Stručni rad
Prihvaćeno 27. 06. 2012.

TATJANA SLIJEPČEVIĆ - MANGER

Obujam rotacijskog tijela

The Volume of a Solid of Revolution

ABSTRACT

In this paper we present classical methods (disk and shell integration) to compute the volume of a solid of revolution. We also give a method to compute the volume of a solid of revolution as a double integral. In the end we show how Guldin-Pappus' theorem follows from the third method.

Key words: volume, solid of revolution, disk method, shell method, double integral

MSC 2010: 26B15, 28A75, 51M25

Obujam rotacijskog tijela

SAŽETAK

U ovom članku su opisane klasične metode diska i ljuske za računanje volumena rotacijskih tijela. Također je navedena metoda za računanje volumena rotacijskih tijela pomoću dvostrukog integrala, te Guldin-Pappusov poučak kao neposredna posljedica te metode.

Ključne riječi: volumen, rotacijsko tijelo, metoda diska, metoda ljuske, dvostruki integral

1 Uvod

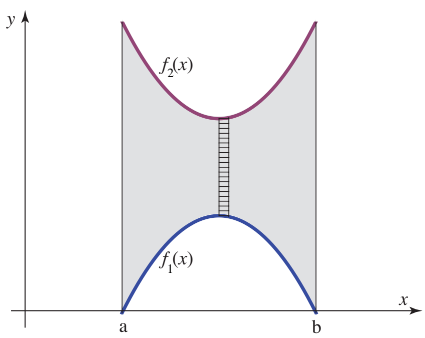
Računanje obujma rotacijskog tijela je uobičajena tema koja se pojavljuje u kolegijima iz matematike na preddiplomskoj razini studiranja [1]. Udžbenici obično sadrže dvije klasične metode izvoda formula za računanje obujma rotacijskog tijela:

- metodu ljuske, gdje se tijelo podijeli vertikalno na tanke koncentrične ljuske oko osi vrtnje,
- metodu diska, koja se sastoji u djeljenju tijela horizontalno na tanke slojeve okomite na os vrtnje.

Metodu odabiremo prema načinu zadavanja područja koje rotira i prema izboru osi rotacije o čemu će biti govora nešto kasnije. U ovom članku su opisane metode ljuske i diska, a također i metoda računanja volumena rotacijskog tijela pomoću dvostrukog integrala. Metode diska i ljuske se mogu izvesti iz spomenutog dvostrukog integrala korištenjem Fubinijevog teorema. Direktna posljedica dvostrukog integrala za računanje volumena rotacijskog tijela je i Guldin-Pappusov poučak. Svi rezultati su bez gubitka općenitosti prikazani za slučaj rotacije oko osi y.

2 Klasične metode

Izvedimo formulu za računanje obujma rotacijskog tijela metodom ljuske. Promotrimo područje Ω koje je omeđeno neprekidnim funkcijama $y = f_1(x)$ i $y = f_2(x)$ između $x = a$ i $x = b$ kao u primjeru na slici 1.



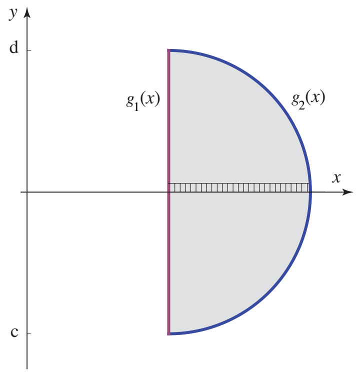
Slika 1: *Područje omeđeno funkcijama $f_1(x)$ i $f_2(x)$ između a i b*

Za svaku točku $T(x,y) \in \Omega$ x-koordinata predstavlja udaljenost točke T od osi rotacije y. Označimo s $V(\Omega, y)$ obujam tijela dobivenog rotacijom područja Ω oko osi y. Odaberemo određeni $x \in [a,b]$. Promotrimo vertikalnu trakicu koja se prostire od donjeg do gornjeg ruba lika Ω širine $\mathrm{d}x$ kao na slici 1. Kada vertikalna trakica rotira oko osi y, dobivamo vertikalnu cilindričnu ljusku približnog obujma $2\pi x(f_2(x) - f_1(x))\mathrm{d}x$. Zbrajanjem obujama ljusaka za sve $x \in [a,b]$ dobivamo približni obujam rotacijskog tijela. Prelaskom na limes, kada širina trakice teži prema nuli, zbroj prelazi u integral

$$V(\Omega, y) = \int_a^b 2\pi x(f_2(x) - f_1(x))\mathrm{d}x,$$

koji predstavlja točnu vrijednost obujma rotacijskog tijela dobivenu metodom ljuske (detaljnije obrazloženje pogledajte u [1], točka 7.5.2, stranica 318).

Sada ćemo izvesti formulu za računanje obujma rotacijskog tijela metodom diska. Pretpostavimo da je područje Ω omeđeno funkcijama $x = g_1(y)$ i $x = g_2(y)$ između $y = c$ i $y = d$ kao u primjeru na slici 2.



Slika 2: *Područje omeđeno funkcijama $g_1(y)$ i $g_2(y)$ između c i d*

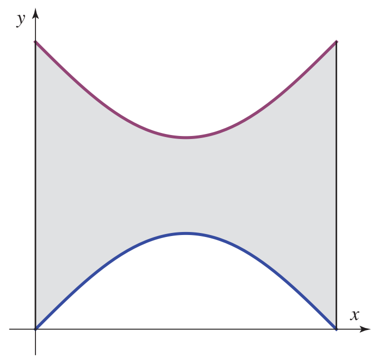
Fiksiramo $y \in [c,d]$ i promotrimo vodoravnu trakicu duž lika Ω visine dy kao na slici 2. Kada trakica rotira oko osi y, dobivamo vodoravni disk približnog obujma $\pi(g_2^2(y) - g_1^2(y))\mathrm{d}y$. Zbrajanjem obujama svih diskova za $y \in [c,d]$ dobivamo približni obujam rotacijskog tijela. Prelaskom na limes, kada visina vodoravne trakice teži prema nuli, zbroj postaje integral

$$V(\Omega,y) = \int_c^d \pi(g_2^2(y) - g_1^2(y))\mathrm{d}y,$$

koji predstavlja točnu vrijednost obujma rotacijskog tijela dobivenu metodom diska (detaljnije obrazloženje pogledajte u [1], točka 7.5.2, stranica 318).

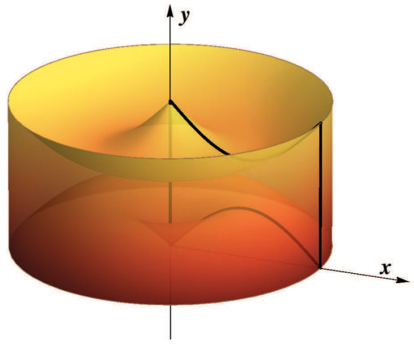
3 Obujam kao dvostruki integral

Neka je Ω zatvoreno područje koje se nalazi u ravnini $z = 0$ i ne siječe os y, kao na slici 3.



Slika 3: *Zatvoreno područje Ω koje rotiramo oko osi y.*

Kada lik Ω rotiramo oko osi y dobivamo rotacijsko tijelo prikazano na slici 4.



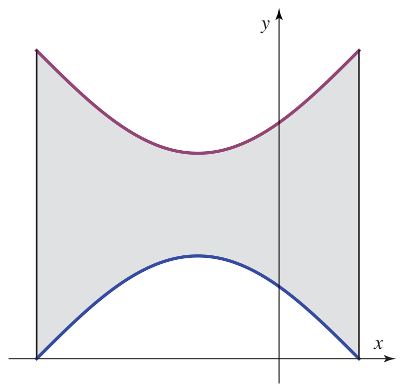
Slika 4: *Rotacijsko tijelo nastalo rotacijom područja Ω sa slike 3.*

Izvedimo formulu za računanje obujma rotacijskog tijela uz pomoć dvostrukog integrala. Za svaku točku $T(x,y) \in \Omega$, promotrimo sitni pravokutnik sa središtem u točki T površine dS. Kada pustimo da pravokutnik rotira oko osi y, dobijemo prstenasti dio rotacijskog valjka obujma $2\pi x\mathrm{d}S$. Zbroj svih takvih prstenastih dijelova daje približnu vrijednost obujma rotacijskog tijela. Ukoliko prijeđemo na limes, kada površina pravokutnika teži prema nuli, dobijemo formulu za obujam rotacijskog tijela pomoću dvostrukog integrala:

$$V(\Omega,y) = \iint_\Omega 2\pi x\mathrm{d}S. \tag{1}$$

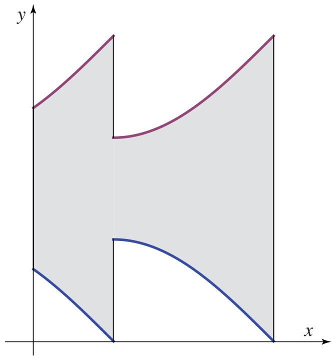
Primijetimo da se opisane metode računanja obujma rotacijskog tijela odnose na slučajeve kada os rotacije y ne siječe lik Ω.

Postavlja se pitanje kako odrediti obujam rotacijskog tijela kada os rotacije y siječe lik Ω kao na slici 5.

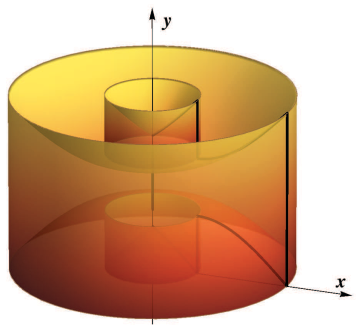


Slika 5: *Os rotacije y siječe područje Ω.*

U tom slučaju potrebno je rotirati lik koji se dobije kao unija dijela područja s desne strane osi y i zrcalne slike područja s lijeve strane osi y kako je prikazano na slici 6.



Slika 6: *Unija dijela područja Ω s desne strane osi y i zrcalne slike dijela područja Ω s lijeve strane osi y.*



Slika 7: *Rotacijsko tijelo koje nastaje rotacijom područja Ω sa slike 5 oko osi y.*

Primjer koji slijedi pokazuje da prikazani pristup računanja obujma pomoću dvostrukog integrala ima nekih prednosti u odnosu na klasične metode. Naime, prilikom računanja dvostrukog integrala možemo koristiti polarne koordinate u kojima je određivanje integrala u nekim slučajevima jednostavnije nego u Kartezijevim koordinatama.

Neka je Ω područje u ravnini omeđeno jediničnom kružnicom $x^2+y^2=1$ i pravcima $y=\sqrt{3}x$ i $y=-x$ kao na slici 8. Izračunajmo, koristeći integrale, obujam tijela dobivenog rotacijom područja Ω oko osi y.

• Koristeći metodu ljuske dobijemo sljedeću formulu za obujam rotacijskog tijela

$$V(\Omega,y)=\int_0^{\frac{1}{2}}2\pi(\sqrt{3}x+x)\mathrm{d}x+\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}}2\pi(\sqrt{1-x^2}+x)\mathrm{d}x$$

$$+\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1}2\pi(2\sqrt{1-x^2})\mathrm{d}x.$$

• Prema metodi diska traženi obujam se računa po formuli

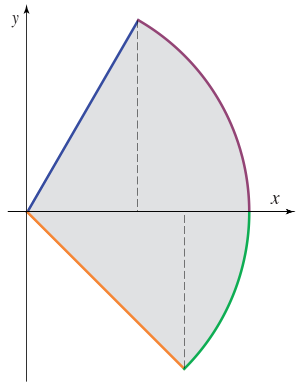
$$V(\Omega,y)=\int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{0}\pi(1-y^2-y^2)\mathrm{d}y+\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\pi\left(1-y^2-\frac{y^2}{3}\right)\mathrm{d}y.$$

• Prema formuli (1) obujam rotacijskog tijela možemo izračunati prelaskom na polarne koordinate na sljedeći način

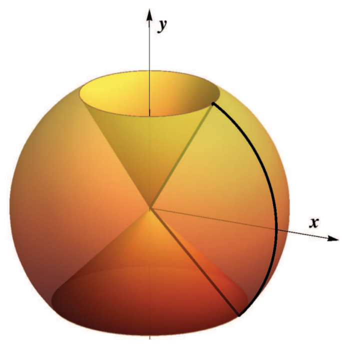
$$V(\Omega,y)=\iint_\Omega 2\pi x\mathrm{d}S=2\pi\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\mathrm{d}\phi\int_0^1 r\cdot r\cos\phi\mathrm{d}r$$

$$=2\pi\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\cos\phi\mathrm{d}\phi\int_0^1 r^2\mathrm{d}r=2\pi\sin\phi\Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{r^3}{3}\Big|_0^1=\frac{\pi}{3}(\sqrt{3}+\sqrt{2}).$$

Prema tome, obujam rotacijskog tijela se u ovom primjeru izračuna nešto lakše pomoću dvostrukog integrala nego klasičnom metodom ljuske.



Slika 8: *Područje omeđeno jediničnom kružnicom $x^2+y^2=1$ i pravcima $y=\sqrt{3}x$ i $y=-x$.*



Slika 9: *Rotacijsko tijelo koje nastaje rotacijom područja sa slike 8 oko osi y.*

4 Izvod klasičnih metoda

Sada ćemo pokazati kako možemo dobiti klasične metode diska i ljuske iz formule (1).

Promotrimo najprije područje Ω koje je omeđeno neprekidnim funkcijama $y=f_1(x)$ i $y=f_2(x)$ između $x=a$ i $x=b$ kao u primjeru na slici 1. Prema Fubinijevom teoremu dvostruki integral $I=\iint_\Omega 2\pi x\mathrm{d}S$ možemo izračunati pomoću jednostrukih integrala na sljedeći način

$$I=\int_a^b\left(\int_{f_1(x)}^{f_2(x)}2\pi x\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x=\int_a^b 2\pi x(f_2(x)-f_1(x))\mathrm{d}x,$$

što predstavlja dobro poznatu formulu koja se dobije metodom ljuske.

Pretpostavimo sada da je područje Ω omeđeno funkcijama $x = g_1(y)$ i $x = g_2(y)$ između $y = c$ i $y = d$ kao u primjeru na slici 2. I u ovom slučaju, koristeći Fubinijev teorem, svedemo dvostruki integral I na formulu

$$I = \int_c^d \left(\int_{g_1(y)}^{g_2(y)} 2\pi x \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y = \int_c^d \pi(g_2^2(y) - g_1^2(y))\mathrm{d}y,$$

koja odgovara metodi diska.

Sada se postavlja pitanje zbog čega su klasične metode za računanje obujma rotacijskog tijela u suštini jednake, iako su na prvi pogled geometrijski posve različite. Odgovor na spomenuto pitanje je vrlo jednostavan. Naime, koristeći formulu $\iint_\Omega 2\pi x \mathrm{d}S$ zapravo zbrajamo obujme prstenastih dijelova rotacijskog valjka dobivene rotiranjem pravokutnika sa središtem u $T(x,y)$ površine $\mathrm{d}S$ oko y-osi. Zbrajanje svih obujama možemo provoditi na dva različita načina:

• Odaberemo određeni $x = x_0$. Zbrajanjem obujama prstenastih dijelova rotacijskog valjka koji odgovaraju točkama (x_0, y) za sve y takve da je $(x_0, y) \in \Omega$, dobijemo vertikalnu cilindričnu ljusku. Sada treba samo zbrojiti obujme tih ljusaka da bismo dobili približni obujam rotacijskog tijela. Opisani postupak zapravo predstavlja metodu ljuske.

• Neka je $y = y_0$ fiksan. Zbroj obujama prstenastih dijelova rotacijskog valjka koji odgovaraju točkama (x, y_0) za sve x takve da je $(x, y_0) \in \Omega$ predstavlja vodoravni disk. Sada zbrojimo obujme svih takvih diskova da bismo dobili približni obujam rotacijskog tijela. Opisani postupak nije ništa drugo nego metoda diska.

Dakle, dvije klasične metode slijede iz dvostrukog integrala tako da se prstenasti dijelovi rotacijskog valjka, čiji obujmi se zbrajaju, pažljivo polože na odgovarajući način.

5 Guldin-Pappusov poučak

Promotrimo zatvoreno područje Ω u ravnini $z = 0$ koje ne siječe os y kao na slici 3. Označimo sa C težište područja Ω, a s $\mathcal{D}$ površinu od Ω. Uz navedene oznake, Guldin-Pappusov poučak u klasičnom obliku kaže da je obujam rotacijskog tijela dobivenog rotacijom područja Ω oko osi y dan formulom:

$$V(\Omega, y) = 2\pi x_C \mathcal{D},$$

gdje je x_C apscisa težišta C područja Ω. Drugim riječima, obujam torusa koji se dobije rotacijom područja Ω oko osi y je jednak obujmu cilindra osnovice Ω i visine $2\pi x_C$.

Izvedimo sada Guldin-Pappusov poučak koristeći dvostruki integral za računanje obujma rotacijskog tijela. Prisjetimo se da se koordinate težista $C(x_C, y_C)$ lika Ω površine $\mathcal{D}$ računaju prema formulama

$$x_C = \frac{\iint_\Omega x \mathrm{d}S}{\mathcal{D}}, \quad y_C = \frac{\iint_\Omega y \mathrm{d}S}{\mathcal{D}}.$$

Sada iz formule (1) slijedi:

$$V(\Omega, y) = \iint_\Omega 2\pi x \mathrm{d}S = 2\pi \iint_\Omega x \mathrm{d}S = 2\pi x_C \mathcal{D},$$

pri čemu smo koristili linearnost integrala i definiciju težišta.

6 Zaključak

Metoda određivanja obujma rotacijskog tijela pomoću dvostrukog integrala je zanimljiva ne samo s matematičkog, nego i sa stanovišta metodike nastave. Ponovimo neke od prednosti opisane metode:

- Metoda predstavlja poopćenje metode diska, metode ljuske i Guldin-Pappusovog poučka. Svi navedeni rezultati slijede neposredno iz formule (1).
- Primjena tehnika računanja dvostrukog integrala, kao što je prelazak na polarne koordinate, u nekim slučajevima pojednostavljuje postupak računanja.
- Odabir klasične metode za računanje obujma rotacijskog tijela ovisi o obliku tijela. Za primjenu metode određivanja obujma pomoću dvostrukog integrala oblik tijela nije bitan.

Literatura

[1] T. Došlić, N. Sandrić, *Matematika I*, interna skripta Građevinskog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu

[2] P. Javor, *Matematička analiza 1*, Element, Zagreb, 2001.

[3] P. Javor, *Matematička analiza 2*, Element, Zagreb, 2002.

[4] J. Martín-Morales, A. M. Oller-Marcén, Volumes of Solids of Revolution. A Unified Approach, arXiv:1205.2204v1 [math.HO] 10 May 2012

Tatjana Slijepčević-Manger
e-mail: tmanger@grad.hr

Građevinski fakultet, Sveučilište u Zagrebu

Fra Andrije Kačića-Miošića 26, 10000 Zagreb