Statističke metode u kontroli kvalitete mlijeka i proizvoda*

Prof. dr. Mirko FILAJDIĆ, dr. Milana RITZ, mr. Nada VAHČIĆ, dr. Vera VOJNOVIĆ, prof. dr. Matilda GRÜNER, mr. Diana VUJANIĆ,
Prehrambeno-biotehnološki fakultet Sveučilišta u Zagrebu

Pregledni članak — Review
Prispjelo: 13. 3. 1991.

UDK: 637.072

Sažetak

Nakon osnivanja Analitičke sekcije na XXVIII. simpoziju mljekarske industrije 1990. godine ukazala se potreba proširenja spoznaja ili obnova znanja iz primjene statističkih metoda u interpretaciji rezultata analiza pri provjeri kakvoće mlijeka i mliječnih proizvoda.

1. Utvrđivanje slučajnih pogrešaka u rezultatima analiza

Prvi dio rada sadrži nekoliko praktičnih primjera utvrđivanja slučajne pogreške rezultata analiza kad se rezultati izražavaju kao kontinuirane ili diskretne veličine mjerenja.

2. Proračun slučajne pogreške rezultata analiza izraženih diskretnim veličinama

Navode se 4 numerička primjera iz analitičke prakse.

Provjereno je utvrđivanje nepropusnosti materijala u koji je spremljeno pasterizirano mlijeko, utvrđivanje granica vjerojatnosti pojave škarta u slučaju kad vrijedi Poissonova i binomna razdioba.

3. Usporedba rezultata analiza sastava i kvalitete u industrijskoj preradi

U trećem se dijelu na praktičnim primjerima uspoređuju rezultati različitih analiza, rezultati analiza diskretnih veličina i određuju optimalne veličine uzoraka pri provedbi analiza.

1. Utvrđivanje slučajnih pogrešaka u rezultatima analize

Prof. dr. Mirko FILAJDIĆ, dr. Milana RITZ, mr. Nada VAHČIĆ

Uvod

Na XXVIII. simpoziju mljekarske industrije Jugoslavije u Opatiji koji je održan od 28. 02. do 2. 03. 1990. osnovana je Analitička sekcija sa svrhom da se sustavno priđe radu na donošenju novih i korekciji postojećih metoda analiza namijenjenih kontroli kvalitete mlijeka i mliječnih proizvoda.

U postupcima standardizacije metoda analiza potreban je znatan eksperimentalni rad da bi se utvrdila točnost i preciznost analitičke metode, a što je nemoguće postići bez široke primjene metoda matematske statistike.

U ovom članku govori se o utvrđivanju tzv. slučajnih pogrešaka rezultata analiza kada se rezultati mjerenja izražavaju kao kontinuirane ili kao diskretne veličine.

U jednom ranijem radu (Filajdić i sur., 1986) dato je statističko tumačenje rezultata u kontroli kvalitete mlijeka i mliječnih proizvoda, ne upuštajući se u sustavni prikaz, već samo nekoliko primjera ilustrira primjenu statističkih metoda za utvrđivanje sistematske pogreške, rješavanje spora između rezultata analiza u postupku superanaliza te postupka linearne regresije.

* Referat održan na 29. simpoziju za mljekarsku industriju, Opatija, 1991.

U ovom radu govori se o izračunavanju pogrešaka mjerenja koje se uvjetno mogu podjeliti na sistematske i slučajne. Sistematske pogreške uzrokovane su jasno definiranim matematskim znakovima, dok su slučajne pogreške uzrokovane matematski neobjašnjenim zakonima.

Sistematska pogreška uvijek ima jedan te isti predznak i apsolutnu veličinu, karakterističnu za svaku konkretnu analizu i raspon promjene izmjerene veličine. Sistematska se pogreška može lako identificirati i ukloniti korekcijom s predznakom suprotnog smjera predznaka pogreške.

Slučajna se pogreška ne može ukloniti na isti način, zbog toga što se njena apsolutna veličina i predznak mijenjaju od pokusa do pokusa proizvoljno. Podaci mjerenja obrađuju se primjenom posebnih metoda (Fetisov, 1985).

U procjeni kvalitete proizvodnje susrećemo se s neprekinutim i s diskretnim veličinama mjerenja. Neprekinute veličine u razmatranom intervalu mjerenja su bilo koje vrijednosti, dok su diskretne samo izražene cijelim brojem vrijednosti. Osnovni se dio rezultata analiza sastava i kvalitete proizvodnje izražava neprekinutim veličinama. Diskretne se veličine koriste samo u slučaju kada se analiza obavlja u djelomičnoj proizvodnji i njena je kvaliteta nejednolična unutar odabrane »šarže« (npr. treba utvrditi broj omota koji propuštaju sadržaj u jednoj »šarži«).

1.0. Proračun slučajne pogreške rezultata analize izraženih neprekinutim veličinama

Ako se izmjeri jednu te istu veličinu beskončano mnogo puta, svi će se podaci grupirati oko prave vrijednosti mjerene veličine, čineći tzv. populaciju. Ako su eksperimentalne točke simetrično raspoređene oko aritmetičke sredine svih rezultata (prosjek populacije) predstavljat će točnu vrijednost izmjerenih veličina. U realnim uvjetima broj ponavljanja mjerenja je ograničen, što se naziva uzorkom , koji je izdvojen iz populacije, a zbog toga nije potpuno simetričan raspored elemenata uzoraka oko prosjeka populacije, te se aritmetička sredina naziva procijenjenom srednninom, koja odstupa, od aritmetičke sredine populacije za slučajnu pogrešku. Njenu veličinu i predznak nemoguće je utvrditi, te se slučajna pogreška izražava tzv. »intervalom povjerenja«, koji s danom vjerojatnošću »okružuje« prosjek populacije. Pravila proračuna intervala povjerenja razlikuju se zavisno o zakonitosti raspodjele eksperimentalnih podataka oko procjenjenog prosjeka populacije. Najčešće se u praksi susrećemo s tzv. normalnom ili logaritamskom normalnom raspodjelom koja se smatra posebnim slučajem normalne raspodjele.

Budući da se u praksi radi s ograničenim brojem podataka s tzv. uzorcima, prvi je zadatak da se provjeri da li se među njima nalazi neki »NENORMALNI« podatak, koji se ne uklapa u zakonitost raspodjele ostalih podataka.

Prisustvo »nenormalnih» podataka provjerava se prema broju ponavljanja mjerenja, te se razlikuju postupci:

1.1. — Za $n = 2$ do 10 gdje n prikazuje broj ponavljanja mjerenja.
1.2. — Za $n = 11$ do 50
1.3. — Za $n > 50$

Provjera rezultata analize o prisustvu nenormalnih podataka

1.1. **Slučaj kad se broj podataka kreće od $n = 2$ do 10.**

Prisustvo »nenormalnih« podataka uzorka provjerava se za $n \geq 3$, zato što je za n = 2 nemoguće utvrditi koji je podatak »nenormalan«. Postupak provjere utvrđuje se korištenjem slijedećih formula (Nalimov, 1960):

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i \quad \text{(1)}$$

$$S^2 = \frac{1}{n-1} (\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n \cdot \bar{x}^2) \quad \text{(2)}$$

$$d = |\bar{x} - x_{sum.}| \quad \text{(3)}$$

$$V = \frac{d}{S} \quad \text{(4)}$$

$$f = n - 2 \quad \text{(5)}$$

gdje su: $\bar{x}$ = prosjek izražen kao aritmetička sredina
n = veličina uzorka
x_i = vrijednost mjerenja
S^2 = varijanca
d = razlika od aritmetičke sredine
$x_{sum.}$ = sumnjiva vrijednost
V = kriterij provjere nenormalnosti
f = broj stupnjeva slobode.

PRIMJER 1.

U uzorku Na-kazeinata određena je količina proteina metodom Kjeldahl. Analiza nije uzela u obzir količinu vode i hlapivih tvari.
Treba izračunati prosječnu vrijednost proteina i pogrešku analize.

Tablica 1. Količina proteina u kazeinatu

Broj analize	x_i, %	d
1	87,32	0,94
2	87,64	0,62
3	87,66	0,60
4	87,71	0,55
5	90,96	2,70
Ukupno	441,29	—

Prosječna vrijednost iznosi prema formuli (1).

$$\bar{x} = \frac{441,29}{5} = 88,26$$

Varijanca: (prema formuli 2)

$$S^2 = \frac{1}{4} (38956,59 - 5 \times 88,26^2) = 1,8635$$

$$S = \sqrt{1{,}8635} = 1{,}365$$

$$V \text{ (prema formulama 3 i 4)}: = \frac{2{,}70}{1{,}365} = 1{,}978$$

Izračunata vrijednost kriterija V = 1,978 komparira se s vrijednošću kriterija iznesenog u statističkoj tablici (1) (Fetisov, 1985) i za f = 5 − 2 = 3 pronalazi se vjerojatnost $P \ll 0{,}01$, što znači da je peti rezultat (90,96) »nenormalan« te ga treba odbaciti iz serije mjerenja. (Tabela 1. s ostalim potrebnim statističkim tabelama unesena je u »Prilog« ovog članka).

Sada uzorak sadrži svega 4 podatka, te je premalen za provjeravanje zakonitosti raspodjele (Normalne).

Treba izračunati prosječnu vrijednost i varijancu za preostala četiri podatka, nakon što je rezultat 90,96 odbačen.

$$\bar{x} = \frac{(441{,}29 - 90{,}96)}{4} = 87{,}58, \text{ a varijanca će biti}$$

$$S^2 = \frac{(38956{,}59 - 8273{,}72 - 4 \times 87{,}58^2)}{3} = 0{,}6133$$

$$S = \sqrt{0{,}6133} = 0{,}7832$$

Pogreška pokusa računa se pomoću formule:

$$\varepsilon = S \times \frac{t}{\sqrt{n} \times M} \quad \ldots \quad (6),$$

gdje je: ε = pogreška
t = kriterij Studenta
M = korekcija za stand. devijaciju

Vrijednosti $\frac{t}{\sqrt{n} \times M}$ za n = od 2 do 10 nalaze se u statističkoj tablici 5. (Fetisov, 1985) i za f = n − 1 = 4 − 1 = 3 i za α = 0,95 iznosi 1,726.

Prema tome pogreška će biti
$\varepsilon = 0{,}7832 \times 1{,}726 = 1{,}352$, pa će količina proteina u našem uzorku kazeinata iznositi: (približno prema značajnoj znamenki pogreške) 88 ± 1%.

U stvari zadnja značajna znamenka prosjeka proteina mora biti reda veličine kao i prva značajna znamenka izračunate pogreške. Veličina pogreške mora sadržavati samo jednu značajnu znamenku.

1.2. **Slučaj: uzorak veličine n = 11 do 50**

Veličine uzoraka od 11 do 50 podataka mjerenja na normalnu raspodjelu provjeravaju se slijedećom formulom

$$\bar{d} = \sum_{i=1}^{n} d_i / n \times S \quad \ldots \quad (7)$$

gdje je: $\bar{d}$ = prosjek odstupanja od aritmetičke sredine
d_i = odstupanje od prosjeka i-tog elementa uzorka

Rezultati se uspoređuju s vrijednostima Tablice 2. Priloga (Boljšev Smirnov, 1968), utvrđujući interval povjerenja koji odgovara za danu empi rijsku raspodjelu s normalom. Za $\alpha \geq 0,95$ raspodjela se može smatrati nor malnom.

PRIMJER 2.

Analizom uzoraka otpadne vode utvrđivane su količine proteina meto dom Kjeldahl. Treba izračunati količinu proteina i pogrešku analize.

Pregledom rezultata Tablice 2. proizlazi da nema neispravnih rezultata te takva provjera nije poduzeta.

Rezultati uzoraka o normalnoj raspodjeli podataka provjerit će se prema formuli (7).

Tablica 2. Količina proteina u otpadnoj vodi farme

Oznaka uzorka	x_i, %	d
1	0,050	0,034
2	0,050	0,034
3	0,060	0,024
4	0,060	0,024
5	0,090	0,006
6	0,090	0,006
7	0,090	0,006
8	0,090	0,006
9	0,100	0,016
10	0,100	0,016
11	0,110	0,026
12	0,120	0,036
Ukupno	1,01	0,234

Prosjek rezultata količine proteina i varijanca prema formulama (1) i (2) iznose:

$$\bar{x} = \frac{1,01}{12} = 0,084$$

$$S^2 = \frac{1}{11}(0,0911 - 12 \times 0,084^2) = 5,84 \times 10^{-4}$$

$$S = 2,42 \times 10^{-2}$$

$$\bar{d} = 0,234/(12 \times 2,42 \times 10^{-2}) = 0,806$$

Komparirajući rezultat $\bar{d} = 0,806$ uz $f = 12 - 2 = 10$ stupnjeva slobode s Tablicom 2 (Boljšev, Smirnov, 1968) navodi vrijednosti prosjeka odstupanja od aritmetičke sredine za razne razine značajnosti, proizlazi da izračunatoj vrijednosti odgovara vjerojatnost $\alpha < 0,95$, što znači da podaci ovog primjera ne slijede normalnu raspodjelu.

PRIMJER 3.

Analiza opisana u prethodnom primjeru bila je ponovljena te su vrijednosti unijete u Tablicu 3.

Tablica 3. Količine proteina u otpadnoj vodi farme

Oznaka uzorka	x_i %	d	log x_i (−1)	d
1	0,063	0,028	1,20066	0,15491
2	0,079	0,012	1,10237	0,05662
3	0,081	0,010	1,09157	0,04576
4	0,081	0,010	1,09157	0,04576
5	0,090	0,001	1,04576	0,00001
6	0,090	0,001	1,04576	0,00001
7	0,090	0,001	1,04576	0,00001
8	0,090	0,001	1,04576	0,00001
9	0,100	0,009	1,00000	0,04575
10	0,100	0,009	1,00000	0,04575
11	0,103	0,012	0,98716	0,05859
12	0,128	0,037	0,89279	0,15296
Ukupno	1,095	0,131	12,54904	0,60614

Proračun kao u prethodnom primjeru daje:

$\bar{x} = 0{,}091$ $\qquad$ $\log \bar{x} = -1{,}04575$

$S = 0{,}01597 = 0{,}016$ $\qquad$ $\log S = 0{,}07532$

$$\bar{d} = \frac{0{,}131}{12 \times 0{,}01597} = 0{,}6836$$

komparirajući $\bar{d} = 0{,}6836$ s rezultatima tab. 2. (Boljšev, Smirnov, 1968), očitano da je $\alpha > 0{,}99$, što znači da za podatke Tablice 3. vrijedi normalna raspodjela.

Pogreška rezultata postignutih primjenjenom metodom sada se može računati pomoću formule (6):

$$\varepsilon = \frac{S \times t}{\sqrt{n} \times M} = \frac{0{,}01597 \times 2{,}201}{\sqrt{12} \times 0{,}977559} = 0{,}0104 = 0{,}01$$

gdje su vrijednosti statističkih parametara:

$t_{0,05}(11) = 2{,}201$ (Studentov kriterij, Tabl. 6 priloga).

$M(11) = 0{,}977559$ (Tabl. 7. Priloga).

Prema tome, prosječna vrijednost proteina u otpadnoj vodi iznosi:

$0{,}09 \pm 0{,}01\%$

Ova se razdioba može provjeriti i prema razdiobi logaritamske normalnosti:

$$\bar{x} = -\frac{12{,}54904}{12} = 1{,}04575 = -1{,}046$$

$$S = 7{,}53 \times 10^{-2}$$

$$\bar{d} = \frac{0{,}60614}{12 \times 0{,}0753} = 0{,}67081$$

Za taj $\bar{d}$ očita se $\alpha > 0{,}99$, što znači da za podatke vrijedi log. normalna raspodjela.

Budući da je bilo svega 12 podataka, moguće je normalnu raspodjelu provjeriti i odnosom ($S^2/\bar{x} < 0{,}3$) pa ako je ispunjen takav uvjet, podatke se može obrađivati kao da vrijedi normalna raspodjela (Hald, 1956).

$$\frac{5{,}68 \times 10^{-3}}{1{,}05} = 5{,}4 \times 10^{-3} \ll 0{,}3$$

Tada vrijedi

$$\varepsilon = \frac{(7{,}53 \times 10^{-2}) \times 2{,}201}{\sqrt{12} \times 0{,}977559} = 0{,}048 \text{ to znači da će biti:}$$

$\bar{x} = -1{,}04576 = -1{,}046$ prosječna vrijednost (log).
$x_{max} = -1{,}046 + 0{,}048 = -0{,}998$ maksimalna vrijednost (log).
$x_{min} = -1{,}046 - 0{,}048 = -1{,}094$ minimalna vrijednost (log).

Uzimajući antilog graničnih vrijednosti, dobiva se
x_{max} = antilog $(-0{,}998) = 0{,}10$
x_{min} = antilog $(-1{,}094) = 0{,}08$
$\bar{x}$ = antilog $(-1{,}046) = 0{,}09$

Ti su rezultati u skladu s prethodnima ($0{,}09 \pm 0{,}01$), što potvrđuje ispravnost hipoteze o mogućnosti proračuna slučajne pogreške pri log. normalnoj raspodjeli podataka u prethodnom slučaju za normalnu raspodjelu.

1.3. Slučaj: uzorak sa n = 60 podataka (n > 50)

U slučaju uzorka sa n > 50 podataka provjerava se normalna raspodjela na slijedeći način. Mjerene vrijednosti se rasporede u tzv. razrede, čiji se broj utvrđuje iz odnosa

$l = \sqrt{n}$, gdje je l = broj razreda.
Minimalni broj razreda mora biti 5, a širina svakog razreda jednaka.

Poželjno bi bilo da broj elemenata u svakom razredu bude 5. Ukoliko to nije slučaj, spajaju se susjedni razredi da bi se ispunio takav zahtjev.
Za svaki se razred izračunava apcisa i visina ordinate za normalnu raspodjelu iz slijedećih odnosa:

$$U_l = \left| \frac{X_{razi} - \bar{x}}{S} \right| \quad \ldots\ldots (8)$$

gdje je:
U_l = vrijednost standardne varijable
$x_{raz.i}$ = veličina koja odgovara početnoj vrijednosti danog razreda
$\bar{x}$ = prosjek svih podataka
S = stand. devijacija svih podataka.

Prema rezultatu U_l, očita se iz statis. Tablice 3 (Prilog), visina ordinate krivulje normalne raspodjele (Fetisov, 1985) $\varphi(U_i)$, te se izračuna teorijski broj frekvencije određenih razreda iz odnosa:

$$\hat{n}_i = \frac{\sum_{i=1}^{l} (n_i \cdot a)}{S} \times \varphi(U_i) \quad \ldots\ldots (9)$$

gdje su:

$\hat{n}_i$ = teoretski broj učestalosti u danom razredu,
a = širina razreda
$\varphi(U_i)$ = visina ordinate normalne krivulje razreda (Tab. 3.)
S = stand. devijacija svih podataka

$$\sum_{i=1}^{l} n_i = n$$

Značajnost razlika eksperimentalnih i izračunatih (teoretskih) frekvencija u razredima provjerava se Pearsonovim kriterijem (hi-kvadratom) Tab. 4 Priloga.

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{l} \frac{(n_i - \hat{n}_{i_o})^2}{\hat{n}_{i_o}} \text{ .... (10) sa } f = l - l_{sp} - 3, \qquad (10)$$

gdje su:

χ^2 — Pearsonov kriterij
n_i — eksperimentalni broj elemenata u danom razredu
$\hat{n}_{i_o}$ — teoretski broj elemenata u danom razredu
l_{sp} — broj razreda koji su zbog premalog broja frekvencija bili spojeni.

Usporedbom izračunate vrijednosti χ^2 s onom iz tablice 4. utvrđuje se (uz dane stupnjeve slobode) vjerojatnost da li je to odstupanje od normalne raspodjele uzrokovano slučajnošću. Uvjeti normalne raspodjele: $\alpha \leq 0{,}05$. Pogreška se računa ranije navedenom formulom (6) time da se za uvjete $n > 10$ koriste Tablice (6) i (7) za $f = n-1$ stupnjeva slobode (Fetisov, 1985).

Prilikom izbora vjerojatnosti intervala povjerenja koriste se slijedeća empirijska pravila:

— u posebno osjetljivim slučajevima koristi se $\alpha = 0{,}99$
— Za interpretaciju analitičkih podataka $\alpha = 0{,}95$.
— Za interpretaciju tehnoloških eksperimenata $\alpha = 0{,}90$.
— Za obradu podataka bioloških pokusa $\alpha = 0{,}80$.

U svim slučajevima interval povjerenja će biti $\bar{x} \pm \varepsilon$.

Aritmetička sredina populacije nalazi se u sredini ovog intervala. Podaci Tablice 5. u Prilogu pokazuju da se povećanjem broja ponavljanja taj interval smanjuje. Smanjenje intervala najuočljivije je u rasponu od 2 do 4 ponavljanja što je povezano s povećanjem vjerojatnosti simetrične razdiobe rezultata pokusa oko prosjeka populacije. Ako nas zanima samo jedna (viša ili samo niža) granica intervala povjerenja koristi se vjerojatnost $\bar{\alpha} = \frac{1 + \alpha}{2}$, čime se postiže sniženje pogreške pokusa na račun sniženja veličine $(t/\sqrt{n} \times M)$. U tom slučaju interval poprima oblik $\bar{x} + \varepsilon$, ako je ciljana veličina ograničena s gornje strane, odnosno $\bar{x} - \varepsilon$ s donje granice intervala povjerenja. U slučaju obrade podataka u log — mjerilu izračunati interval povjerenja uvijek je nesimetričan oko $\bar{x}$ — prosjeka populacije.

U tom slučaju provjeravati se može utvrđivanjem postojanja uvjeta da li je $S^2 / \bar{x} < 0{,}3$, pa ako je ispunjen taj zahtjev, podaci se mogu smatrati normalno raspodjeljenima. Kada je poznata vrijednost varijance osnovnog skupa (σ^2) za slučajnu pogrešku vrijedi odnos ($\mu \pm 1,96\sigma$) što odgovara vjerojatnosti 95%, i ($\mu \pm 3\sigma$) 99,73%, tj. možemo tvrditi sa 95% vjerojatnošću da se prosjek populacija nalazi u intervalu $\pm$ 1,96σ, odnosno sa 99,73% vjerojatnošću u intervalu $\pm$ 3σ.

Rezultat analize $\bar{x}$ u intervalu $\pm 1,96\sigma \cong \pm 2\sigma$ predstavlja približnu vrijednost koja procjenjuje aritmetičku sredinu populacije u intervalu $\bar{x} \pm 2\sigma$.

PRIMJER 4.

U svrhu utvrđivanja metroloških karakteristika metode određivanja masti metodom Röse-Gotlieb u jednoj šarži proizvedenog mlijeka u prahu mast je određena u 60 uzoraka. Zadatak je provjeriti da li za tih 60 uzoraka vrijedi normalna raspodjela. Naime, ako za dane podatke ne bi vrijedio zakon normalne raspodjele matematička obrada podataka ne bi imala vrijednosti. Za provjeru normalne raspodjele treba koristiti Pearsonov kriterij (χ^2).

U danom slučaju najniža vrijednost rezultata analize iznosila je 25,10%, a najviša 25,64% masti. Broj razreda će biti $l = \sqrt{60} = 8$, a širina će iznositi: $(25,64 - 25,10) / 8 \cong 0,08\%$. Izračunate vrijednosti za prosjek ($\bar{x}$) i standardnu devijaciju (S) iznosile su

$\bar{x} = 25,39$

$S = 0,2338$

Prema formuli (8) izračunate su vrijednosti tzv. normalizirane varijable (U_i).

Rezultati proračuna pomoću formula (8), (9) i (10) uneseni su u Tablicu 4.

Tablica 4. Količine masti određene Metodom Röese Gotlieb.

Razredi	$x_{raz.i}$	n_i	U_i	$\varphi(U_i)$	$\hat{n}_i$	$\hat{n}_{i_o}$	$\frac{(n_i - \hat{n}_{i_o})}{\hat{n}_{i_o}}$
1	25,10	3	1,240	0,18494	4	—	—
2	25,18	6	0,898	0,26848	6	10	0,10
3	25,26	7	0,556	0,34105	7	7	0,00
4	25,34	10	0,214	0,39024	8	8	0,50
5	25,42	15	0,128	0,39559	8	8	6,125
6	25,50	9	0,470	0,35723	7	7	0,57
7	25,58	6	0,813	0,28737	6	11	0,09
8	25,64	4	1,069	0,22506	5	—	—
Ukupno		60			51		7,385

Izračunata vrijednost Pearsonovog kriterija iznosi $\chi^2 = 7,385$, $f = 8 - 2 - 3 = 3$ stupnja slobode. Vjerojatnost kriterija Pearsona za $f = 3$ stupnja slobode i $\alpha = 0,95$ očita se iz statističke Tablice 4 (Priloga) 7,815.

Usporedbom izračunate vrijednosti Pearsonova kriterija i vrijednosti očitane iz tablice za $\alpha = 0,95$ može se zaključiti da je razlika između eksperimentalnih i izračunatih frekvencija slučajna, tj. da za naše uvjete vrijedi normalna raspodjela. (Vjerojatnost α da se postigne $\chi^2 = 7,385$ iznosi manje od 0,95).

 Mljekarstvo 41 (4) 87—101, 1991.

Objašnjenje proračuna rezultata iz Tablice 4.

Vrijednosti standardizirane varijable U_i izračunate su iz odnosa

$U_i = \left| x_{raz_i} - \bar{x} \right| / S$

Za 1. razred: $|25,10 - 25,39| / 0,2338 = 1,240$

Za 2. razred: $|25,18 - 25,39| / 0,2338 = 0,898$ itd.

Visine ordinate u normalnoj krivulji razdiobe $\varphi(U_i)$ očitane su iz statis tičkih tablica 3.

Vrijednosti »teoretskih« frekvencija ($\hat{n}_i$) računate su formulom (9):
Zajednički dio proračuna bio je:

$(n_i \times a) / S = (60 \times 0,08) / 0,2338 = 20,5304$

Proračun teoretskih frekvencija iznosi:

Za $\hat{n}_1 = 20,5304 \times 0,18494 = 3,7969 = 4$
$\hat{n}_2 = 20,5304 \times 0,26848 = 5,5120 = 6$
$\hat{n}_5 = 20,5304 \times 0,39559 = 8,12162 = 8$ itd.

Vrijednosti za χ^2 računate su formulom (10). Razlike kvadrata eksperimental nih i izračunatih frekvencija, podijeljenih s izračunatim frekvencijama izno se:

Za razred 1 $\rightarrow (9 - 10)^2 / 10 = 0,10$

Za razred 5 $\rightarrow (15 - 8)^2 / 8 = 6,125$ itd.

Zaključci

U radu se primjenilo nekoliko važnih pravila matematske statistike u interpretaciji rezultata provjere kvalitete mlijeka i mliječnih proizvoda. Postupci interpretacije ilustrirani su s četiri numerička primjera iz analitičke prakse.

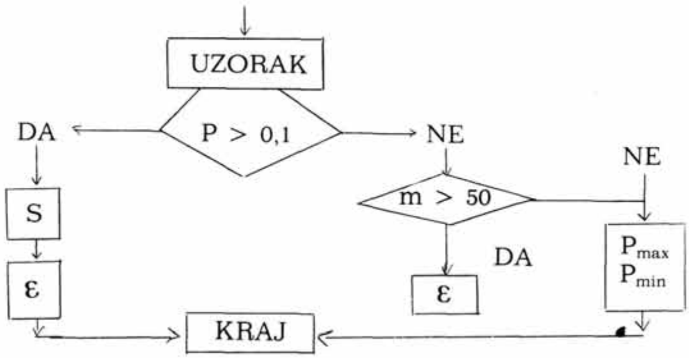
U dijelu rada koji govori o proračunu slučajne pogreške rezultata analize izraženih neprekinutim veličinama izneseni su primjeri.

1. Provjera rezultata o prisustvu nenormalnih podataka analize uz veličine uzorka $n = 5$.
2. Provjera zakonitosti normalne raspodjele uzorka veličine $n = 12$. Primjer određivanja proteina u otpadnim vodama farme. (Primjeri 2 i 3).
3. Provjera zakonitosti razdiobe normalne i log. normalne za uzorke veličine $n = 60$. Rezultati određivanja masti metodom Röese — Gotlieb (Primjer 4.)

2. Proračun slučajne pogreške rezultata analiza izraženih diskretnim veličinama

Prof. dr. Mirko FILAJDIĆ, dr. Vera VOJNOVIĆ, mr. Nada VAHČIĆ

Mnogi rezultati u kontroli kvalitete mlijeka i mliječnih proizvoda mogu se izraziti diskretnim veličinama. Te se veličine koriste za proračunavanje najvjerojatnijeg broja nekih pojava (m) koji će se pojaviti u grupi analiziranih (n) proizvoda. Takve pojave mogu biti, npr. pojava (m) jedinica nestandardne kakvoće u danom uzorku od (n) jedinica proizvodnje. U takvim i sličnim slučajevima nužno je znati ne toliko prosječni postotak škarta, već interval povjerenja za njih. Proračun intervala povjerenja prikazan je na slijedećoj shemi:



Shema 1: Slijed operacija za izračunavanje slučajne pogreške diskretnih veličina.

Za diskretne veličine vrijede BINOMNA i POISSONOVA raspodjela. Način utvrđivanja intervala povjerenja zavisi o oblicima raspodjele.

Pri utvrđivanju raspodjele, može se koristiti slijedeće empirijsko pravilo:

Ako je vjerojatnost pojave ispitivanog slučaja viša od 0,1, vrijedi binomna raspodjela, u protivnom Poissonova.

Uočena vrijednost pojave (m) događaja uz (n) ispitivanja je

$$P_{m,n} = \frac{m}{n} \qquad (11)$$

Kako u binomnoj tako i u Poissonovoj raspodjeli, $P_{m,n}$ predstavlja traženi srednji rezultat vjerojatnosti, koja vrijedi za sve podatke iz odnosne proizvodnje ukoliko je izuzeti uzorak dovoljno velik.

Interval povjerenja za $P_{m,n}$ — je u stvari interval koji je »zaokružujući« s danom pouzdanom vjerojatnošću (α ili $\bar{\alpha}$) opće vrijednosti vjerojatnosti (P), koja predstavlja vjerojatnost pojave događaja uz $n \to \infty$.

U slučaju binomne raspodjele uz $n \geq 30$ pogreška se utvrđuje formulom:

$$S^2 = \frac{\frac{m}{n}\left(1 - \frac{m}{n}\right)}{n - 1} \qquad (12)$$

t_2 – Student. vrijednost uz $f = \infty$ stup. sl. i zadani α.

$$\varepsilon = S \times t_\alpha \quad \text{(13)}$$

Uz ($n < 30$) treba koristiti posebne tablice. One su prikladne za male uzorke pri kontroli kakvoće proizvodnje i nisu prikladne za veću širinu intervala povjerenja.

Uz $P \geq 0{,}9$ formule (12) i (13) nisu prikladne. U tom slučaju treba koristiti Poissonovu raspodjelu očitujući događaj u smjeru suprotnom pravcu događaja.

U slučaju Poissonove raspodjele uz ($m \geq 50$) interval povjerenja utvrđuje se sa formulom:

$$\varepsilon = \frac{t_\alpha \times \sqrt{m}}{n} \quad \text{(14)}$$

Korekcije koje za to predlažu neki autori nisu velike, te se mogu i izostaviti. Uz $m < 50$ koristi se slijedeća formula:

$$P_{max} = \frac{\chi^2}{2 \cdot n} \quad \text{(15)}$$

(za gornju granicu intervala povjerenja)

$$P_{min} = \frac{m}{F \cdot n} \quad \text{(16)}$$

(za donju granicu intervala povjerenja)

gdje su: χ^2 = vrijednost kriterija Pearsona, pri zadanom (α) i $f = 2 \times (m + 1)$;
F = vrijednost kriterija Fishera, pri $P = 1 - \alpha$,
$f_1 = \infty$ i $f_2 = 2$ m. (Tablica 8. Priloga).

Rezultati mikrobiološkog pokusa obrađuju se na drugačiji način. Za mikrobiološki pokus obično se koristi nekoliko Petrijevih zdjelica na koje se nanose različito razređeni uzorci analiziranog materijala.

Rezultati se interpretiraju obično jednadžbom regresije prvog stupnja kojom se utvrđuje ovisnost broja mikroorganizama o veličini razrađenja. Nužno je da se koriste najmanje tri razređenja čiji se odnosi kreću u omjeru 1 : 2 : 5 : 10.

Proračun se provodi u slijedećom poretku.

Transformacija argumenta (nezavisne varijable) vrši se obično tako da se njene vrijednosti zamjenjuju recipročnim veličinama, što je nužno za konstrukciju grafa zavisnosti, te se izračunavaju srednje vrijednosti transformiranog argumenta formulom:

$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$, u kojoj (n) predstavlja broj Petrijevih zdjelica

Prilikom računanja srednje vrijednosti broja mikroorganizama proizvoda, broj mikroorganizama u Petrijevim zdjelicama izračunava se kao prosjek, te se veličina dijeli sa srednjom vrijednošću transformiranog argumenta. Nakon toga se računaju koeficijenti regresije formulama:

$$b_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})\, y_i}{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2} \qquad (17)$$

$$b_0 = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n} - b_i \times \bar{x} \qquad (18)$$

gdje je x_i i $\bar{x}$ — vrijednosti transformiranog argumenta (pojedinačinih i prosječnih vrijednosti).
y_i = broj mikroorganizama u i-toj Petrijevoj zdjelici
Jednadžba regresije glasi:

$$\hat{y} = b_0 + b_1 x \qquad (19)$$

gdje je $\hat{y} \rightarrow$ izračunata vrijednost broja mikroogranizama, a interval povjerenja glasi:

$$S^2 = \frac{1}{n - 2} \sum_{n=1}^{n} (y_i - \hat{y})^2 \qquad (20)$$

$$\varepsilon = \frac{s}{n} \times t \times \frac{1}{\bar{x}}$$ kriterij Studenta sa zad. α i $f = n - 2$.

PRIMJER 5.

U postupku kontrole kvalitete konzumnog pasteriziranog mlijeka provjerena je nepropusnost materijala za 5000 pakovanja. U provjerenom broju pakovanja utvrđeno je da 28 uzoraka propušta unesenu sadržinu mlijeka. Treba utvrditi postotak škarta.

Vjerojatnost pojave škarta

$P_{m,n} = 28/5000 = 0{,}0056$ što je $< 0{,}1$, pa za taj slučaj vrijedi Poissonova raspodjela. Budući da je $m < 50$, interval povjerenja izračunat će se pomoću formule (15) i (16):

Ako nas interesira dvostruka granica, to će za $\alpha = 0{,}95$ i $f = 2\,(28 + 1) = 58$ stupnjeva slobode Pearsonov kriterij iznositi $X^2 = 76{,}78$. (Fetisov, 1985). Tabela 4. Prilog.

$$P_{max} = \frac{76{,}778}{2 \times 5000} = 0{,}0077$$

Prema formuli (16) za $\alpha = 0,95$, $f_1 = \infty$ i $f_2 = 2 \times 28 = 56$, Fisherov kvocijent iznosi 1,92.

$$P_{min} = \frac{28}{1,92 \times 5000} = 0,0029$$

tj. postotak škarta iznosit će 0,3 do 0,8%.

PRIMJER 6.

U tvornici je analizirano n = 4000 originalnih pakovanja pasteriziranog mlijeka u tetrapak-kutijama, a ustanovljeno da je m = 82 propuštala sadržinu. Treba utvrditi postotak škarta.

$P_{m,n} = 82/4000 = 0,0205$, što je $< 0,1$, pa vrijedi Poissonova raspodjela. Budući da je $m > 50$, treba primijeniti formulu (14):

$\varepsilon = t_\alpha \times \sqrt{m}/n$; Kako je $t_{0,10}(\infty) = 1,64$, izračuna se

$1,64 \times \sqrt{82}/4000 = 0,0037$

Postotak škarta = 2 do 2,4%

$$(0,0205 \pm 0,0037) \cdot 100 = 1,68 \cong 2$$
$$= 2,42 \cong 2,4$$

PRIMJER 7.

Prilikom transporta ugušćenog mlijeka došlo je do deformacija limenki. Uzorak od 100 limenki pokazao je 30 oštećenih. Treba utvrditi postotak oštećenih konzervi.

$P_{m,n} = \frac{30}{100} = 0,3$ što je veće od 0,1 pa vrijedi binomna raspodjela.

U skladu sa formulom (12)

$$S^2 = \frac{\frac{30}{100}\left(1 - \frac{30}{100}\right)}{100 - 1} = 0,00212$$

Za $\alpha = 0,95$ i $f = \infty$ i $t_\alpha = 1,96$ pogreška (ε) će biti

$\varepsilon = \sqrt{0,00212} \cdot 1,96 = 0,0903$

Postotak oštećenih limenki je 30 ± 9%.

PRIMJER 8.

Utvrđeno je da je u prometnoj nezgodi od n = 100 limenki m = 95 oštećenih.

$P_{m,n} = \frac{95}{100} = 0,95$, što je veće od 0,90, pa se ne mogu koristiti formule (12) i (13). Ako se zamjene uvjeti n = 100, m = 5 neoštećenih limenki.

$P_{m,n} = \frac{5}{100} = 0{,}05$, što je manje od 0,1, pa vrijedi Poissonova raspodjela.
Kako je $m < 50$ koriste se formule (15) i (16), pa se za $\alpha = 0{,}95$ izračuna:

$P_{max} = \chi^2/2 \times n = 21/2.100 = 0{,}105$ za $f = 2(5+1) = 12$ st. sl.
$P_{min} = m/n \times F = 5/100 \times 2{,}54 = 0{,}019685 = 0{,}02$
$f_1 = \infty, f_2 = 2 \times 5 = 10, F = 2{,}54$
Drugim riječima, nije oštećeno od 2 do 10% limenki.

Zaključci

U ovom dijelu rada govori se o proračunu slučajne pogreške rezultata analiza izraženih diskretnim veličinama.

Prikazano je utvrđivanje vjerojatnosti $P_{m,n}$ kad njena vrijednost iznosi < 0,1, tj. u uvjetima Poissonove raspodjele a m (broj rijetkih događaja ili nepovoljnih rezultata) iznosi manje od 50 jedinica ($m < 50$), te se računaju granice vjerojatnosti P, kao P_{min} i P_{max} (Numerički primjer br. 5.).

— Problem kada je $P_{m,n} < 0{,}1$, a $m > 50$.
(Numerički primjer br. 6.)
— Problem $P_{m,n} > 0{,}1$, kad vrijedi binomna raspodjela
(Numerički primjer br. 7.).
— Posebni slučaj kada je $P_{m,n} > 0{,}90$.
(Numerički primjer br. 8.).

(Treći dio rada »**Usporedba rezultata analiza sastava i kvalitete u industrijskoj preradi**«, objavit ćemo u narednom broju)

PRILOG:

Tablica 1. Vrijednosti kriterija provjere nenormalnosti (V)
Tablica 2. Vrijednosti za procjenu prosjeka ($\bar{d}$)
Tablica 3. Visina ordinate za normalnu raspodjelu
Tablica 4. Podaci za procjenu Pearson kriterija (χ^2)
Tablica 5. Vrijednosti za procjenu intervala povjerenja ($t/\sqrt{n} \times M$)
Tablica 6. Vrijednosti Student kriterija (t)
Tablica 7. Vrijednosti za korekciju standardne devijacije za razne veličine uzorka
Tablica 8. Fisherovi kriteriji (F)
Tablica 9. Vrijednosti kriterija sukladnosti
Tablica 10. Vrijednosti kriterija za interval povjerenja

Tablica 1. Vrijednosti kriterija provjere na nenormalnost (V)

f	Razina znač. P				f	Razina znač. P			
	0,10	0,05	0,025	0,01		0,10	0,05	0,025	0,01
1	1,148	1,153	1,155	1,155	13	2,247	2,408	2,549	2,705
2	1,425	1,463	1,481	1,492	14	2,279	2,443	2,585	2,747
3	1.602	1.672	1,715	1,749	15	2,309	2,475	2,620	2,785
4	1,729	1,822	1,887	1,944	16	2,336	2,504	2.651	2,821
5	1.828	1,938	2,020	2.097	17	2,361	2,531	2,681	2.854
6	1.909	2,032	2,126	2,221	18	2,385	2,557	2,708	2,884
7	1,977	2,109	2,215	2,323	19	2,408	2,580	2,733	2,912
8	2,036	2,176	2,290	2,410	20	2,429	2,603	2,758	2,934
9	2,088	2,234	2,355	2,485	21	2,449	2,624	2,781	2,963
10	2,134	2,285	2,412	2,550	22	2,467	2,644	2,802	2,987
11	2,175	2,331	2,461	2,608	23	2,486	2,662	2,822	3,009
12	2,213	2,371	2,507	2,659					

Tablica 2. Vrijednosti za procjenu prosjeka ($\bar{d}$)

	0,01	0,05	0,10	0,90	0,95	0,99
11	0,9359	0,9073	0,8899	0,7409	0,7153	0,6675
16	9137	8884	8733	7452	7236	6829
21	9001	8768	8631	7495	7304	6950
26	8901	8686	8570	7530	7360	7040
31	8827	8625	8511	7559	7404	7110
36	8769	8578	8468	7583	7440	7167
41	8722	8540	8436	7604	7470	7216
46	8682	8508	8409	7621	7496	7256
51	8648	8481	8385	7636	7518	7291
61	0,8592	0,8434	0,8349	0,7662	0,7554	0,7347
71	8549	8403	8321	7683	7583	7393
81	8515	8376	8298	7700	7607	7430
91	8484	8353	8279	7714	7626	7460
101	8460	8344	8264	7726	7644	7487
201	0,8322	0,8229	0,8178	0,7796	0,7738	0,7629
301	8260	8183	8140	7828	7781	7693
401	8223	8155	8118	7847	7807	7731
501	8198	8136	8103	7861	7825	7757
601	8179	8123	8092	7873	7838	7776
701	8164	8112	8084	7878	7848	7791
801	8152	8103	8077	7885	7857	7803
901	8142	8096	8071	7890	7864	7814
1001	8134	8090	8066	7894	7869	7822

Mljekarstvo 41 (4) 102—111, 1991

Tablica 3. Visina ordinate za normalnu raspodjelu

n	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,39894	0,39892	0,39886	0,39876	0,39862	0,39844	0,39822	0,39767	0,39797	0,39733
0,1	0,39695	0,39654	0,39608	0,39559	0,39505	0,39448	0,39387	0,39322	0,39253	0,39181
0,2	0,39104	0,39024	0,38940	0,38853	0,38762	0,38667	0,38568	0,38466	0,38361	0,38251
0,3	0,38139	0,38023	0,37903	0,37780	0,37654	0,37524	0,37391	0,37255	0,37115	0,36973
0,4	0,36827	0,36678	0,36526	0,36371	0,36213	0,36053	0,35889	0,35723	0,35553	0,35381
0,5	0,35207	0,35029	0,34849	0,34667	0,34482	0,34294	0,34105	0,33912	0,33718	0,33521
0,6	0,33322	0,33121	0,32918	0,32713	0,32506	0,32297	0,32086	0,31874	0,31659	0,31443
0,7	0,31225	0,31006	0,30785	0,30563	0,30339	0,30114	0,29887	0,29659	0,29431	0,29200
0,8	0,28969	0,28737	0,28504	0,28269	0,28034	0,27798	0,27562	0,27324	0,27086	0,26848
0,9	0,26609	0,26369	0,26129	0,25888	0,25647	0,25406	0,25164	0,24923	0,24681	0,24439
1,0	0,24197	0,23955	0,23713	0,23471	0,23230	0,22988	0,22747	0,22506	0,22265	0,22025
1,1	0,21785	0,21546	0,21307	0,21069	0,20831	0,20594	0,20357	0,20121	0,19886	0,19652
1,2	0,19419	0,19186	0,18954	0,18724	0,18494	0,18265	0,18037	0,17810	0,17585	0,17360
1,3	0,17137	0,16915	0,16694	0,16474	0,16256	0,16038	0,15822	0,15608	0,15395	0,15183
1,4	0,14937	0,14764	0,14556	0,14350	0,14146	0,13943	0,13742	0,13542	0,13344	0,13147
1,5	0,12952	0,12758	0,12566	0,12376	0,12188	0,12051	0,11816	0,11632	0,11450	0,11270
1,6	0,11092	0,10915	0,10741	0,10567	0,10396	0,10226	0,10059	0,09893	0,09728	0,09566
1,7	0,09405	0,09246	0,09089	0,08933	0,08780	0,08628	0,08478	0,08329	0,08183	0,08038
1,8	0,07895	0,07754	0,07614	0,07477	0,07341	0,07206	0,07074	0,06943	0,06814	0,06687
1,9	0,06562	0,06438	0,06316	0,06195	0,06077	0,05959	0,05844	0,05730	0,05618	0,05508
2,0	0,05399	0,05292	0,05186	0,05082	0,04980	0,04879	0,04780	0,04632	0,04586	0,04491
2,1	0,04398	0,04307	0,04217	0,04128	0,04041	0,03955	0,03871	0,03788	0,03706	0,03626
2,2	0,03547	0,03470	0,03394	0,03319	0,03246	0,03174	0,03103	0,03034	0,02965	0,02898
2,3	0,02833	0,02768	0,02705	0,02643	0,02582	0,02522	0,02463	0,02406	0,02349	0,02294
2,4	0,02239	0,02186	0,02134	0,02083	0,02033	0,01984	0,01936	0,01889	0,01842	0,01797
2,5	0,01753	0,01709	0,01667	0,01625	0,01585	0,01545	0,01506	0,01468	0,14310	0,01394
2,6	0,01358	0,01323	0,01289	0,01256	0,01223	0,01191	0,01160	0,01130	0,01100	0,01071
2,7	0,01042	0,01014	0,00987	0,00961	0,00935	0,00909	0,00885	0,00861	0,00837	0,00814
2,8	0,00792	0,00770	0,00748	0,00727	0,00707	0,00687	0,00668	0,00649	0,00631	0,00613
2,9	0,00595	0,00578	0,00562	0,00545	0,00530	0,00514	0,00499	0,00485	0,00471	0,00457
	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
3,0	0,00443	0,00327	0,00238	0,00172	0,00123	0,00087	0,00061	0,00042	0,00029	0,00020

Tablica 4. Podaci za procjenu Pearson kriterija (χ^2)

f	α							
	0,001	0,0025	0,05	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
1	0,000157	0,000982	0,00393	0,0158	0,0642	0,148	0,275	0,455
2	0,02012	0,0506	0,103	0,211	0,446	0,713	1,022	1,386
3	0,115	0,216	0,352	0,584	1,005	1,424	1,869	2,366
4	0,297	0,484	0,711	1,064	1,649	2,195	2,753	3,357
5	0,554	0,831	1,145	1,610	2,343	3,000	3,655	4,351
6	0,872	1,237	1,635	2,204	3,070	3,828	4,570	5,348
7	1,239	1,690	2,167	2,833	3,822	4,671	5,493	6,346
8	1,646	2,180	2,733	3,490	4,594	5,527	6,423	7,344
9	2,088	2,700	3,325	4,168	5,380	6,393	7,357	8,343
10	2,558	3,247	3,940	4,865	6,179	7,267	8,295	9,342
11	3,053	3,816	4,575	5,578	6,989	8,148	9,237	10,341
12	3,571	4,404	5,226	6,304	7,807	9,034	10,182	11,340
13	4,107	5,009	5,892	7,042	8,634	9,926	11,129	12,340
14	4,660	5,629	6,571	7,790	9,467	10,821	12,079	13,339
15	5,229	6,262	7,261	8,547	10,307	11,721	13,030	14,339
16	5,812	6,908	7,962	9,312	11,152	12,624	13,983	15,338
17	6,408	7,564	8,672	10,085	12,002	13,531	14,937	16,338
18	7,015	8,231	9,390	10,865	12,857	14,440	15,893	17,338
19	7,633	8,907	10,117	11,651	13,716	15,352	16,850	18,338
20	8,260	9,591	10,851	12,443	14,578	16,266	17,809	19,337
21	8,897	10,283	11,591	13,240	15,445	17,182	18,768	20,337
22	9,542	10,982	12,338	14,041	16,314	18,101	19,729	21,337
23	10,196	11,688	13,091	14,848	17,187	19,021	20,690	22,337
24	10,856	12,401	13,848	15,659	18,062	19,943	21,652	23,337
25	11,524	13,120	14,611	16,473	18,940	20,867	22,616	24,337
26	12,198	13,844	15,379	17,292	19,820	21,792	23,579	25,336
27	12,879	14,573	16,151	18,114	20.703	22,719	24,544	26,336
28	13,565	15,308	16,928	18,939	21,588	23,647	25,509	27,336
29	14,256	16,047	17,708	19,768	22,475	24,577	26,475	28,336
30	14,953	16,791	18,493	20,599	23,364	25,508	27,442	29,336
31	15,655	17,539	19,281	21,434	24,255	26,440	28,409	30,336
32	16,362	18,291	20,072	22,271	25,148	27,373	29,376	31,336
33	17,073	19,047	20,867	23,110	26,042	28,307	30,344	32,336
34	17,789	19,806	21,664	23,952	26,938	29,242	31,313	33,336
35	18,509	20,569	22,465	24,797	27,836	30,178	32,282	34,336
36	19,233	21,336	23,269	25,643	28,735	31,115	33,252	35,336
37	19,960	22,106	24,075	26,492	29,635	32,053	34,222	36,336
38	20,691	22,878	24,884	27,343	30,537	32,992	35,192	37,335
39	21,426	23,654	25,695	28,196	31,441	33,932	36,163	38,335
40	22,164	24,433	26,509	29,051	32,345	34,872	37,134	39,335

f	α						
	0,6	0,7	0,8	0,9	0,95	0,975	0,999
1	0,708	1,074	1,642	2,706	3,841	5,024	6,635
2	1,833	2,408	3,219	4,605	5,991	7,378	9,210
3	2,946	3,665	4,642	6.251	7,815	9,348	11,345
4	4,045	4,878	5,989	7,779	9,488	11,143	13,277
5	5,132	6,064	7,289	9,236	11,070	12,832	15,086

f	α						
	0,6	0,7	0,8	0,9	0,95	0,975	0,099
6	6,211	7,231	8,558	10,645	12,592	14,449	16,812
7	7,283	8,383	9,803	12,017	14,067	16,013	18,475
8	8,351	9,524	11,030	13,362	15,507	17,535	20,090
9	9,414	10,656	12,242	14,684	16,919	19,023	21,666
10	10,474	11,781	13,442	15,987	18,307	20,483	23,209
11	11,530	12,899	14,631	17,275	19,675	21,920	24,725
12	12,584	14,011	15,812	18,549	21,026	23,336	26,217
13	13,636	15,119	16,980	19,812	22,362	24,736	27,688
14	14,685	16,222	18,151	21,064	23,685	26,119	29,141
15	15,733	17,322	19,311	22,307	24,996	27,488	30,578
16	16,780	18,418	20,465	23,542	26,296	28,845	32,000
17	17,824	19,511	21,615	24,769	27,587	30,191	33,409
18	18,868	20,601	22,760	25,989	28,869	31,526	34,805
19	19,910	21,689	23,900	27,204	30,144	32,852	36,191
20	20,951	22,775	25,038	28,412	31,410	34,170	37,566
21	21,991	23,858	26,171	29,615	32,671	35,479	38,932
22	23,031	24,939	27,301	30,813	33,924	36,781	40,289
23	24,069	26,018	28,429	32,007	35,172	38,076	41,638
24	25,106	27,096	29,553	33,196	36,415	39,364	42,980
25	26,143	28,172	30,675	34,382	37,652	40,646	44,314
26	27,179	29,246	31,795	35,563	38,885	41,923	45,642
27	28,214	30,319	32,912	36,741	40,113	43,194	46,963
28	29,249	31,391	34,027	37,916	41,337	44,461	48,278
29	30,283	32,461	35,139	39,087	42,557	45,722	49,588
30	31,316	33,530	36,250	40,256	43,773	46,979	50,892
31	32,349	34,598	37,359	41,422	44,985	48,232	52,191
32	33,381	35,665	38,466	42,585	46,194	49,480	53,486
33	34,413	36,731	39,572	43,745	47,400	50,725	54,776
34	35,444	37,795	40,676	44,903	48,602	51,966	56,061
35	36,475	38,859	41,778	46,059	49,802	53,203	57,342
36	37,505	39,922	42,879	47,212	50,998	54,437	58,619
37	38,535	40,984	43,978	48,363	52,192	55,668	59,892
38	39,564	42,045	45,076	49,513	53,384	56,895	61,162
39	40,593	43,105	46,173	50,660	54,572	58,120	62,428
40	41,622	44,165	47,269	51,805	55,758	59,342	63,691

f	α							
	0,01	0,025	0,05	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
41	22,906	25,215	27,326	29,907	33,251	35,813	38,105	40,335
42	23,650	25,999	28,144	30,765	34,157	36,755	39,077	41,335
43	24,398	26,785	28,965	31,625	35,065	37,698	40,050	42,335
44	25,148	27,575	29,787	32,487	35,974	38,641	41,022	43,335
45	25,904	28,366	30,612	33,350	36,884	39,585	41,995	44,335
46	26,657	29,160	31,439	34,215	37,795	40,529	42,968	45,335
47	27,416	29,956	32,268	35,081	38,708	41,474	43,942	46,335
48	28,177	30,755	33,098	35,949	39,621	42,420	44,915	47,335
49	28,941	31,555	33,930	36,818	40,534	43,366	45,889	48,335
50	29,707	32,357	34,764	37,689	41,449	44,313	46,864	49,335
51	30,475	33,162	35,600	38,560	42,365	45,261	47,838	50,335
52	31,246	33,968	36,437	39,433	43,281	46,209	48,813	51,335

f	α							
	0,01	0,025	0,05	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
53	32,018	34,776	37,276	40,308	44,199	47,157	49,788	52,335
54	32,793	35,586	38,116	41,183	45,117	48,106	50,764	53,335
55	33,570	36,398	38,958	42,060	46,036	49,054	51,739	54,335
56	34,350	37,212	39,801	42,937	46,955	50,005	52,715	55,335
57	35,131	38,027	40,646	43,816	47,876	50,956	53,691	56,335
58	35,913	38,844	41,492	44,696	48,797	51,906	54,667	57,335
59	36,698	39,662	42,339	45,577	49,718	52,857	55,643	58,335
60	37,485	40,482	43,188	46,459	50,641	53,809	56,620	59,335
61	38,273	41,303	44,038	47,342	51,564	54,761	57,597	60,335
62	39,063	42,126	44,889	48,226	52,487	55,714	58,574	61,335
63	39,855	42,950	45,741	49,111	53,412	56,666	59,551	62,335
64	40,649	43,776	46,595	49,996	54,336	57,619	60,528	63,335
65	41,444	44,603	47,450	50,883	55,262	58,573	61,506	64,335
66	42,240	45,431	48,305	51,770	56,188	59,527	62,484	65,335
67	43,038	46,261	49,162	52,659	57,115	60,481	63,461	66,335
68	43,838	47,092	50,020	53,548	58,042	61,436	64,440	67,334
69	44,639	47,924	50,879	54,438	58,970	62,391	65,418	68,334
70	45,442	48,758	51,739	55,329	59,898	63,346	66,396	69,334
71	46,246	49,592	52,600	56,221	60,827	64,302	67,375	70,334
72	47,051	50,428	53,462	57,113	61,756	65,258	68,353	71,334
73	47,858	51,265	54,325	58,006	62,686	66,214	69,332	72,334
74	48,666	52,103	55,189	58,900	63,616	67,170	70,311	73,334
75	49,475	52,942	56,054	59,795	64,547	68,127	71,290	74,334
76	50,286	53,782	56,920	60,690	65,478	69,084	72,270	75,334
77	51,097	54,623	57,786	61,586	66,409	70,042	73,249	76,334
78	51,910	55,466	58,654	62,483	67,341	70,999	74,228	77,334
79	52,725	56,309	59,522	63,380	68,274	71,957	75,208	78,334
80	53,540	57,153	60,391	64,278	69,207	72,915	76,188	79,334

f	α						
	0,6	0,7	0,8	0,9	0,95	0,975	0,999
41	42,651	45,224	48,363	52,949	56,942	60,561	64,950
42	43,679	46,282	49,456	54,090	58,124	61,777	66,206
43	44,706	47,339	50,548	55,230	59,304	62,990	67,459
44	45,734	48,396	51,639	56,369	60,481	64,201	68,709
45	46,761	49,452	52,729	57,505	61,656	65,410	69,957
46	47,787	50,507	53,818	58,641	62,830	66,617	71,201
47	48,814	51,562	54,906	59,774	64,001	67,821	72,443
48	49,840	52,616	55,993	60,907	65,171	69,023	73,683
49	50,866	53,670	57,079	62,038	66,339	70,222	74,919
50	51,892	54,723	58,164	63,167	67,505	71,420	76,154
51	52,917	55,775	59,248	64,295	68,669	72,616	77,386
52	53,942	56,827	60,332	65,422	69,832	73,810	78,616
53	54,967	57,879	61,414	66,548	70,993	75,002	79,843
54	55,992	58,930	62,490	67,673	72,153	76,192	81,069
55	57,016	59,980	63,577	68,796	73,311	77,380	82,292
56	58,040	61,031	64,658	69,918	74,468	78,567	83,513
57	59,064	62,080	65,737	71,040	75,624	79,752	84,733
58	60,088	63,129	66,816	72,160	76,778	80,936	85,950
59	61,111	64,178	67,894	73,279	77,931	82,117	87,166

 Mljekarstvo 41 (4) 102—111, 1991.

f	α						
	0,6	0,7	0,8	0,9	0,95	0,975	0,999
60	62,135	65,226	68,972	74,397	79,082	83,298	88,379
61	63,158	66,274	70,049	75,514	80,232	84,476	89,591
62	64,181	67,322	71,125	76,630	81,381	85,654	90,802
63	65,204	68,369	72,201	77,745	82,529	86,830	92,010
64	66,226	69,416	73,276	78,860	83,675	88,004	93,217
65	67,249	70,462	74,351	79,973	84,821	89,177	94,422
66	68,271	71,508	75,425	81,086	85,965	90,349	95,626
67	69,293	72,554	76,498	82,197	87,108	91,519	96,828
68	70,315	73,600	77,571	83,308	88,250	92,688	98,028
69	71,337	74,645	78,643	84,418	89,391	93,856	99,227
70	72,358	75,689	79,715	85,527	90,531	95,023	100,425
71	73,380	76,734	80,786	86,635	91,670	96,189	101,621
72	74,401	77,778	81,857	87,743	92,808	97,353	102,816
73	75,422	78,822	82,927	88,850	93,945	98,516	104,010
74	76,443	79,865	83,997	89,956	95,081	99,678	105,202
75	77,464	80,908	85,066	91,061	96,217	100,839	106,393
76	78,485	81,951	86,135	92,166	97,351	101,999	107,582
77	79,505	82,994	87,203	93,270	98,484	103,158	108,771
78	80,526	84,036	88,271	94,374	99,617	104,316	109,958
79	81,546	85,078	89,338	95,476	100,749	195,473	111,144
80	82,566	86,120	90,405	96,578	101,879	106,629	112,329

f	α							
	0,01	0,025	0,05	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
81	54,357	57,998	61,261	65,176	70,140	73,874	77,168	80,334
82	55,174	58,845	62,132	66,076	71,074	74,833	78,148	81,334
83	55,993	59,692	63,004	66,976	72,008	75,792	79,128	82,334
84	56,813	60,540	63,876	67,876	72,943	76,751	80,108	83,334
85	57,634	61,389	64,749	68,777	73,878	77,710	81,089	84,334
86	58,456	62,239	65,623	69,679	74,813	78,670	82,069	85,334
87	59,279	63,089	66,498	70,581	75,749	79,630	83,050	86,334
88	60,103	63,941	67,373	71,484	76,685	80,590	84,031	87,334
89	60,928	64,793	68,249	72,387	77,622	81,550	85,012	88,334
90	61,754	65,647	69,126	73,291	78,558	82,511	85,993	89,334
91	62,581	66,501	70,003	74,196	79,496	83,472	86,974	90,334
92	63,409	67,356	70,882	75,101	80,433	84,433	87,955	91,334
93	64,238	68,211	71,760	76,006	81,371	85,394	88,936	92,334
94	65,068	69,068	72,640	76,912	82,309	86,356	89,917	93,334
95	65,898	69,925	73,520	77,818	83,248	87,317	90,899	94,334
96	66,730	70,783	74,400	78,725	84,187	88,279	91,881	95,334
97	67,562	71,642	75,282	79,633	85,126	89,241	92,862	96,334
98	68,396	72,501	76,164	80,541	86,065	90,204	93,844	97,334
99	69,230	73,361	77,046	81,449	87,005	91,166	94,826	98,334
100	70,065	74,222	77,929	82,358	87,945	92,129	95,808	99,334

f	α						
	0,6	0,7	0,8	0,9	0,95	0,975	0,999
81	83,586	87,161	91,472	97;680	103,010	107,783	113,512
82	84,606	88,202	92,538	98,780	104,139	108,937	114,695
83	85,626	89,243	93,604	99,880	105,267	110,090	115,876
84	86,646	90,284	94,669	100,980	106,395	111,242	117,057
85	87,665	91,325	95,734	102,079	107,522	112,393	118,236
86	88,685	92,365	96,799	103,177	108,648	113,544	119,414
87	89,704	93,405	97,863	104,275	109,773	114,693	120,591
88	90,723	94,445	98,927	105,372	110,898	115,841	121,767
89	91,742	95,484	99,991	106,469	112,022	116,989	122,942
90	92,761	96,524	101,054	107,565	113,145	118,136	124,116
91	93,780	97,563	102,117	108,661	114,268	119,282	125,289
92	94,799	98,602	103,179	109,756	115,390	120,427	126,462
93	95,818	99,641	104,241	110,850	116,511	121,571	127,633
94	96,836	100,679	105,303	111,944	117,632	122,715	128,803
95	97,855	101,717	106,364	113,038	118,752	123,858	129,973
96	98,873	102,755	107,425	114,131	119,871	125,000	131,141
97	99,892	103,793	108,486	115,223	120,990	126,141	132,309
98	100,910	104,831	109,547	116,315	122,108	127,282	133,476
99	101,928	105,868	110,607	117,407	123,225	128,422	134,642
100	102,946	106,906	111,667	118,498	124,342	129,561	135,807

Tablica 5. Vrijednosti za procjenu intervala povjerenja ($t/\sqrt{n} \times M$)

n	α = 0,80	α = 0,90	α = 0,95
2	2,738	5,594	11,258
3	1,229	1,902	2,802
4	0,889	1,276	1,726
5	0,729	1,013	1,320
6	0,633	0,865	1,103
7	0,567	0,765	0,964
8	0,518	0,694	0,866
9	0,481	0,640	0,793
10	0,450	0,580	0,715
	$\bar{\alpha}$ = 0,90	0,95	0,975

 Mljekarstvo 41 (4) 102—111, 1991.

Tablica 6. Vrijednosti Student kriterija (t)

f	P = 0,3; α = 0,70	P = 0,2; α = 0,80	P = 0,1; α = 0,90	P = 0,05; α = 0,95	P = 0,02; α = 0,98	P = 0,01; α = 0,99
1	1,963	3,078	6,314	12,706	31,821	63,657
2	1,386	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925
3	1,250	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841
4	1,190	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604
5	1,156	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032
6	1,134	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707
7	1,119	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499
8	1,108	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355
9	1,100	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250
10	1,093	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169
11	1,088	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106
12	1,083	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055
13	1,079	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012
14	1,076	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977
15	1,074	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947
16	1,071	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921
17	1,069	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898
18	1,067	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878
19	1,066	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861
20	1,064	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845
21	1,063	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831
22	1,061	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819
23	1,060	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807
24	1,059	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797
25	1,058	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787
26	1,058	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779
27	1,057	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771
28	1,056	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763
29	1,055	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756
30	1,055	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750
∞	1,03643	1,28155	1,64485	1,95996	2,32634	2,57582

Tablica 7. Vrijednosti za korekciju standardne devijacije za razne veličine uzorka

f	M	$\frac{1}{M}$	f	M	$\frac{1}{M}$
1	0,797885	1,25331	17	985410	01481
2	886227	12838	18	986214	01398
3	921318	08540	19	986934	01324
4	939986	06385	20	987583	01257
5	951533	05094	25	0,990052	1.01005
6	0,959369	1,04235	30	991703	00837
7	965030	03624	35	992884	00717
8	969311	03166	40	993770	00627
9	972659	02811	45	994460	00557
10	975350	02527	50	0,995013	1,00501
11	0,977559	1,02296	60	995842	00418
12	979406	0,2103	70	996435	00358
13	980971	01940	80	996880	00313
14	982316	01800	90	997226	00278
15	983484	01679	100	997503	1,00250
16	0,984506	1,01574			

Tablica 8. Fisherovi kriteriji (F)

f_2	f_1															
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	16	24	40	100	∞
1	161	200	216	225	230	234	273	239	241	242	244	246	249	251	6334	6366
	4052	4999	5403	5625	5764	5859	5928	5981	6022	6056	6106	6169	6234	6286	254	253
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,36	19,37	19,38	19,39	19,41	19,43	19,45	19,47	19,49	19,50
	98,49	99,01	99,17	99,25	99,30	99,33	99,34	99,36	99,40	99,40	99,42	99,44	99,46	99,48	99,49	99,50
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,88	8,84	8,81	8,78	8,74	8,69	8,64	8,60	8,56	8,53
	34,12	30,81	29,46	28,71	28,24	27,91	27,34	27,49	27,34	27,23	27,05	26,83	26,60	26,41	26,23	26,12
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,96	5,91	5,84	5,77	5,71	5,66	5,63
	21,20	18,00	16,69	15,98	15,52	15,21	14,98	14,80	14,66	14,54	14,37	14,15	13,93	13,74	13,57	13,46
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,78	4,74	4,68	4,60	4,53	4,46	4,40	4,36
	16,26	13,27	12,06	11,39	10,97	10,67	10,45	10,27	10,15	10,05	9,89	9,68	9,47	9,29	9,13	9,02
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06	4,00	3,92	3,84	3,77	3,71	3,67
	13,74	10,92	9,78	9,15	8,75	8,47	8,26	8,10	7,98	7,87	7,72	7,52	7,31	7,14	6,99	6,88
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,8	3,63	3,57	3,49	3,41	3,34	3,28	3,23
	12,25	9,55	8,45	7,85	7,46	7,19	7,00	6,84	6,71	6,62	6,47	6,27	6,07	5,90	5,75	5,65
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39	3,34	3,28	3,20	3,12	3,05	2,98	2,93
	11,26	8,65	7,59	7,01	6,63	6,37	6,19	6,03	5,91	5,82	5,67	5,48	5,28	5,11	4,96	4,86
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,13	3,07	2,98	2,90	2,82	2,76	2,71
	10,56	8,02	6,99	6,42	6,06	5,80	5,62	5,47	5,35	5,26	5,11	4,92	4,73	4,56	4,41	4,31
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,97	2,91	2,82	2,74	2,67	2,59	2,54
	10,04	7,56	6,55	5,99	5,64	5,39	5,21	5,06	4,95	4,85	4,71	4,52	4,33	4,17	4,01	3,91
12	4,75	3,88	3,49	3,26	3,11	3,00	2,92	2,85	2,80	2,76	2,69	2,60	2,50	2,42	2,35	2,30
	9,33	6,93	5,95	5,41	5,06	4,82	4,65	4,50	4,39	4,30	4,16	3,98	3,78	3,61	3,46	3,36
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,77	2,70	2,65	2,60	2,53	2,44	2,35	2,26	2,19	2,13
	8,86	6,51	5,56	5,03	4,69	4,46	4,28	4,14	4,03	3,94	3,80	3,62	3,43	3,26	3,11	3,00
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,54	2,49	2,42	2,33	2,24	2,16	2,07	2,01
	8,53	6,23	5,29	4,77	4,44	4,20	4,03	3,89	3,78	3,69	3,55	3,37	3,18	3,01	2,86	2,75
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,58	2,51	2,46	2,41	2,34	2,25	2,15	2,07	1,98	1,92
	8,28	6,01	5,09	4,58	4,25	4,01	3,85	3,71	3,60	3,51	3,37	3,19	3,00	2,83	2,68	2,57

Tablica 9. Vrijednosti kriterija sukladnosti

n	m=3	m=4	m=5	m=6	m=7
3	—	—	5,37	6,93	8,74
4	—	1,62	5,52	7,16	9,04
5	—	4,17	4,62	7,30	9,21
6	—	4,21	5,67	7,38	9,31
8	3,01	4,24	5,74	7,48	9,44
10	3,00	4,26	5,78	7,53	9,52
15	2,99	4,29	5,84	7,61	9,61
20	2,99	4,30	5,86	7,64	9,66

10. Vrijednosti kriterija za interval povjerenja

f	α=0,90		α=0,95		α=0,99	
	z_1	z_2	z_1	z_2	z_1	z_2
1	0,272	7,994	0,246	16,004	0,220	80,062
2	0,400	3,112	0,364	4,434	0,310	9,990
3	0,478	2,304	0,439	2,949	0,378	5,131
4	0,531	1,980	0,491	2,405	0,428	3,691
5	0,571	1,805	0,531	2,124	0,467	3,027
6	0,601	1,693	0,562	1,950	0,497	2,647
7	0,627	1,616	0,587	1,832	0,523	2,402
8	0,647	1,558	0,609	1,746	0,544	2,229
9	0,664	1,512	0,627	1,680	0,563	2,101
10	0,679	1,476	0,642	1,628	0,580	2,002
11	0,692	1,447	0,656	1,585	0,594	1,923
12	0,704	1.421	0,668	1,550	0,607	1,858
13	0,714	1,400	0,679	1,520	0,619	1,804
14	0,724	1,381	0,689	1,494	0,629	1,758
15	0,732	1,365	0,698	1,471	0,639	1,718
16	0,740	1,350	0,706	1,451	0,648	1,683
17	0,747	1,337	0,714	1,433	0,656	1,653
18	0,753	1,326	0,721	1,417	0,664	1,625
19	0,759	1,315	0,727	1,402	0,671	1,601
20	0,765	1,306	0,733	1,389	0,678	1,579
21	0,770	1,297	0,739	1,377	0,684	1,559
22	0,775	1,288	0,744	1,366	0,690	1,541
23	0,779	1,281	0,749	1,356	0,695	1,525
24	0,783	1,274	0,754	1,347	0,701	1,509
25	0,788	1,267	0,758	1,388	0,705	1,495
26	0,791	1,261	0,762	1,330	0,710	1,482
27	0,795	1,256	0,766	1,322	0,715	1,470
28	0,798	1,250	0,770	1,315	0,719	1,458
29	0,802	1,245	0,773	1,308	0,723	1,448
34	0,816	1,224	0,789	1,280	0,741	1,403
39	0,827	1,207	0,801	1,258	0,755	1,369
44	0,837	1,193	0,812	1,241	0,767	1,342
49	0,844	1,182	0,821	1,226	0,778	1,320
59	0,857	1,164	0,835	1,203	0,795	1,285
69	0,868	1,151	0,847	1,186	0,808	1,260