

Proračun OC-funkcija za atributivne planove uzorkovanja*

M. Filajdić, Milana Ritz, Nada Vahčić, Mirjana Hruškar

Stručni rad — Professional paper

UDK: 637.074

Sažetak

IDF-organizacija ima dva standarda za uzorkovanje mlijeka i mliječnih proizvoda: IDF-Standard 50B (1980) kao uputu s tehnikama uzorkovanja i IDF-Standard 113 (1982) kao standard za uzorkovanje prema atributivnim karakteristikama. (IDF-STANDARD 50B 1980; IDF-STANDARD 113, 1982).

Zadnji spomenuti standard identičan je s ISO-5538 (1987) standardom — Mlijeko i mliječni proizvodi — Uzorkovanje — Atributivno ispitivanje. (ISO 5538, 1987).

Teorija uzorkovanja u tim standardima zasniva se na razvrstavanju neke jedinice (proizvoda) na »dobru« ili »lošu«. »Dobra« je ona jedinica koja odgovara zahtjevima određenog standarda, a »loša« ona koja ne odgovara. (Montgomery, 1985).

Obzirom da ti standardi ne objašnjavaju kako se pripremi konstrukcija OC-funkcija određenih planova uzorkovanja, a te funkcije su vrlo važne u praksi, u ovom članku će se prikazati postupak konstrukcije OC-funkcije sa zadanim parametrima AQL, RQL, α - i β - vjerojatnostima, ako netko ne želi ili nema mogućnosti da koristi sheme iz tih standarda.

Proračun veličine uzorka (n), te broja prihvatljivosti (c), kao i OC-funkcije plana obavljen je arcsin transformacijom iterativnim postupkom (Graf, 1987; Guenther, 1977), dok je OC-funkcija utvrđena binomnom razdiobom. Usporedba izračunatih ključnih parametara plana s onim dogovorenim ugovorom oba partnera (vidi tablicu 2) pokazuje prednost atributivnog plana uzorkovanja L ($P/20; 1$).

Riječi natuknice: standardi za uzorkovanje mlijeka i mliječnih proizvoda, teorija uzorkovanja, planovi uzorkovanja, atributivni plan, postupak konstrukcije OC-funkcije, proračun veličine uzorka broj prihvatljivosti C .

Uvod

Teorija uzorkovanja primijenjena u IDF-113 (1980) — Standardu ili identičnom ISO-5538 (1987) — Standardu, koji predstavljaju standardne postupke za uzorkovanje mlijeka i mliječnih proizvoda, zasniva se na klasifikaciji uzorka na one koji su »dobri« ili pak »loši«. »Dobra« je ona jedinica proizvoda koja ispunjava zahtjeve određenog standarda ili neke specifikacije, a »loša« ona koja ih ne ispunjava. Važno je da se uzorci uzimaju iz određene serije (lota) kao slučajni.

Inače, navedeni standardi koriste se za izbor potrebne veličine uzorka dane isporuke, određenog mliječnog proizvoda, čija se kakvoća treba provjeriti prema zahtjevima propisane specifikacije. Važno je da se proizvod istra-

Referat održan na XXX. Simpoziju za mljekarsku industriju, 1992. godine u Zagrebu.

žuže pomoću reprezentativnog uzorka. Tehnike uzorkovanja za određene mliječne proizvode detaljno su iznesene u IDF-Standardu 50A (1980), koji se mora konzultirati prije uzimanja uzorka. (IDF-STANDARD, 1980). IDF-113 (1980) — Standard ili ISO-5538 (1987) — Standardi sadrže oznake za veličine serija (lota) i razine kakvoće za prijem (engleski: Acceptable Quality Level — AQL), veličinu uzorka (n) i »broj prihvatljivosti« (AC = Acceptance number), kao i »broj odbijanja« (Re = Rejection number). (IDF-STANDARD 113, ISO 5538). Ti standardi ne daju OC-funkcije, niti rizik proizvođača (α - Producent risk), a niti rizik potrošača (β - Consumer risk). OC-funkcije plana uzorkovanja u stvari prikazuju odnos vjerojatnosti prihvaćanja isporuke (lota) s određenom frakcijom »defektnih jedinica« s uzetim uzorkom ili, još preciznije rečeno, OC-funkcija omogućuje da se ustanove rizici prihvaćanja ili odbijanja neke serije (lota) određene defektnosti ako se serija (lot) te veličine analizira na temelju veličine uzetog uzorka.

Ako je broj defektnih jedinica u uzorku (n) manji ili jednak broju prihvatljivosti c , isporuku se prihvaća, u suprotnom odbija.

U ovom radu prikazat će se postupak proračuna OC-funkcije sa zadanim parametrima plana atributivnog uzorkovanja koji nisu uneseni u zbirku planova IDF-113- Standarda ili ISO-5538 — Standarda.

Operativna funkcija (OC) plana uzorkovanja predstavlja najvažnije obilježje svakog plana uzorkovanja, a može se definirati grafički te prikazati kao matematički izražena ovisnost između frakcije defektnosti »lota« (apcisa) i vjerojatnosti prihvaćanja »lota« (ordinata) sa naznačenom frakcijom defektnosti na apcisi.

Proračun OC-funkcije sa zadanim parametrima rješavat će se u sljedeće dvije faze:

- I Utvrđivanje veličine uzorka (n) i broja prihvatljivosti (c) koji označavaju dopušteni broj »defektnih« jedinica u uzetom uzorku, pa da se može prihvatiti serija (lot) iz koje je uzet taj uzorak.
- II Drugi dio računanja odnosi se na proračun OC-funkcije plana sa zadanim parametrima: (AQL, RQL i rizicima α i β -, koji označavaju najveći broj, odnosno frakciju »defektnih« jedinica, a da se ona još uvijek smatra prihvatljivom (AQL), frakciju defektnih jedinica u isporuci (lotu) zbog koje se takva isporuka želi odbaciti s dovoljno velikom vjerojatnošću (RQL), rizikom proizvođača da će mu biti odbijena serija (lot) iako je ispravna (α - rizik) i rizikom potrošača (kupca) da će mu biti isporučena serija (lot) koju ne bi želio primiti (β - rizik).

1. Utvrđivanje veličine uzorka (n) i broja prihvatljivosti (c)

Neka određeni trgovac konzumnog mlijeka opremljenog u plastične folije nabavlja dnevno od mljekarskog pogona po 1000 originalnih omota mlijeka ($N = 1000$). Trgovac i odgovorna služba mljekare dogovorili su se da će se isporuka mlijeka smatrati prihvatljivom ako neće sadržavati više od 3% originalnih omota koja »cure« (koja nemaju dobro zatvorenu foliju, tako da omot propušta sadržaj folije). U tom slučaju AQL = 0,03. Zainteresirani partneri sporazumjeli su se da će isporuke mlijeka biti odbijane sa 90%-tnom vjerojat-

nošću kada frakcija »defektnih« jedinica bude iznosila 18%. Dakle, $RQL = 0,18$. Odgovarajući rizici također su dogovoreni, tako da rizik proizvođača iznosi $\alpha = 0,10$, a i rizik potrošača (trgovca) $\beta = 0,10$. Prema tome, zainteresirani partneri su se dogovorili da će se koristiti plan uzorkovanja sljedećih obilježja:

$$N = 1000; \quad AQL = 0,03; \quad \alpha = 0,10; \quad RQL = 0,18; \quad \beta = 0,10$$

Dakle, treba najprije utvrditi veličinu uzorka (n) i broj prihvatljivosti (c) za dogovoreni atributivni **plan jednostrukog uzorkovanja**.

1.1. Prema Graf, Henning, Stange, Wilrich (1987) mogu se **približno** izračunati vrijednosti n i c pomoću arcsin transformacije za slučaj da vrijedi binomna razdioba slučajne varijable. (Graf, 1987)

Veličina uzorka se utvrđuje iz odnosa:

$$n = \frac{1}{4}(\tau_{1-\alpha} + \tau_{1-\beta})^2 / (\phi_2 - \phi_1)^2 - \frac{1}{4}\phi_1\phi_2 \dots (1)$$

$$c = n \sin^2 \phi^* - 0,5 \dots (2)$$

$$\phi_1 = \arcsin \sqrt{AQL} \dots (3)$$

$$\phi_2 = \arcsin \sqrt{RQL} \dots (4)$$

τ_w su percentili standardizirane normalne razdiobe koji se očitavaju iz statističkih tablica. (Ripne, 1989)

ϕ^* iz formule (2) računa se iz odnosa:

$$\phi^* = \frac{1}{2}(\phi_1 + \phi_2) \left(1 - \frac{1}{8}n\phi_1\phi_2\right) + (\tau_{1-\alpha} + \tau_{1-\beta}) / 4\sqrt{n} \dots (5)$$

Uvrštavajući zadane vrijednosti u formule od (1) do (5) dobiva se:

$$\tau_{1-\alpha} = \tau_{1-0,1} = \tau_{0,9} = 1,282$$

$$\tau_{1-\beta} = \tau_{1-0,1} = \tau_{0,9} = 1,282$$

$$\phi_1 = \arcsin \sqrt{AQL} = \arcsin \sqrt{0,03} = 0,17408$$

$$\phi_2 = \arcsin \sqrt{RQL} = \arcsin \sqrt{0,18} = 0,43815$$

Prema tome, približna veličina uzorka biti će:

$$n = \frac{1}{4} - [2,564 / 0,26407]^2 - 3,2778 = 20,29 \approx 20$$

$$\phi^* = \frac{1}{2} - (0,61223)(0,6389) + 0,14 = 0,33561$$

pa će vrijednosti za broj prihvatljivosti (c) biti:

$$C = 20 \sin^2(0,33561) - 0,5 = 2,169 - 0,5 = 1,669 = 2$$

Prema tome, proizlazi da je veličina uzorka $n = 20$ i broj prihvatljivosti između $c = 1$ i $c = 2$.

1.2. Osim opisanog postupka, Guenther je razradio interaktivni postupak u kome se n i c utvrđuju indirektnim načinom, uvrštavajući postupno vrijednosti za c od 0, 1, 2... i za $n = 1, 2...$ u formulu za vjerojatnosti prihvaćanja serija u slučaju hipergeometrijske razdiobe, (Guenther, 1977).

$$L(P|N;n;c) = Hy(c|N; NP;n) = \sum_{i=0}^c \binom{NP}{i} \binom{N-NP}{n-i} / \binom{N}{n} \dots \dots \dots (6)$$

sa $NP = 0, 1, 2...$

dok se ne dobije $L(RQL|1000 n;c)$ koja će biti manja od $\beta = 0,10$ i $L(AQL|1000; n;c)$ veći od $1 - \alpha = 0,90$

Uvrštavajući, na primjer, za $n = 15$ i $c = 1$ dobiva se:

$P = RQL = 0,18$; $NP = 1000 * 0,18 = 180$; $N - NP = 1000 - 180 = 820$,
uvrštavanjem u formulu (6) dobiva se:

$$\binom{180}{0} \binom{820}{15} / \binom{1000}{15} + \binom{180}{1} \binom{820}{14} / \binom{1000}{15} = 0,04978 + 0,1668 = \underline{0,21658}$$

$P = AQL = 0,03$; $NP = 1000 * 0,03 = 30$; $N - NP = 1000 - 30 = 970$

$$\binom{30}{0} \binom{970}{15} / \binom{1000}{15} + \binom{30}{1} \binom{970}{14} / \binom{1000}{15} = 0,63118 + 0,2971 = \underline{0,9283}$$

$0,9283 > [(1 - \alpha) = 0,90]$

Prema zahtjevu, kriterij za kupca $0,2166 > (\beta = 0,10)$ nije ispunjen, dok je drugi dio zahtjeva s rezultatom $0,9283 > (1 - \alpha = 0,90)$ ispunjen u odnosu na zadani rizik proizvođača.

Uvrštavajući $n = 20$ i $c = 1$ dobiva se:

$$\binom{180}{0} \binom{820}{20} / \binom{1000}{20} + \binom{180}{1} \binom{820}{19} / \binom{1000}{20} = 0,018109 + 0,0814 = 0,0995 = \underline{0,10}$$

$0,0995 < 0,10$, dakle ovaj dio uvjeta je ispunjen

$P = AQL = 0,03$; $NP = 30$; $N - NP = 970$

$$\binom{30}{0} \binom{970}{20} / \binom{1000}{20} + \binom{30}{1} \binom{970}{19} / \binom{1000}{20} = 0,54056 + 0,34105 = \underline{0,88161}$$

$0,88161 < (1 - 0,10) = 0,90$, ovaj dio (za $c = 1$) nije ispunjen

Ako se uzme da je $n = 20$ i $c = 2$, tada vrijedi:

$$0,88161 + \binom{30}{2} \binom{970}{18} / \binom{1000}{2} = 0,88161 + 0,987 = \underline{0,98031}$$

$0,98031 > (1 - 0,10 = 0,90)$, uvjet je ispunjen

Prema proračunu postupkom Guenthera (Guenther, 1977) dobiva se veličina uzorka $n = 20$, a broj prihvatljivosti (c) između brojeva 1 i 2. Konačnu odluku moći će se donijeti nakon proračuna OC-funkcije s $L(P/n, c)$ i to $L(P/20, 2)$ i $L(P/n, 1)$.

2. Proračun OC-funkcije plana

$L(P/N; n; c)$ pod pretpostavkom da vrijedi binomna razdioba, a ona vrijedi jer je odnos $n/N < 0,10 = (20/1000) = 0,20$, računa se iz formule:

$$P(P/20; 2) = \sum_{i=0}^c \binom{n}{i} P^i (1-P)^{n-i} \dots \dots \dots (7)$$

za $i = 0, 1, 2, \dots$

Vjerojatnosti za različite vrijednosti frakcije defektnosti serija (lota) (P) unesene su u Tablicu 1, a izračunate su formulom (7), programom iz modula »Statistički programi računala TI-74«. (TI-74 SOFTWARE).

Tablica 1. OC-funkcije atributivnih planova jednostrukog uzorkovanja $L(P/20; 2)$ i $L(P/20; 1)$ Binomna razdioba

Table 1. OC-Functions attributive single sampling plans $L(P/20; 2)$ and $L(P/20; 1)$ Binomial distribution

Frakcija defektnosti Fraction of defectiveness	Vjerojatnost prihvatanja serije (lota) Lot Acceptance Probability	
	$L(P/n; c) = L(P/20; 2)$	$L(P/20; 1)$
P_1		
0,015	0,9968	0,9643
0,020	0,9929	0,9401
0,025	0,9870	0,9118
0,030	0,9790	0,8802
0,050	0,9245	0,7358
0,080	0,7879	0,5168
0,090	0,7334	0,4516
0,10	0,6769	0,3917
0,15	0,4049	0,1756
0,18	0,2748	0,1018
0,24	0,1085	0,0302
0,30	0,0355	0,0076
0,35	0,0121	0,0021
0,0285		0,8899 = 0,90

P = Frakcija defektnosti serije (lota)
Lot's defectiveness fraction

$L(P)$ = Operaciona funkcija računata binomnom razdiobom
Operation function calculated by Binomial distribution

Radi boljeg pregleda značaja OC-funkcija dat je njihov grafički prikaz na Slici 1.

Usporedba izračunatih vrijednosti OC-funkcija planova na zadanim parametrima dana je u Tablici 2.

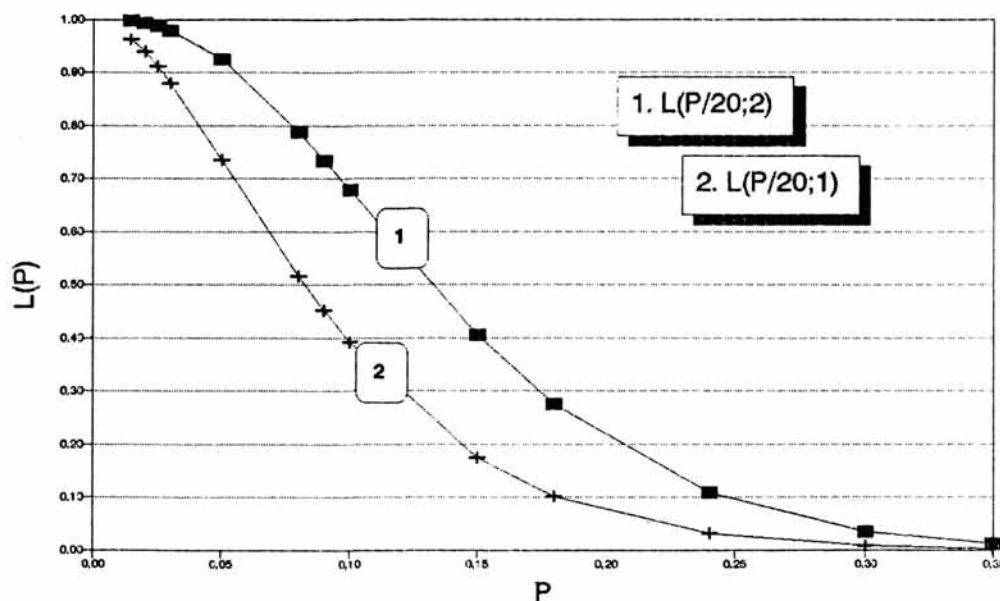
Tablica 2. Usporedba izračunatih vrijednosti parametara planova sa zadanim vrijednostima

Table 2. Comparison of the calculated results of plans' parameters with added values

Parametar Parameter	Zadano Setting of task	Izračunato iz Calculated by	
		L (P/20; 2) 1	L (P/20; 1) 2
AQL	0,03	0,058	0,028 = 0,03
$1 - \alpha$	0,90	0,90	0,90
α	0,10	0,10	0,10
RQL	0,18	0,24	0,18
β	0,10	0,10	0,10
n	—	20	20
c	—	2	1

Slika 1. OC-funkcije planova

Fig. 1. OC-Functions of Plans



Iz podataka Tablice 2 može se lako uočiti da nema nikakve praktičke razlike između ključnih parametara plana $L_2(P/20; 1)$ i onih koji su bili zadani ugovorom zainteresiranih partnera.

Međutim, plan $L_1(P/20; 2)$, za koji su veličine uzoraka (n) i broj prihvatljivosti (c) bili izračunati arcsin transformacijom ili iterativnim postupkom, pokazao je osjetne razlike u vrijednostima AQL i RQL.

Naime, uz isti rizik proizvođača ($\alpha = 0,10$) razina kvalitete za prijem (AQL) iznosila je približno 6%, za razliku dogovorene vrijednosti od 3%. Slično vrijedi i za rizik kupca, koji s istom vrijednošću $\beta = 0,10$ daje frakciju defektnosti 0,24 za razliku od dogovorene vrijednosti 0,18 (RQL).

Ovakvi rezultati ujedno objašnjavaju da su postupci izračunavanja veličine uzorka (n) i broja prihvatljivosti (c) imali aproksimirajući značaj, dok je detaljni proračun OC-funkcije omogućio preciznije rezultate i pokazao bolje slaganje između zadanih i izračunatih parametara uzorkovanja kada je $n = 20$ i $c = 1$.

Prema tome, plan $L(P/20; 1)$ atributivnog jednostrukog uzorkovanja potpuno je u skladu s dogovorenim propozicijama predstavnika mljekare i trgovca.

Komparacijom plana izračunate OC-funkcije s planom atributivnog uzorkovanja iz zbirki planova ISO-2859 može se uočiti da je najveća sličnost s planom označenim slovom F u specijalnoj razini kontrole $S - 4$, sa AQL = 0,025; $\alpha = 0,05$; RQL = 0,181; sa $\beta = 0,10$ za $N = 501$ do 1200.

Zaključak

Na temelju dogovora zainteresirane mljekare i prodavača mlijeka da će se kontrola nepropusnosti originalnih omota konzumnog mlijeka kontrolirati planom atributivnog uzorkovanja karakteristike:

$N = 1000$, AQL = 0,03 frakcije »defektnosti«, uz rizik $\alpha = 0,10$ i RQL = 0,18 uz rizik $\beta = 0,10$, prišlo se utvrđivanju veličine uzorka (n) i broja prihvatljivosti (c).

Od prethodno utvrđene alternative planova $L(P/20; 2)$ i $L(P/20; 1)$ postignuto je bolje slaganje zadanih ključnih parametara plana uzorkovanja $N = 1000$; AQL = 0,03; $\alpha = 0,10$; RQL = 0,18 i $\beta = 0,10$ s izračunatom OC-funkcijom plana $L(P/20; 1)$ nego s onom u planu $L(P/20; 2)$.

Prema tome, ključni parametri plana uzorkovanja $L(P/20; 1)$ bili su u potpunom skladu s ugovorom dogovorenih propozicija, što je vidljivo iz komparativnih podataka Tablice 2.

THE ESTIMATE OF OC-FUNCTIONS FOR ATTRIBUTE SAMPLING PLANS

Summary

IDF — organisation has two standards for sampling milk and milk products: IDF — Standard 50B (1980) as a guide to sampling techniques and IDF — Standard 113 (1982) as standard for sampling by attributes. (IDF — STANDARD 50B, 1980; IDF — STANDARD 113, 1982).

The last one is identical to ISO-5538 : 1987 Standard »Milk and milk products — sampling — Inspection by attributes«. (ISO-5538, 1987).

The sampling theory used in these standards is based on classifying a unit as »good« or »defective«. A »good« unit is one which meets the requirements of a standard, a »defective« unit is one which does not. (Montgomery, 1985).

Since these standards do not offer explanation of how to make a construction for OC – functions of the given sampling plans, and these functions are very important in practise, the procedure for construction of the OC-curve for a given AQL, RQL, α - and β - probability will be demonstrated in this article if anyone does not want or does not have the possibility to use the shemes from the standards.

The calculation of sample size (n), as an acceptance number (c) and OC-function's plan by arcsin transformation was made by Graf (1987) and Guenther (1977) iterative algorithm, while the OC-function of the plans was reached by Binomial distribution.

The comparison of the calculated crucial plan's parameters with those given by the contract of two partners, (table 2) shows in favour, to attributive sampling plan. L (P/20:1).

Additional index words: Standards for milk and milk-products sampling, the sampling theory, sampling plans, attributive sampling plan, procedure for construction of the OC-curve, sample's size calculation, acceptance number c calculation.

Literatura

- GRAF, U. (1987): Formeln und Tabellen der angewandten mathematischen Statistik, 3. Aufl. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg.
- GUENTHER, W. C. (1977): Sampling Inspection in Statistical Quality Control, Griffin, London.
- IDF 50 B (1980): Milk and milk products – Guide to sampling Techniques.
- IDF 113 (1980): Milk and milk products – Sampling Attribute sampling schemes.
- ISO 2859 (1985): Sampling procedures for inspection by attributes Part 1 and Part 2: Sampling plans indexed by limiting quality (LQ) for isolated lot inspection. Part 3: (1991): Sampling procedures by attributes – Skip lot sampling procedures.
- ISO 5538 (1987): Milk and milk products – Sampling – Inspection by attributes.
- MONTGOMERY, D. C. (1985): Introduction to Statistical Quality Control, John Wiley and Sons, Inc. New York.

Adresa autora — Authors' addresses:

Prof. Dr Mirko Filajdić
Dr. Milana Ritz
Mr. Nada Vahčić
Mirjana Hruškar, dipl. ing.
Prehrambeno-biotehnološki fakultet
Pierottijeva 6, Zagreb

Primljeno — Received:

20. 9. 1993.