamma_3 e = \ 0 \ = \gamma_1 e + \gamma_3 a \tag{12}$$

$$\gamma_1 b + \gamma_4 g = \ 0 \ = \gamma_1 g + \gamma_4 b \tag{13}$$

$$\gamma_2 c + \gamma_3 f = \ 0 \ = \gamma_2 f + \gamma_3 c \tag{14}$$

$$\gamma_2 d + \gamma_4 h = \ 0 \ = \gamma_2 h + \gamma_4 d \tag{15}$$

$$ab + cd = \ 0 \ = eg + fh \tag{16}$$

Iz relacija (7) - (10), zbrajanjem prvih i drugih dviju lijevih jednadžbi, slijedi

$$\gamma_1^2 + a^2 + b^2 + \gamma_2^2 + c^2 + d^2 \ = \ 2 = \ \gamma_3^2 + a^2 + c^2 + \gamma_4^2 + b^2 + d^2,$$

pa je

$$\gamma_1^2 + \gamma_2^2 \ = \ \gamma_3^2 + \gamma_4^2. \tag{17}$$

Da bi $\tilde{Q}$ bila Θ, trebalo bi biti

$$\begin{array}{l} \gamma_1 = \gamma_3 \geqslant 0, \quad e = -a \geqslant 0 \\ \gamma_2 = \gamma_4 \geqslant 0, \quad h = -d \geqslant 0 \end{array}, \quad b = c = f = g = 0. \tag{18}$$

Promotrimo prvo slučaj $1 > \gamma_1 > 0$. Pretpostavimo da je $\gamma_1 \neq \gamma_3$. Tada relacija (12) daje

$$a = -\frac{\gamma_3}{\gamma_1} e, \quad e = -\frac{\gamma_3}{\gamma_1} a, \quad \text{pa je } a = \frac{\gamma_3^2}{\gamma_1^2} a, \quad e = \frac{\gamma_3^2}{\gamma_1^2} e, \quad \text{odakle slijedi } a = 0,\ e = 0.$$

Ako uvrstimo uvjete $a = 0$ i $e = 0$ u relaciju (7) i iskoristimo pretpostavku $\gamma_1 < 1$, dobijemo $b^2 = 1 - \gamma_1^2 = g^2 > 0$, pa je $|b| = |g| > 0$. Sada relacija (13) povlači

$$\frac{\gamma_4}{\gamma_1} = -\frac{b}{g}, \quad \text{odakle slijedi} \quad \gamma_4 = \gamma_1 \quad \text{i} \quad g = -b.$$

Sada relacija (11) daje $gh = 0 = bd$, pa je $h = 0 = d$. Pogledajmo relacije (8) i (9). Vidimo da mora biti: $\gamma_2^2 = 1 - c^2 = \gamma^2_3$, pa je $\gamma_2 = \gamma_3$. Zapravo smo dobili $\gamma_4 = \gamma_1 \geqslant \gamma_2 = \gamma_3$. Zbog $\gamma_3 \geqslant \gamma_4$, to znači $\gamma_4 = \gamma_3$. Međutim, to ne može biti, jer bi to značilo $\gamma_1 \geqslant \gamma_3$. Za dobivenu kontradikciju kriva je pretpostavka $\gamma_1 \neq \gamma_3$, pa mora biti $\gamma_1 = \gamma_3$.

Dakle, mora vrijediti $\gamma_1 = \gamma_3$, pa relacija (17) odmah daje $\gamma_2 = \gamma_4$. Sada imamo dvije mogućnosti: $\gamma_1 = \gamma_2$ ili $\gamma_1 > \gamma_2$.

Pretpostavimo da vrijedi $\gamma_1 = \gamma_2$. U tom slučaju zapravo vrijedi $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = \gamma_4$, pa stavimo $\gamma = \gamma_i$, za $i = 1, 2, 3, 4$. Pritom vrijedi $0 < \gamma < 1$. Relacije (12) - (15) povlače: $a = -e$, $b = -g$, $c = -f$, $d = -h$. S druge strane, oduzimanjem jednadžbe (7) od (10), pa opet (7) od (9), dobivamo $a^2 = d^2$, $b^2 = c^2$, tj. $|a| = |d|$ i $|b| = |c|$. Pretpostavimo da je $a \neq 0$. Tada relacije (11) i (16) daju dvije mogućnosti: ako je $d = a$, tada je $c = -b$ i ako je $d = -a$, tada je $c = b$. Prema tome $\tilde{Q}$ može imati jedan od oblika

$$\tilde{Q} = \begin{bmatrix} \gamma & 0 & a & b \\ 0 & \gamma & -b & a \\ -a & b & \gamma & 0 \\ -b & -a & 0 & \gamma \end{bmatrix} \quad \text{ili} \quad \tilde{Q} = \begin{bmatrix} \gamma & 0 & a & b \\ 0 & \gamma & b & -a \\ -a & -b & \gamma & 0 \\ -b & a & 0 & \gamma \end{bmatrix}.$$

Da bi vrijedila relacija (18), dovoljno je konstruirati rotaciju R, takvu da vrijedi

$$R\begin{bmatrix} -a \\ -b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -a \\ -b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma = \sqrt{a^2+b^2}, \quad \tan\alpha = \frac{b}{a}.$$

Kad se iz tan α izračunaju cos α i sin α, još se izračuna i reflektor

$$\tilde{R} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{bmatrix}.$$

Da bi matrica $\tilde{Q}$ iz relacije (6) poprimila traženi oblik matrice Θ iz relacije (3), potrebno je u prvom slučaju ($d = a$ i $c = -b$) zamijeniti matrice U_{22} i V_{22} s $U_{22}R^{\tau}$ i $V_{22}R^{\tau}$, a u drugom slučaju ($d = -a$ i $c = b$) zamijeniti matrice U_{22} i V_{22} s $U_{22}\tilde{R}^{\tau}$ i $V_{22}\tilde{R}^{\tau}$. Provjerite matričnim množenjem da se u oba slučaja dobije matrica

$$\tilde{Q} = \left[\begin{array}{cc|cc} \gamma & 0 & -\sigma & 0 \\ 0 & \gamma & 0 & -\sigma \\ \hline \sigma & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & \sigma & 0 & \gamma \end{array}\right].$$

Promotrimo sada slučaj $\gamma_1 > \gamma_2$. Kako vrijedi $\gamma_1 = \gamma_3$ i $\gamma_2 = \gamma_4$, proučimo prvo slučaj kad je $\gamma_2 = \gamma_4 = 0$.

Relacije (12), (13) i (15) svode se na $e = -a$, $b = 0 = g$, $c = 0 = f$, respektivno. Zato relacije (7) - (10) daju $|a| = \sqrt{1-\gamma_1^2} > 0$, $|d| = |h| = 1$.

Dakle je

$$\tilde{Q} = \left[\begin{array}{cc|cc} \gamma_1 & 0 & a & 0 \\ 0 & \gamma_2 & 0 & d \\ \hline -a & 0 & \gamma_1 & 0 \\ 0 & h & 0 & \gamma_2 \end{array}\right], \tag{19}$$

gdje je $d = \pm 1$, $h = \pm 1$. Da bi $\tilde{Q}$ postala Θ, potrebno je zamijeniti matrice U_{22} i V_{22} s $U_{22}J$ i $V_{22}\tilde{J}$, respektivno, gdje je

$$J = \begin{bmatrix} -\operatorname{sign}(a) & 0 \\ 0 & \operatorname{sign}(h) \end{bmatrix}, \quad \tilde{J} = \begin{bmatrix} -\operatorname{sign}(a) & 0 \\ 0 & -\operatorname{sign}(d) \end{bmatrix}.$$

Neka je sada $\gamma_2 = \gamma_4 > 0$. Relacije (12) i (15) kraćenjem s γ_1, odnosno γ_2, daju $e = -a$ i $h = -d$. Sada relacije (7) i (8) daju $|b| = |g|$ i $|c| = |f|$. Oduzimanjem jednadžbi u relaciji (7) od onih u relaciji (9) dobivamo $|c| = |b|$, $|g| = |f|$.

Dakle, vrijedi: $|b| = |c| = |f| = |g|$. Sada iz relacije (13) slijedi

$$b = -\frac{\gamma_4}{\gamma_1} g \quad \text{i} \quad g = -\frac{\gamma_4}{\gamma_1} b, \quad \text{pa je } b = \frac{\gamma_4^2}{\gamma_1^2} b, \quad \text{odnosno} \left(1 - \frac{\gamma_4^2}{\gamma_1^2} \right) b = 0.$$

Dakle $b = 0$, a to znači i $c = f = g = 0$. Stoga $\tilde{Q}$ ima oblik kao u relaciji (19), uz dodatni uvjet $h = -d$. Da bi $\tilde{Q}$ postala Θ, potrebno je zamijeniti matrice U_{22} i V_{22} s $U_{22}J'$ i $V_{22}J'$, gdje je

$$J' = \begin{bmatrix} -\mathrm{sign}(a) & 0 \\ 0 & -\mathrm{sign}(d) \end{bmatrix}.$$

Preostaje razmotriti slučajeve $\gamma_1 = 0$ i $\gamma_1 = 1$.

Neka je $\gamma_1 = 0$. Sada je nužno zbog relacije (17), $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = \gamma_4 = 0$. Relacije (7) - (16) pokazuju da su

$$W_1 = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad W_2 = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$$

proizvoljne ortogonalne matrice reda dva. S obzirom da je

$$\begin{bmatrix} -W_1^\tau & 0 \\ 0 & W_2^\tau \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & W_1 \\ W_2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{bmatrix} = \Theta,$$

bit će potrebno matrice U_{11} i U_{22} iz relacije (5) zamijeniti s $-U_{11}W_1$ i $U_{22}W_2$, respektivno.

Konačno, neka je $\gamma_1 = 1$. Iz relacija (7) slijedi $a = b = e = g = 0$. Pokažimo da je i $\gamma_3 = 1$. Kad bi bilo $\gamma_3 < 1$, tada relacija (9) povlači $|c| = |f| > 0$. Stoga možemo dijeliti s c, pa podijelimo jednadžbe u relaciji (14) s c. Ako su c i f istog predznaka, tada slijedi $\gamma_2 + \gamma_3 = 0$, pa je $\gamma_2 = 0$ i $\gamma_3 = 0$. Zbog $\gamma_3 \geqslant \gamma_4$ odmah slijedi $\gamma_4 = 0$, a to se protivi relaciji (17). Ako su c i f različitog predznaka, tada relacija (14) daje $\gamma_2 = \gamma_3$ i $f = -c$. Sada relacija (17) daje $\gamma_4 = 1$. Budući da je $\gamma_3 < 1$, dobili smo $\gamma_3 < \gamma_4$, a to je nemoguće. Dakle, pretpostavka $\gamma_3 < 1$ vodi u proturječje, pa mora biti $\gamma_3 = 1$. No, $\gamma_3 = 1$ i relacija (9) daje $f = c = 0$. Također, relacija (17) daje $\gamma_2 = \gamma_4$. Ortogonalna matrica Q ima oblik

$$\tilde{Q} = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_2 & 0 & d \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & h & 0 & \gamma_2 \end{array}\right], \quad \text{pri čemu je } \gamma_2 \geqslant 0. \tag{20}$$

Ako je $\gamma_2 > 0$, relacija (15) implicira $h = -d$. Tada Θ nastaje iz $\tilde{Q}$ ako U_{22} i V_{22} iz relacije (5) zamijenimo s $U_{22}J''$ i $V_{22}J''$, gdje je

$$J'' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\mathrm{sign}(d) \end{bmatrix}. \tag{21}$$

Ako je $\gamma_2 = 0$, tada relacija (8) pokazuje da vrijedi $|d| = |h| = 1$. Sada Θ nastaje iz $\tilde{Q}$ ako U_{22} i V_{22} iz relacije (5) zamijenimo s $U_{22}J'''$ i $V_{22}J''$, gdje je J'' kao u (21), a

$$J''' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathrm{sign}(h) \end{bmatrix}.$$

4.2 Q_{11} je reda jedan

Izračunajmo singularnu dekompoziciju podmatrice Q_{22}, $Q_{22} = U_{22}\Gamma_2 V_{22}^{\tau}$ i sagradimo ortogonalne matrice

$$U = \begin{bmatrix} \mathrm{sign}(q_{11}) & 0 \\ 0 & U_{22} \end{bmatrix} \quad \mathrm{i} \quad \mathrm{V} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & V_{22} \end{bmatrix}.$$

Množenjem se dobije

$$\tilde{Q} = U^{\tau} Q V = \begin{bmatrix} |q_{11}| & Q_{12}V_{22} \\ U_{22}{}^{\tau}Q_{21} & U_{22}{}^{\tau}Q_{22}V_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |q_{11}| & \tilde{Q}_{12} \\ \tilde{Q}_{21} & \Gamma_2 \end{bmatrix}$$

$$= \left[\begin{array}{c|ccc} \gamma_1 & a & b & c \\ \hline e & \gamma_2 & 0 & 0 \\ f & 0 & \gamma_3 & 0 \\ g & 0 & 0 & \gamma_4 \end{array}\right], \qquad \begin{array}{l} \gamma_1 \geqslant 0, \\ \gamma_2 \geqslant \gamma_3 \geqslant \gamma_4 \geqslant 0. \end{array} \tag{22}$$

Pritom je $\gamma_1 = |q_{11}|$ jedina singularna vrijednost od Q_{11}, dok su γ_2, γ_3, γ_4 singularne vrijednosti od Q_{22}. Kako izračunati singularnu dekompoziciju matrice reda 3 izlazi iz okvira ovog rada (vidjeti [GO]). Slučajeve kad je Q_{11} reda 1 i reda 3 ionako nećemo koristiti u primjenama CS dekompozicije u ovom radu.

Ortogonalnost matrice Q daje relacije

$$\gamma_1{}^2 + a^2 + b^2 + c^2 = \;\; 1 \;\; = \gamma_1{}^2 + e^2 + f^2 + g^2 \tag{23}$$

$$\gamma_2{}^2 + a^2 = \;\; 1 \;\; = \gamma_2{}^2 + e^2 \tag{24}$$

$$\gamma_3{}^2 + b^2 = \;\; 1 \;\; = \gamma_3{}^2 + f^2 \tag{25}$$

$$\gamma_4{}^2 + c^2 = \;\; 1 \;\; = \gamma_4{}^2 + g^2 \tag{26}$$

$$\gamma_1\, e + \gamma_2\, a = \;\; 0 \;\; = \gamma_1\, a + \gamma_2\, e$$

$$\gamma_1 f + \gamma_3\, b = \;\; 0 \;\; = \gamma_1\, b + \gamma_3 f$$

$$\gamma_1\, g + \gamma_4\, c = \;\; 0 \;\; = \gamma_1\, c + \gamma_4\, g \tag{27}$$

$$ab = \;\; 0 \;\; = ef \tag{28}$$

$$ac = \;\; 0 \;\; = eg \tag{29}$$

$$bc = \;\; 0 \;\; = fg \tag{30}$$

Prvo pokažimo da mora biti $a = 0$. Kad bi bilo $a \neq 0$, tada bi zbog relacija (28) i (29), moralo vrijediti $b = 0 = c$, a onda bi zbog (25) i (26) bilo $\gamma_3 = 1 = \gamma_4$. Budući da je zbog (24) $\gamma_2 = \sqrt{1 - a^2} < 1$, dobili bismo kontradikciju s pretpostavkom (22) da je $\gamma_2 \geqslant \gamma_3 \geqslant \gamma_4$.

Budući da je $a = 0$, zbog lijeve jednadžbe u (24) mora biti $\gamma_2 = 1$, a onda zbog desne jednadžbe $e = 0$.

Relacija (30) pokazuje da mora biti $b = 0$ ili $c = 0$.

Zbog relacije $\gamma_3 \geqslant \gamma_4$ i relacija (25) i (26), mora svakako biti $b = 0$.

Ako je i $c = 0$, tada relacije (25), (26) i (23) pokazuju da je $\tilde{Q} = I_4$ jedinična matrica reda 4, koja se uklapa u oblik od Θ.

Ako je $c \neq 0$, onda je $\gamma_1 = \sqrt{1-c^2} = \gamma_4$, pa relacija (27) pokazuje da je $g = -c$. Tada je

$$\tilde{Q} = \left[\begin{array}{c|ccc} \gamma_1 & 0 & 0 & c \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -c & 0 & 0 & \gamma_1 \end{array}\right]$$

pa još treba osigurati da je $-c \geqslant 0$. To se postiže tako da se zadnji redak i stupac od $\tilde{Q}$, odnosno zadnji stupac od U_{22} i od V_{22} pomnoži sa $-\mathrm{sign}(c)$.

4.3 Q_{11} je reda tri

Taj slučaj može se svesti na prethodni korištenjem transformacije sličnosti sa specijalnom permutacijom. Ipak, zbog cjelovitosti prikaza i zbog korištenja što manjeg obujma iz teorije matrica, načinit ćemo cjelovitu analizu.

Izračunajmo singularnu dekompoziciju podmatrice Q_{11}, $Q_{11} = U_{11}\Gamma_1 V_{11}^\tau$ i sagradimo ortogonalne matrice

$$U = \begin{bmatrix} U_{11} & 0 \\ 0 & \mathrm{sign}(q_{44}) \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad V = \begin{bmatrix} V_{11} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Množenjem se dobije

$$\tilde{Q} = U^\tau Q V = \begin{bmatrix} U_{11}^\tau Q_{11} V_{11} & U_{11}^\tau Q_{12} \\ \mathrm{sign}(q_{44}) Q_{21} & |q_{44}| \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Gamma_1 & \tilde{Q}_{12} \\ \tilde{Q}_{21} & |q_{44}| \end{bmatrix}$$

$$= \left[\begin{array}{ccc|c} \gamma_1 & 0 & 0 & a \\ 0 & \gamma_2 & 0 & b \\ 0 & 0 & \gamma_3 & c \\ \hline e & f & g & \gamma_4 \end{array}\right], \quad \begin{array}{l} \gamma_1 \geqslant \gamma_2 \geqslant \gamma_3 \geqslant 0, \\ \gamma_4 \geqslant 0. \end{array} \tag{31}$$

Pritom je $\gamma_4 = |q_{44}|$ jedina singularna vrijednost od Q_{22}, dok su γ_1, γ_2 i γ_3 singularne vrijednosti od Q_{11}. Ortogonalnost matrice Q daje relacije

$$\gamma_1^2 + a^2 = 1 = \gamma_1^2 + e^2 \tag{32}$$

$$\gamma_2^2 + b^2 = 1 = \gamma_2^2 + f^2 \tag{33}$$

$$\gamma_3^2 + c^2 = 1 = \gamma_3^2 + g^2 \tag{34}$$

$$\gamma_4^2 + a^2 + b^2 + c^2 = 1 = \gamma_4^2 + e^2 + f^2 + g^2 \tag{35}$$

$$\gamma_1\, e + \gamma_4\, a = \ 0\ = \gamma_1\, a + \gamma_4\, e$$

$$\gamma_2 f + \gamma_4\, b = \ 0\ = \gamma_2\, b + \gamma_4 f$$

$$\gamma_3\, g + \gamma_4\, c = \ 0\ = \gamma_3\, c + \gamma_4\, g \tag{36}$$

$$ab = \ 0\ = ef \tag{37}$$

$$ac = \ 0\ = eg \tag{38}$$

$$bc = \ 0\ = fg \tag{39}$$

Prvo pokažimo da mora biti $a = 0$. Kad bi bilo $a \neq 0$, tada bi zbog relacija (37) i (38) moralo vrijediti $b = 0 = c$, a onda bi zbog (33) i (34) bilo $\gamma_2 = 1 = \gamma_3$. Budući da je zbog (32) $\gamma_1 = \sqrt{1 - a^2} < 1$, dobili bismo kontradikciju s pretpostavkom (31) da je $\gamma_1 \geqslant \gamma_2 \geqslant \gamma_3$.

Budući da je $a = 0$, mora po relaciji (32) biti $\gamma_1 = 1$, a onda također i $e = 0$. Relacija (39) pokazuje da mora biti $b = 0$ ili $c = 0$. Zbog relacije $\gamma_2 \geqslant \gamma_3$ i relacija (33), (34), mora svakako biti $b = 0$.

Ako je i $c = 0$, onda relacije (33) i (34) pokazuju da je $\tilde{Q} = I_4$ jedinična matrica reda 4 koja se uklapa u oblik od Θ.

Ako je $c \neq 0$, onda je $\gamma_3 = \sqrt{1 - c^2} = \gamma_4$, pa relacija (36) pokazuje da je $g = -c$. Tada je

$$\tilde{Q} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_3 & c \\ \hline 0 & 0 & -c & \gamma_3 \end{array}\right]$$

pa još treba osigurati da je $-c > 0$. To se postiže tako da se zadnji redak i stupac od $\tilde{Q}$ te zadnji stupac od U_{22} i od V pomnože sa $-\mathrm{sign}(c)$.

5. Jedna primjena CS dekompozicije

Iz teorije matrica poznato je da se svaka simetrična matrica A reda n može prikazati u obliku $A = Q\Lambda Q^\tau$, pri čemu je Q ortogonalna matrica, a $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$ dijagonalna matrica.

Stupci matrice Q čine ortonormiran sistem vlastitih vektora, a dijagonalni elementi $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ matrice Λ su vlastite vrijednosti od A. Takav rastav zove se spektralni rastav (ili dekompozicija) simetrične matrice. Zbog $\Lambda = Q^\tau A Q$, kaže se da Λ nastaje iz A *transformacijom sličnosti* pomoću matrice Q.

Za potrebe ubrzavanja tzv. dijagonalizacijskih metoda za računanje spektralnog rastava simetrične matrice reda n, javlja se problem što točnijeg i bržeg računanja spektralnih rastava simetričnih matrica malih dimenzija. Ovdje ćemo pokazati kako nas CS dekompozicija ortogonalnih matrica dimenzija 3 i 4 upućuje na smjer u kojem treba nastaviti istraživanje, za nalaženje što efikasnijeg i točnijeg algoritma za simetrične matrice reda 3 i 4.

5.1. Dijagonalizacija simetrične matrice reda 3

Neka je Q ortogonalna matrica reda 3. Tada su

$$Q = \left[\begin{array}{c|c} Q_{11} & Q_{12} \\ \hline Q_{21} & Q_{22} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} U_{11} & 0 \\ \hline 0 & \pm 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ \hline 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} V_{11}^{\tau} & 0 \\ \hline 0 & \pm 1 \end{array}\right] \quad Q_{11} \text{ je reda } 2,$$

$$Q = \left[\begin{array}{c|c} Q_{11} & Q_{12} \\ \hline Q_{21} & Q_{22} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} \pm 1 & 0 \\ \hline 0 & U_{22} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|cc} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} \pm 1 & 0 \\ \hline 0 & V_{22}^{\tau} \end{array}\right] \quad Q_{11} \text{ je reda } 1,$$

njene CS dekompozicije. Vidimo da se svaka ortogonalna matrica Q reda 3 može prikazati kao produkt od tri ravninske rotacije. Prvi red zadnje relacije pokazuje da je

$$Q = \Phi_1 R_{12}(\psi_1) R_{23}(\psi_2) R_{12}(\psi_3) \Phi_2, \quad \psi_2 = \theta,$$

gdje su Φ_1 i Φ_2 dijagonalne matrice predznaka. Kako Φ_2 ne utječe na dijagonalizaciju jer je $\Phi_1 D \Phi_1 = D$ za svaku dijagonalnu matricu D, problem se svodi na traženje što efikasnijeg i točnijeg algoritma za računanje kutova ψ_1, ψ_2 i ψ_3.

Drugi red iste relacije pokazuje da Q možemo tražiti u obliku

$$Q = \Phi_1 R_{23}(\psi_1) R_{13}(\psi_2) R_{23}(\psi_3) \Phi_2.$$

Dakle, tražena ortogonalna matrica može se prikazati u obliku triju ravninskih rotacija (i jedne dijagonalne matrice predznaka). Drugim riječima, simetrična matrica reda 3 može se dijagonalizirati korištenjem samo triju rotacija. Pritom o rotacijama znamo u kojem redoslijedu i u kojim ravninama rotiraju, ali ne znamo jednostavno izračunati kutove. Nalaženje efikasnog algoritma za brzo i točno računanje tih kutova na računalima zanimljiv je istraživački problem.

5.2. Dijagonalizacija simetrične matrice reda 4

Ovdje ćemo na sličan način pokazati da se simetrična matrica reda 4 može dijagonalizirati pomoću 6 rotacija i o rotacijama znamo sve (u kojem redoslijedu i u kojim ravninama rotiraju) osim kutova. Promatrat ćemo samo slučaj kad je gornja vodeća podmatrica Q_{11} reda 2. Ostale particije, kad je Q_{11} reda 1 ili 3, daju nepovoljniji krajnji rezultat, koji uključuje 8 rotacija, pa ih nećemo razmatrati.

Relacija (2) se za ortogonalnu matricu reda 4 može zapisati kao

$$Q = \Phi_1 \left[\begin{array}{cc|cc} c_1 & -s_1 & 0 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & c_2 & -s_2 \\ 0 & 0 & s_2 & c_2 \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc|cc} c_3 & 0 & -s_3 & 0 \\ 0 & c_4 & 0 & -s_4 \\ \hline s_3 & 0 & c_3 & 0 \\ 0 & s_4 & 0 & c_4 \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc|cc} c_5 & -s_5 & 0 & 0 \\ s_5 & c_5 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & c_6 & -s_6 \\ 0 & 0 & s_6 & c_6 \end{array}\right]^{\tau} \Phi_2$$

pri čemu je $c_i = \cos\psi_i$, $s_i = \sin\psi_i$ za $i = 1,\ldots,6$. Ako su

$$A = \left[\begin{array}{cc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \hline a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{array}\right] \quad \text{i} \quad Q \text{ takve da je } A = Q\Lambda Q^{\tau},$$

tada Φ_1 i prve dvije rotacije "pripremaju teren" za sljedeće dvije rotacije koje moraju "poništiti" cijeli blok koji čine elementi a_{13}, a_{14}, a_{23} i a_{24}. Dakle prve 4 rotacije, transformacijama sličnosti na A, trebaju pretvoriti te elemente u nulu. To mora biti tako, jer zadnje dvije rotacije ne mijenjaju normu (korijen iz sume kvadrata elemenata) tog bloka. Pa ako on nije postao nul-matrica prije primjene zadnjih dviju rotacija, i na kraju će ostati takav, različit od nul-matrice. Stoga, zadnje dvije rotacije pretvaraju u nule elemente na pozicijama elemenata a_{12} i a_{34}. Zadnja dijagonalna matrica predznaka Φ_2 nije potrebna iz gore spomenutih razloga.

U zaključku napominjemo da smo uz prikaz CS dekompozicije ortogonalnih matrica do reda 4, otvorili i problem brzog računanja spektralne dekompozicije simetričnih matrica reda 3 i 4. Pritom smo dali upute o minimalnom broju i redoslijedu rotacija s obzirom na ravnine u kojima rotiraju. Algoritam za direktno računanje pripadnih rotacijskih kutova ψ_i izazovan je istraživački problem.

Autori zahvaljuju anonimnim recenzentima na korisnim primjedbama koje su poboljšale kvalitetu ovog rada.

Literatura

[GO] G.H. Golub i C.F. Van Loan, *Matrix Computations*, The Johns Hopkins University Press, drugo izdanje, 1989.

[ZA] V. Zadelj-Martić, *Singularna dekompozicija matrice reda dva*, Matematičko-fizički list (prihvaćeno za objavljivanje).
