ISSN 1864-6168
UDK 62

PRIMJENA METODE KONAČNIH ELEMENATA U GRAĐEVINARSTVU

APPLICATION OF FINITE ELEMENTS METHOD IN CIVIL ENGINEERING

Vladimir Mirković, Josip Užar

Stručni članak

Sažetak: *Najtočnija matematička rješenja za neki nosivi konstrukcijski sustav proizlaze iz parcijalnih diferencijal- nih jednadžbi. Npr., pronaći točno rješenje za štap svodi se na određivanje integracijskih konstanti s obzirom na osnovne relacije opisane rubnim uvjetima. Metodom konačnih elemenata radi se prijelaz iz parcijalne diferencijalne jednadžbe u sustav linearnih običnih jednadžbi, koji se može zapisati u matričnoj formulaciji, odnosno diskretizira se promatranu domenu u onoliko dijelova (konačnih elemenata) koliko treba da se dobije točno rješenje na traženim mjestima. U većini slučajeva MKE ne daje točno rješenje, ali su rezultati dovoljno precizni i prihvatljivi za inženjersku praksu. Rad prikazuje primjenu postupka po MKE na primjeru jednostavnih štapnih elemenata.*

Ključne riječi: *metoda konačnih elemenata, parcijalne diferencijalne jednadžbe, pomaci, čvorovi, krutost*

Professional paper

Abstract: *The most accurate mathematical solutions for a bearing structural system arise from partial differential equations. For example, finding the exact solution for a rod is reduced to the determination of the integration constants with respect to the basic relations described in boundary conditions. The finite element method is used for transition from partial differential equation into a system of linear ordinary equations which can be written in matrix formulation, i.e. the observed domain is discretized in a number of parts (finite elements) necessary to obtain a sufficiently accurate solution for the required places. In most cases, FEM does not give the exact solution, but the results are enough precise and acceptable for engineering practice. This paper presents the application procedure by FEM in the case of simple rod elements.*

Key words: *finite element method, partialdifferentialeq-uations, shifts, nodes, rigidity.*

1. UVOD

Metoda konačnih elemenata (MKE) je najraširenija metoda za proračun građevinskih konstrukcija. Njome se može rješavati svaka inženjerska zadaća. Pojavom sve snažnijih stolnih računala, danas inženjeri imaju velike mogućnosti za rješavanje različitih zadaća. Uz sve sofisticiranije statičke programe i jednostavnu grafičku prezentaciju rezultata, inženjeri mogu obraditi znatno više podataka nego prije. Osnova većine statičkih programa je upravo metoda konačnih elemenata. Metoda konačnih elemenata počela se razvijati u 50-tim godinama prošlog stoljeća. Isprva se počela primjenjivati metoda sila i metoda pomaka u matričnoj formi, koja je posebno pogodna za primjenu na računalima. Analogno tome su se proračunavale štapne konstrukcije, a ubrzo su se počeli rješavati površinski i prostorni problemi. Godine 1960. uvodi se i naziv Metoda konačnih elemenata (Clough). Do početka 60-tih godina razvijen je statički koncept MKE, a u tim godinama se počinju razvijati i varijacijski principi MKE. U 70-tim godinama prošlog stoljeća razvijaju se matematička pitanja točnosti metode i konvergencije rješenja. Metoda se razvija i dalje te se poboljšavaju postojeći konačni elementi, a pronalaze se i novi. U mehanici krutog tijela osnovne veze između naprezanja i deformacija postavljaju se na diferencijalno malom elementu. Te veze dovode do diferencijalnih jednadžbi koje s početnim i rubnim uvjetima definiraju odgovarajuću zadaću. Zbog složenog matematičkog modela nema puno rješenja u zatvorenom obliku. Zbog toga se vrlo često traže približna rješenja. Metodom konačnih elemenata se neko realno tijelo rastavlja (diskretizira) na konačni broj elemenata jednostavnog oblika. Elementi su međusobno spojeni samo u čvorovima. Nepoznanice problema su pomaci čvorova, a pomake unutar elementa se određuje interpolacijom. Iz određenih pomaka određuju se ostale veličine (sile, naprezanja, ...).

2. OPĆENITO O METODI KONAČNIH ELEMENATA

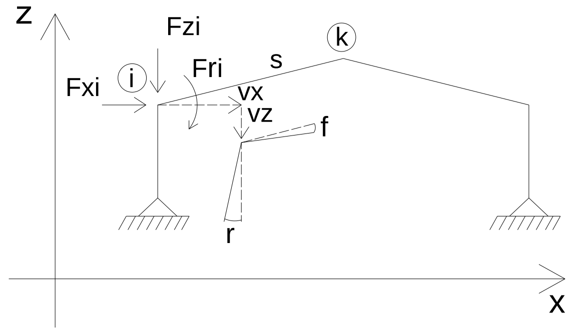
Osnovna matrična jednadžba nekog sustava glasi:

$E \cdot v = S$ (1)

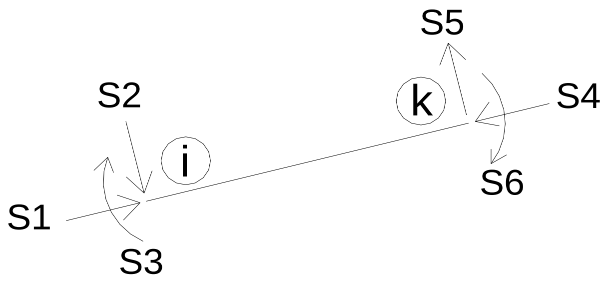
gdje je:

E – matrica krutosti
v – vektor nepoznatih čvornih pomaka
S – vektor poznatih sila u čvorovima

Ovo predstavlja sistem od n jednadžbi s n nepoznanica, odnosno stupnjeva slobode. U ovom će se stručnom radu ukratko prikazati osnovne postavke MKE naravninskom štapnom modelu. Slika 1. prikazuje ravninski nosač sa čvornim opterećenjem i pomacima, dok slika 2. prikazuje štap s sa silama koje djeluju na kraju štapa.



Slika 1. Ravninski nosač sa čvornim opterećenjem i pomacima



Slika 2. Sile na krajevima štapa s

Nekakav element konstrukcije se nalazi u nekom općem položaju u odnosu na globalni koordinatni sustav (GKS). Za svaki se element definira lokalni koordinatni sustav (LKS), čija se lokalna os x_l pruža od početnog čvora i prema krajnjem čvoru k. Orijentacija lokalnog koordinatnog sustava mora biti ista kao i orijentacija globalnog koordinatnog sustava. Za svaki štapni element ravninskog okvira nepoznato je 6 pomaka i to dvije translacije i jedna rotacija na početku i na kraju štapa.

$$v_l = v_{1l}, v_{2l}, v_{3l}\ v_{4l}, v_{5l}, v_{6l} \quad (2)$$

(l uz brojni indeks označava lokalni koordinatni sustav)

Ukupan broj nepoznanica cijelog sistema jednak je broju nepoznatih komponenti pomaka svakog čvora. Nepoznate sile na krajevima štapa:

$$S_l = S_{1l}, S_{2l}, S_{3l}\ S_{4l}, S_{5l}, S_{6l} \quad (3)$$

Veza između nepoznatih sila na kraju štapa i nepoznatih pomaka na kraju štapa je:

$$S_l = E_l \cdot v_l, (4)$$

gdje je:

S_l – vektor nepoznatih sila na krajevima štapa

E_l – lokalna matrica krutosti štapa

v_l – vektor nepoznatih pomaka na kraju štapa

Matrica krutosti jednog sistema određuje se tako da se na svakom mjestu nepoznatog pomaka daje jedinični pomak, pa se odrede sile u čvorovima uslijed jediničnog pomaka. Elementi lokalne matrice krutosti određuju se iz jednadžbe:

$$M_{i,k} = \frac{2 \cdot EI_{i,k}}{l_{i,k}} \cdot (2 \cdot \Phi_i + \Phi_k + 3 \cdot \Psi_{i,k}) + Mo_{i,k} \quad (5)$$

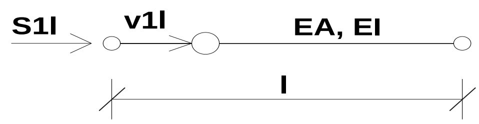
gdje je:

$M_{i,k}$ – moment u čvoru i
$EI_{i,k}$ – krutost štapa i
$l_{i,k}$ – dužina štapa
Φ_i, Φ_k – kutovi zaokreta štapa u čvoru i, odnosno k
$\Psi_{i,k}$ – nagib štapa
$Mo_{i,k}$ – moment od vanjskog opterećenja na obostrano upetom elementu

3. ODREĐIVANJE LOKALNE MATRICE KRUTOSTI

Prvo se postavljaju jedinični pomaci s obzirom na djelovanje jediničnih sila kako je to pokazano na slikama 3., 4., 5., 6., 7., 8.

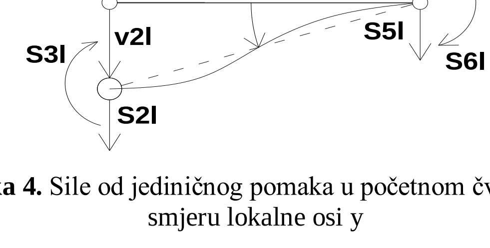
vl1 = 1:



Slika 3. Sile od jediničnog pomaka u početnom čvoru u smjeru lokalne osi x

Sll = EA / 1
S4l = - EA / 1

v2l = 1:

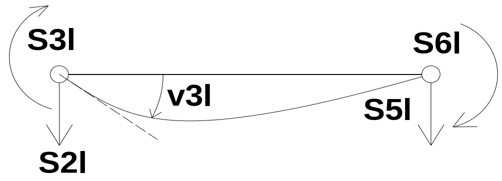


Slika 4. Sile od jediničnog pomaka u početnom čvoru u smjeru lokalne osi y

$S3l = S6l = 2EI/l \cdot (2 \cdot 0+0+3 \cdot 1/l) = 6EI/l^2$

$S2l = -S5l = (S31+S61)\ /\ l = 12EI\ /\ l^3$

v31 = 1:



Slika 5. Sile od jedinične rotacije u početnom čvoru

$S3l = 2EI/l \cdot (2 \cdot 1+0+0) = 4EI/l$

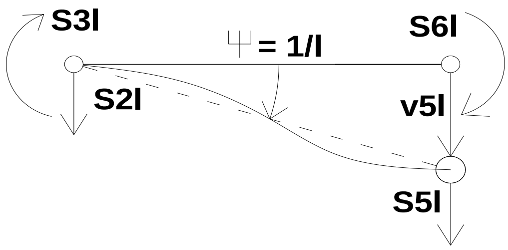
$S6l = 2EI/l \cdot (2 \cdot 0+1+0) = 2EI/l$

$S2l = -S5l = (S31+S61)\ /\ l = 6EI/l^2$

v41 = 1:

Slika 6. Sile od jediničnog pomaka u krajnjem čvoru u smjeru lokalne osi x

Sll = - EA / 1
S4l = EA / 1
v51 = 1:

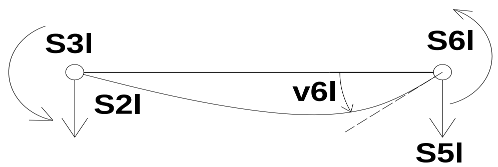


Slika 7. Sile od jediničnog pomaka u krajnjem čvoru u smjeru lokalne osi y

$S3l = S6l = 2EI/l \cdot (2 \cdot 0+0-3 \times 1/l) = -6EI/l^2$

$S2l = -S5l = (S31+S61)/l = -12EI/l^3$

v61 = 1:



Slika 8. Sile od jedinične rotacije u krajnjem čvoru

$S3l = 2EI/l \cdot (2 \cdot 0+1+0) = 2EI/l$

$S6l = 2EI/l \cdot (2 \cdot 1+0+0) = 4EI/l$

$S2l = -S5l = (S31+S61)\ /\ l = 6EI/l^2$

Matrica krutosti štapa:(6)

$$El = EI\ /\ l \cdot$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}
A/I & 0 & 0 & -A/I & 0 & 0 \\
0 & 12/1^2 & 6/1 & 0 & -12/1^2 & 6/1 \\
0 & 6/1 & 4 & 0 & -6/1 & 2 \\
\hline
-A/I & 0 & 0 & A/I & 0 & 0 \\
0 & -12/1^2 & -6/1 & 0 & 12/1^2 & -6/1 \\
0 & 6/1 & 2 & 0 & -6/1 & 4
\end{array}\right]$$

Lokalna matrica krutosti ima sljedeće važne osobine:

1. Svi elementi na glavnoj dijagonali su pozitivni, tj. $e_{i,i} > 0$
2. Matrica krutosti je simetrična oko glavne dijagonale, tj. $e_{i,j} = e_{j,i}$

Kako se uvjeti ravnoteže za svaki čvor sistema postavljaju u globalnom koordinatnom sustavu, treba transformirati lokalne pomake u globalne koordinate. Ta transformacija se radi matricom transformacije, koja je istog reda kao i lokalna matrica krutosti.

Matrica transformacije štapa: (7)

$$T =$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}
c & -s & 0 & 0 & 0 & 0 \\
s & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & c & -s & 0 \\
0 & 0 & 0 & s & c & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right]$$

gdje je:
c =cos α
s = sin α
α = kut nagiba između lokalne osi x i globalne osi x

Lokalni pomaci se izražavaju preko sljedeće matrične jednadžbe:

$$vl = T \cdot v \quad (8)$$

Sile na krajevima štapa u globalnom koordinatnom sustavu:

$$S = T^t \cdot Sl \quad (9)$$

Iz odnosa sila u čvorovima i pomaka čvorova slijedi:

$$\mathrm{Sl} = \mathrm{El} \cdot \mathrm{vl} \quad (10)$$

Uvrštavanjem gornje jednadžbe:

$$\mathrm{Sl} = \mathrm{El} \cdot \mathrm{T} \cdot \mathrm{v} \quad (11)$$

Množenjem obje strane jednadžbe s T^t:

$$\mathrm{T}^t \cdot \mathrm{Sl} = \mathrm{T}^t \cdot \mathrm{El} \cdot \mathrm{T} \cdot \mathrm{v} \quad (12)$$

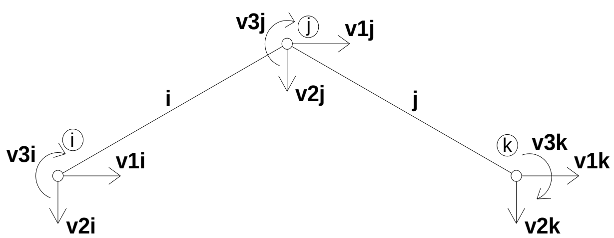
$$\mathrm{S} = \mathrm{E} \cdot \mathrm{v} \quad (13)$$

gdje je E globalna matrica krutosti jednog štapa.

$$\mathrm{E} = \mathrm{T}^t \cdot \mathrm{El} \cdot \mathrm{T} \quad (14)$$

4. FORMIRANJE MATRICE KRUTOSTI CIJELOG SUSTAVA

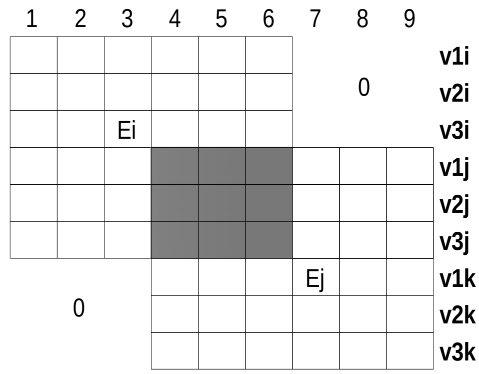
Matrica krutosti cijelog sistema sastavlja se od podmatrica krutosti svakog pojedinog elementa. Na mjestu spajanja dva elementa, tj. u čvoru, pomaci su jednaki za oba elementa (slika 9. prikazuje dva elementa spojena u čvoru j).



Slika 9. Pomaci u čvorovima elemenata

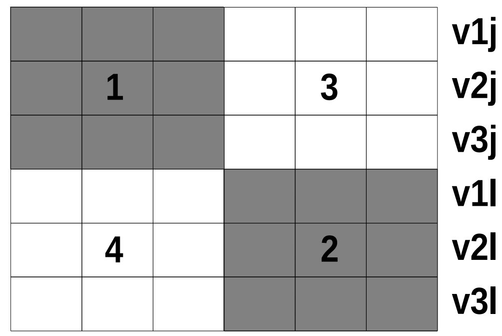
Na spoju dva elementa, u ovom slučaju u čvoru j, pomaci čvora j su zajednički za oba elementa. U matrici krutosti to znači da se zbrajaju podmatrice krutosti koje se odnose na taj. Ovdje osjenčani dijelovi predstavljaju pojedine lokalne matrice krutosti elemenata i i j. U tamnije osjenčanom području elementi matrica Ei i Ej se zbrajaju (slika 10.).

Npr.: $\mathrm{E}(4,4) = \mathrm{Ei}(4,4) + \mathrm{Ej}(1,1)$



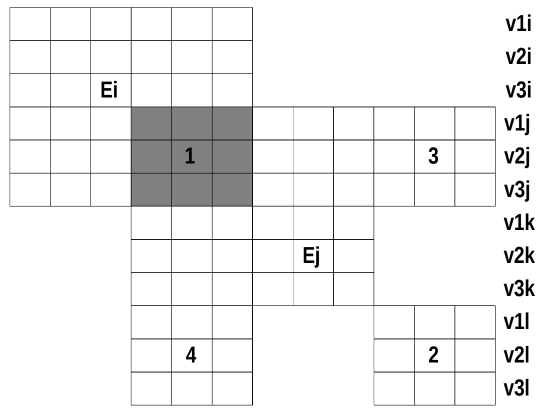
Slika 10. Matrice Ei i Ej

U slučaju da se u čvoru j sastavljaju 3 elementa (i, j, l), matrica se formira prema skici na slici 11.:
El:



Slika 11. Podmatrice matrice krutosti elementa l

Matrica krutosti E:



Slika 12. Globalna matrica krutosti za elemente i, j i l

U osjenčanom području matrice krutosti, koje se vidi na slici 12., zbrajaju se elementi podmatričja Ei, Ej, El.
Npr.:

$\mathrm{E}(4,4) = \mathrm{Ei}(4,4) + \mathrm{Ej}(1,1) + \mathrm{El}(1,1)$. Itd.

Globalna matrica krutosti sustava ima ista svojstva kao i lokalna matrica krutosti. Svi elementi na dijagonali su pozitivni i matrica krutosti je simetrična. Također matrica krutosti nije u cijelosti popunjena, već je mnogo elemenata jednako nuli. Popunjenost matrice je oko dijagonale, tako da matrica ima određenu širinu ili band. Širina banda ovisi o numeraciji čvorova, tj. poželjno je da razlika početnog i krajnjeg čvora nekog elementa bude što je moguće manja. Širina banda matrice krutosti može se odrediti prema formuli:

$$B = 3 \cdot \max |i - j| + 3 \quad (15)$$

4.1. Opterećenje

Desna strana jednadžbe je vektor čvornih opterećenja. Opterećenja mogu biti zadana kao koncentrirane sile u čvorovima, ili kao lokalno opterećenje na elementima. Ako je opterećenje zadano kao lokalno na elementima, treba izračunati reakcije od lokalnog opterećenja na obostrano upetoj gredi. Tim reakcijama treba pribrojiti eventualno čvorno opterećenje.

4.2. Rubni uvjeti

Formirana matrica krutosti je singularna, tj. njena determinanta je jednaka nuli. Da bi sustav bio regularan i imao jedno rješenje, potrebno je unijeti rubne uvjete. Rubne uvjete čine poznati pomaci ležajeva. To su najčešće spriječeni pomaci koji su jednaki nuli. Jednadžbe koje se odnose na te poznate pomake nije potrebno postavljati jer su njihovi pomaci poznati (= 0). Eliminacija tih jednadžbi može predstavljati probleme oko ponovne numeracije i memoriranja jednadžbi. Problem se može nadići pogodnom numeracijom čvorova tako da npr. čvorovi s poznatim pomacima budu numerirani posljednji. Zato se za posljednje čvorove i ne postavljaju jednadžbe ravnoteže. Moguće rješenje je i da se na dijagonalni element matrice krutosti koji odgovara poznatom pomaku pribroji veliki broj, bitno veći nego ostali elementi na dijagonali (npr. 10e10). To ima značenje postavljene opruge veoma velike krutosti. Na taj se način dobiva odgovarajući pomak koji je vrlo mali.

Dodatni problem koji se može pojaviti kod matrice krutosti je nula na dijagonali. To se može pojaviti kod čvorova koji su zglob. Problem se može riješiti izbacivanjem te jednadžbe, kod koje nije poznata rotacija čvora, ali je poznat moment koji je jednak nuli. Također se na dijagonali može dodati proizvoljno mali broj, što je ekvivalentno dodavanju opruge male krutosti. To za posljedicu ima dobiveni moment savijanja u čvoru, ali vrlo male vrijednosti, praktično nula.

4.3. Rješavanje sustava jednadžbi

Postavljeni sustav jednadžbi predstavlja n jednadžbi s n nepoznanica. Za rješavanje sustava jednadžbi koriste se različite metode rješavanja, npr. Gaussova eliminacija, metoda Choleskog i sl.

Za bilo koju metodu koja se primjenjuje važno je:

1. da zauzima što manje memorije
2. da broj računskih operacija bude što manji
3. da greška zaokruživanja bude što manja

5. ZAKLJUČAK

Prikazani postupak postaje prilično složen kada se radi o sustavu s većim brojem elemenata, ili kada su elementi složenijeg oblika kao što su volumenski elementi (tip AB ploče). U tom slučaju problem postaje gotovo nerješiv bez upotrebe računalne tehnologije. Računala s jakim procesorima mogu vrlo brzo riješiti velike sustave jednadžbi u matričnoj formi i već za nekoliko sekundi generirati rješenje. Upravo zato metoda konačnih elemenata nalazi svoju široku primjenu u praksi te se teži daljnjem usavršavanju matematičkog modela koji bi se potom mogao implementirati unutar računalnog programa, a rezultati bi bili još precizniji i pouzdaniji.

6. LITERATURA

[1] Bernhard, F: StatikprogrammefürPersonalcomputer, Dusseldorf, Werner, 1992.
[2] Michael, A.: Statik im Bauwesen, TabellenkalkulationzurLösungingenieurtechnischer Aufgaben, VerlagBauwesen, Am Friedrichshoin 22, 10 407 Berlin.
[3] Pandit,G.S.; Gupta, S.P.: Structuralanalysis; A matrixapproach, Tata McGraw-HillPublishingCompanyLimited – New Delhi, 1986.
[4] Thieme, D.: EinführungindieFinite-Elemente-MethodefürBauingenieure, VerlagfürBauwesenGmbH, Berlin 1980.
[5] Sekulović, M.: Teorija linijskih nosača, Građevinska knjiga Beograd, 2005.

Kontakt autora:

Vladimir Mirković, dipl. ing. građ.
KB Mirkowsky d.o.o.
Cehovska 8
34000 Požega
034/274-851
kb-mirkowsky@po.t-com.hr

Josip Užar, struč.spec.ing.građ.
Grad Požega; Upravni odjel za komunalne djelatnosti i gospodarenje Grada Požege
Trg svetog Trojstva 1
34000 Požega
095/801-8539
josip.uzar@gmail.com