

Naprezanje u slojevitim kompozitnim pločama

Marina Rakočević

Ključne riječi

slojevita kompozitna ploča, metoda konačnih elemenata, naprezanje, matematički model, fizikalno-mehanička svojstva

Key words

multilayered composite slab, finite element method, stress, mathematical model, physicomachanical properties

Mots clés

plaque composite multicouche, méthode des éléments finis, contrainte, modèle mathématique, propriétés physicomécaniques

Ключевые слова

слоистая композитная плита, метод конечных элементов, напряжение, математическая модель, физико-механические свойства

Schlüsselworte

schichtige Kompositplatte, Methode der endlichen Elemente, Spannung, mathematisches Modell, physikalisch-mechanische Eigenschaften

M. Rakočević

Prethodno priopćenje

Naprezanje u slojevitim kompozitnim pločama

Početno se objašnjava što se smatra slojevitim kompozitnim pločama. Opisuje se analiza debelih i srednje debelih ploča koja se provodi primjenom metode konačnih elemenata. Istaknuto je da matematički model prikazan u ovom radu daje realniju raspodjelu naprezanja po debljini slojevite ploče. Pokazano je da se opisani model konačnog elementa može primijeniti za proračun ploča s različitom orijentacijom slojeva pri čemu slojevi mogu imati različita fizikalna mehanička svojstva.

M. Rakočević

Preliminary note

Stress in multilayered composite slabs

General notions about multilayered composite slabs are given in the introductory part of the paper. The analysis of slabs of medium and high thickness, based on the finite element method, is described. It is emphasized that the mathematical model presented in this paper provides a more realistic distribution of stress along the thickness of multilayered slabs. It is demonstrated that the described finite element model can be used for the calculation of slabs with different orientation of layers, and even with different physicomachanical properties of individual layers.

M. Rakočević

Note préliminaire

Contrainte dans les plaques composites multicouches

Les notions générales sur les plaques composites multicouches sont présentées dans la partie initiale de l'ouvrage. L'analyse des plaques de petite à moyenne épaisseur, se basant sur la méthode des éléments finis, est décrite. L'auteur souligne que le modèle mathématique présenté dans l'ouvrage donne une information plus réaliste sur la distribution des contraintes le long de l'épaisseur des plaques multicouches. Il est démontré que le modèle des éléments finis décrit peut être utilisé dans le calcul des plaques avec l'orientation différente des couches, et avec les propriétés physicomécaniques différentes des couches individuelles.

M. Rakočević

Предварительное сообщение

Напряжение в слоистых композитных плитах

В начале статьи объясняется, что считается слоистыми композитными плитами. Описывается анализ толстых и среднетолстых плит, проводящийся методом конечных элементов. Подчеркнуто, что математическая модель, показанная в этой работе, даёт более реальное распределение напряжений по толщине слоистой плиты. Показано, что описанная модель конечного элемента может применяться для расчёта плит с различной ориентацией слоёв, причём слои могут иметь различные физико-механические свойства.

M. Rakočević

Vorherige Mitteilung

Spannungen in schichtigen Kompositplatten

Anfänglich erklärt man was man als schichtige Kompositplatten haltet. Beschrieben ist die Analyse dicker und mitteldicker Platten, die durch Anwendung der Methode der endlichen Elemente durchgeführt wird. Hervorgehoben ist dass das in diesem Artikel dargestellte mathematische Modell des endlichen Elements eine reellere Verteilung der Spannungen längs der Dicke der schichtigen Platte ergibt. Man zeigt dass das beschriebene Modell des endlichen Elements für die Berechnung von Platten mit verschiedener Orientierung der Schichten angewendet werden kann, wobei die Schichten verschiedene physikalisch-mechanische Eigenschaften haben können.

Autor: Mr. sc. Marina Rakočević, dipl. ing. građ.; Građevinski fakultet Univerziteta Crne Gore, Podgorica

1 Uvod

Kompozitni se materijali dobivaju kombinacijom dvaju ili više materijala koji zajedno postižu značajke koje odvojeno ne mogu postići. U svijetu je posljednjih godina naglo porasla upotreba ovih materijala jer zbog svoje težine i izuzetne otpornosti imaju prednost nad konvencionalnim materijalima.

U građevinarstvu se kompozitni materijali uglavnom rabe kao dijelovi konstrukcije: grede, ploče ili ljsuske, međutim, trenutno je najznačajnija njihova primjena u sanaciji dijelova konstrukcije. Neosporno je da su kompozitni materijali materijali budućnosti, jer omogućavaju konstruktoru da izabere značajke presjeka zavisno od problema koji se javlja u konstrukciji. Zbog svoje kompleksnosti područje kompozitnih materijala obuhvaća više znanstvenih grana koje, svaka na svoj način, daju doprinos razvoju suvremenih materijala.

Kompozitne ploče koje su napravljene od slojeva nazivamo laminatne ili slojevite ploče. Sloj, odnosno lamina, osnovni element slojevite kompozitne ploče, čini osnovna masa (tzv. matrica) u koju su ugrađena vlakna koja mogu biti isprekidana, neprekidna u jednom pravcu, neprekidna u oba pravca, valovita u jednome ili dva pravca. Kod vlaknastih slojevitih kompozita vlakna su nosivi elementi, dok osnovna masa ima ulogu da zaštiti vlakna od vanjskih utjecaja, da ih drži zajedno i da obavlja ravnomjernu raspodjelu utjecaja na svako vlakno. Materijali koji se upotrebljavaju za izradu vlakna imaju veću nosivost, a geometrijski gledano ploština poprečnog presjeka vlakna mnogo je manja od njegove duljine. Materijali od kojih se izrađuju vlakna mogu biti aluminij, bakar, željezo, nikl, čelik, titan, ili pak materijali kakvi su staklo, ugljik, grafit, itd. Sloj koji sadrži vlakna u jednom pravcu ima bolja svojstva u pravcu vlakna negoli u pravcu okomitom na vlakno.

Nasuprot homogenim izotropnim pločama, heterogenost anizotropne konstrukcije slojevite kompozitne ploče često izaziva pojavu velikog broja nepravilnosti koje se mogu pojaviti na općoj razini ploče, ili na razini sloja, kao i na lokalnom razini vlakno/osnovna masa. Opća je deformacija slojevitih ploča često definirana sa kompliciranim vezama između aksijalne deformacije, savijanja i posmika. Kod ovakvih ploča za manje odnose dužine prema debljini značenje posmičnih deformacija je veće nego kod odgovarajućih homogenih izotropnih ploča. Na razini sloja, kompoziti često sadrže koncentraciju poprečnih naprezanja u blizini materijalnih ili geometrijskih diskontinuiteta, efekt slobodnog kraja koji dovodi do oštećenja. Dosadašnji klasični matematički modeli, zasnovani na pretpostavci o homogenim i izotropnim materijalima, ne mogu obuhvatiti ove probleme, kao ni veliki spektar sličnih problema koji se pojavljuju kod kompo-

zitivnih konstrukcija. Stoga je potrebno razviti matematički model koji će, na razini sloja, biti u stanju da u proračun uvede kinematičko i materijalno objašnjenje ako ne svih, onda većine parametara koji mogu utjecati na promjenu stanja naprezanja u presjecima. Uza sve to mora se voditi računa da na točnost ne utječe cijena proračuna.

Metoda konačnih elemenata je veoma značajna metoda za rješavanje i integralnih i diferencijalnih jednačbi. Osnovna ideja ove metode je prikaz nekog područja kao skupa jednostavnih geometrijskih oblika nazvanih konačni elementi. Fizička diskretizacija područja konačnim elementima čini da ova metoda bude dragocjena pri rješavanju velikog broja inženjerskih problema.

U ovom radu prikazan je kinematički promjenljiv konačni element koji se zasniva na postavkama parcijalne teorije slojeva [1]. Ova teorija zanemaruje deformaciju okomito na ravninu ploče pa je konačni element kinematički promjenljiv element nazvan LW1 element. Ovaj je element hijerarhijski i u njega se mogu ugraditi pojave delaminacije, odnosno raspucavanja. Stvaran element LW1 može se proširiti na složeniji 3D model, element LW2, jednostavnim dodavanjem zanemarene deformacije u osnovne relacije teorije.

2 Matrica krutosti elementa LW1

2.1 Deformacija ploče

Polje pomaka u parcijalnoj teoriji slojeva definiramo na sljedeći način:

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u(x, y) + U(x, y, z) \\ v(x, y, z) &= v(x, y) + V(x, y, z) \\ w(x, y, z) &= w(x, y) \end{aligned} \quad (1)$$

gdje su $u(x, y)$, $v(x, y)$ i $w(x, y)$ pomaci točaka $(x, y, 0)$ srednje ravnine ploče, a pomaci $U(x, y, z)$ i $V(x, y, z)$ dani su kao rezultat čvornih pomaka po debljini i usvojene interpolacijske funkcije $\psi^J(z)$:

$$\begin{aligned} U(x, y, z) &= \sum_{J=1}^n u^J(x, y) \psi^J(z) \\ V(x, y, z) &= \sum_{J=1}^n v^J(x, y) \psi^J(z) \end{aligned} \quad (2)$$

gdje je n broj čvorova po debljini ploče.

Na osnovi usvojenog polja pomaka dobiju se komponente tenzora deformacija:

$$\{e\} = \begin{Bmatrix} u_{,x} \\ v_{,y} \\ u_{,y} + v_{,x} \\ w_{,y} \\ w_{,x} \end{Bmatrix} \quad \{e^j\} = \begin{Bmatrix} u_{,x}^j \\ v_{,y}^j \\ u_{,y}^j + v_{,x}^j \\ u^j \\ v^j \end{Bmatrix} \quad (3)$$

gdje je $\{\varepsilon\}$ deformacija srednje ravnine ploče, a $\{\varepsilon^j\}$ deformacija po debljini ploče. Deformacija se može prikazati u sljedećem obliku:

$$\{e\} = [H]\{\Delta\}, \quad \{e^j\} = [\bar{H}]\{\Delta^j\} \quad (4)$$

gdje su vektori pomaka definirani na sljedeći način:

$$\{\Delta\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix}, \quad \{\Delta^j\} = \begin{Bmatrix} u^j \\ v^j \end{Bmatrix} \quad (5)$$

$\{\Delta\}$ je vektor pomaka srednje ravnine ploče, $\{\Delta^j\}$ je vektor pomaka čvora j po debljini ploče. Članovi matrica $[H]$ i $[\bar{H}]$ su prve derivacije interpolacijskih funkcija po nepoznicama u ravnini (x, y) .

2.2 Veze komponenta tenzora naprezanja i deformacija

Pretpostavlja se da se sloj sastoji od homogenog ortotropnog materijala. Za j -ti sloj veza naprezanja – deformacija jest:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{Bmatrix}^{(j)} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} & 0 & 0 \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} & 0 & 0 \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{Q}_{44} & \bar{Q}_{45} \\ 0 & 0 & 0 & \bar{Q}_{45} & \bar{Q}_{55} \end{bmatrix}^{(j)} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix}^{(j)} \quad (6)$$

Matrica koeficijenta j -tog vlaknima ojačanog sloja određuje se transformacijom materijalnih svojstava iz lokalnog koordinatnog sustava sloja u globalni koordinatni sustav slojevite ploče. Naprezanja u ravnini (x, y) dobivaju se primjenom jednadžbe (6). Posmična naprezanja σ_{xz}^j i σ_{yz}^j dobivena primjenom ovih jednadžbi imaju konstantne vrijednosti duž j -tog sloja. Da bi se odredio realniji raspored po debljini može se primijeniti aproksimativni postupak koji je opisan u [5].

2.3 Izoparametarska formulacija elementa

Generalizirani pomaci konačnog elementa (u, v, w, u^j, v^j) prikazuju se kao linearna kombinacija interpolacijske dvodimenzijske funkcije φ_i i čvornih vrijednosti $(u_i, v_i, w_i, u_i^j, v_i^j)$ na sljedeći način:

$$(u, v, w, u_j, v_j) = \sum_{i=1}^m (u_i, v_i, w_i, u_i^j, v_i^j) \varphi_i \quad (7)$$

Interpolacijske funkcije φ_i definirane su u funkciji prirodnih koordinata (ξ, η) . U izoparametarskoj analizi konačnim elementima koordinate se interpoliraju na isti način kao i pomaci elementa:

$$x = \sum_{i=1}^m x_i \varphi_i(\xi, \eta) \quad (8)$$

$$y = \sum_{i=1}^m y_i \varphi_i(\xi, \eta)$$

Matrice H i \bar{H} definiraju se na sljedeći način ((3), (4) i (7)):

$$[H]_{(5 \times 3m)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} & 0 & 0 & \dots & \frac{\partial \varphi_m}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} & 0 & 0 & \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} & 0 & \dots & \frac{\partial \varphi_m}{\partial y} & 0 & 0 \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} & 0 & \dots & \frac{\partial \varphi_m}{\partial y} & \frac{\partial \varphi_m}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} & \dots & 0 & 0 & \frac{\partial \varphi_m}{\partial x} \\ 0 & 0 & \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} & 0 & 0 & \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} & \dots & 0 & 0 & \frac{\partial \varphi_m}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$[\bar{H}]_{(5 \times 2m)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} & 0 & \dots & \frac{\partial \varphi_m}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} & \dots & 0 & \frac{\partial \varphi_m}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} & \dots & \frac{\partial \varphi_m}{\partial y} & \frac{\partial \varphi_m}{\partial x} \\ \varphi_1 & 0 & \varphi_2 & 0 & \dots & \varphi_m & 0 \\ 0 & \varphi_1 & 0 & \varphi_2 & \dots & 0 & \varphi_m \end{bmatrix} \quad (10)$$

gdje je m broj čvorova u ravnini ploče.

Prvi derivacije koordinata u globalnom sustavu mogu se prikazati s pomoću prvih derivacija koordinata lokalnog sustava na sljedeći način:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{,\xi} & y_{,\xi} \\ x_{,\eta} & y_{,\eta} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} \varphi_{,\xi}^i \\ \varphi_{,\eta}^i \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \begin{Bmatrix} \varphi_{,\xi}^i \\ \varphi_{,\eta}^i \end{Bmatrix} \quad (11)$$

Druge derivacije interpolacijskih funkcija koji se rabe pri izračunavanju posmičnih naprezanja u ravnini (x, z) i (y, z) definiraju se na sljedeći način:

$$\begin{Bmatrix} \varphi_{,xx} \\ \varphi_{,yy} \\ \varphi_{,xy} \end{Bmatrix} = [J_1]^{-1} \begin{Bmatrix} \varphi_{, \xi \xi}^i \\ \varphi_{, \eta \eta}^i \\ \varphi_{, \xi \eta}^i \end{Bmatrix} - [J_2] \begin{Bmatrix} \varphi_{, \eta x}^i \\ \varphi_{, \eta y}^i \end{Bmatrix} \quad (12)$$

gdje su :

$$[J_1] = \begin{bmatrix} x_{,\xi}^2 & y_{,\xi}^2 & 2y_{,\xi}^2 x_{,\xi}^2 \\ x_{,\eta}^2 & y_{,\eta}^2 & 2y_{,\eta}^2 x_{,\eta}^2 \\ x_{,\eta \xi} & y_{,\eta \xi} & x_{,\eta \xi} + y_{,\eta \xi} \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$[J_2] = \begin{bmatrix} x_{,\xi\xi} & y_{,\xi\xi} \\ x_{,\eta\eta} & y_{,\eta\eta} \\ x_{,\eta\xi} & y_{,\eta\xi} \end{bmatrix} \quad (14)$$

2.4 Matrica krutosti kinematički promjenljivog konačnog elementa

Prva je varijacija potencijalne energije deformacije konačnog elementa:

$$\delta\Pi_e = \int_{V_e} \varepsilon^T \bar{Q} \delta\varepsilon dV \quad (15)$$

Primjenom izraza (5) i (4) dobiva se:

$$\varepsilon = H\Delta + \bar{H} \sum_{j=1}^n \theta^j \Delta^j \quad (16)$$

gdje su θ^j interpolacijske funkcije okomite na ravninu ploče ili njezine derivacije:

$$\theta^j(z) = \begin{bmatrix} \psi^j(z) \\ \psi^j(z)_{,z} \end{bmatrix} \quad (17)$$

Ako se (16) uvrsti u (15) dobiva se

$$\delta\Pi_e = \int_{V_e} \left(\Delta^T H^T + \bar{H}^T \sum_{J=1}^n \theta^J \Delta^{JT} \right) \cdot \bar{Q} \cdot \left(H \delta\Delta + \bar{H} \sum_{I=1}^n \theta^I \delta\Delta^I \right) dV \quad (18)$$

Nakon množenja, matrica krutosti elementa dobiva oblik volumenskog integrala s kojeg se može preći na ploštinski integral, uvodeći već poznate odnose za A, B^J i D^{IJ} matrice:

$$k_e = \iiint_{V_e} H^T \bar{Q} H + \sum_{J=1}^n H^T \bar{Q} \theta^J \bar{H} + \sum_{I=1}^n \bar{H}^T \bar{Q} \theta^I H + \sum_{I=1}^n \sum_{J=1}^n \bar{H}^T \bar{Q} \theta^I \theta^J \bar{H} \quad dV = \quad (19)$$

$$\iint_{A_e} \left(H^T A H + \sum_{J=1}^n H^T B^J \bar{H} + \sum_{I=1}^n \bar{H}^T B^I H + \sum_{I=1}^n \sum_{J=1}^n \bar{H}^T D^{IJ} \bar{H} \right) dA$$

U matricnom obliku, s 4 submatrice, matrica krutosti elementa ima sljedeći oblik:

$$\mathbf{k}_e = \begin{bmatrix} \mathbf{k}^{11} & \mathbf{k}_1^{12} & \mathbf{k}_2^{12} & \dots & \mathbf{k}_n^{12} \\ \mathbf{k}_1^{21} & \mathbf{k}_{11}^{22} & \mathbf{k}_{12}^{22} & \dots & \mathbf{k}_{1n}^{22} \\ \mathbf{k}_2^{21} & \mathbf{k}_{12}^{22} & \mathbf{k}_{22}^{22} & \dots & \mathbf{k}_{2n}^{22} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{k}_n^{21} & \mathbf{k}_{n1}^{22} & \mathbf{k}_{n2}^{22} & \dots & \mathbf{k}_{nn}^{22} \end{bmatrix} \quad (20)$$

gdje submatrice predstavljaju članove zbroja jednadžbe (19):

$$k^{11} = \iint_{A_e} H^T A H dA \quad (21a)$$

$$\mathbf{k}_i^{12} = \iint_{A_e} \mathbf{H}^T \mathbf{B}^i \bar{\mathbf{H}} d\mathbf{A} \quad i=1,2,\dots,n \quad (21b)$$

$$k_i^{21} = \iint_{A_e} \bar{\mathbf{H}}^T B^i H dA \quad i=1,2,\dots,n \quad (21c)$$

$$k_{ij}^{22} = \iint_{A_e} \bar{\mathbf{H}}^T D^{ij} \bar{\mathbf{H}} dA \quad i,j=1,2,\dots,n \quad (21d)$$

Elementi matrice A zavise od značajki slojeva slojevite kompozitne ploče, a elementi matrice B^J i D^{IJ} su funkcija karakteristika slojeva i usvojene interpolacijske funkcije i njezinih derivacija po visini presjeka [4].

Ploštinski integral računa se u sustavu prirodnih koordinata :

$$dA = dx dy = \det J d\xi d\eta \quad (22)$$

i tada je:

$$\iint_{A_e} (\dots) dA = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} (\dots) \det J d\xi d\eta \quad (23)$$

S obzirom na (23), elemente submatrice možemo prikazati na sljedeći način:

$$\mathbf{k}^{11} = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \mathbf{H}^T \mathbf{A} \mathbf{H} \det \mathbf{J} d\xi d\eta$$

$$k_i^{12} = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} H^T B^i \bar{H} \det J d\xi d\eta \quad i=1,2,\dots,n \quad (24)$$

$$\mathbf{k}_i^{21} = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \bar{\mathbf{H}}^T \mathbf{B}^i \mathbf{H} \det \mathbf{J} d\xi d\eta \quad i=1,2,\dots,n$$

$$\mathbf{k}_{ij}^{22} = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \bar{\mathbf{H}}^T \mathbf{D}^{ij} \bar{\mathbf{H}} \det \mathbf{J} d\xi d\eta \quad i,j=1,2,\dots,n$$

3 Interpolacijske funkcije i numerička integracija

Teorija slojeva uvodi dva tipa interpolacijskih funkcija. Prvi tip su interpolacijske funkcije u ravnini (x,y) koje se mogu naći u literaturi koja definira probleme u ravnini [6]. Drugi tip su interpolacijske funkcije po debljini ploče. To su funkcije varijable z i mogu biti linijske, kvadratne ili funkcije varijable višega reda [6].

Za pravokutne modele konačnog elementa moguće je primijeniti široki spektar standardnih interpolacijskih funkcija i u ravnini (x, y) i po debljini sloja. Na raspolaganju nam stoje 2D elementi:

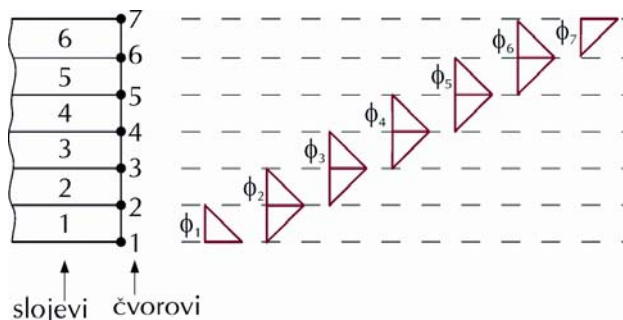
- E4 - četveročvorni Lagrangeov pravokutni element
- E8 - osmeročvorni serendipiti pravokutni element
- E9 - deveteročvorni Lagrangeov pravokutni element
- E12 - dvanaesteročvorni serendipiti pravokutni element
- E16 - šesnaesteročvorni Lagrangeov pravokutni element

Svaki od ovih elemenata može se kombinirati s jednim ili više jednodimenzijskih Lagrangeovih elemenata po debljini:

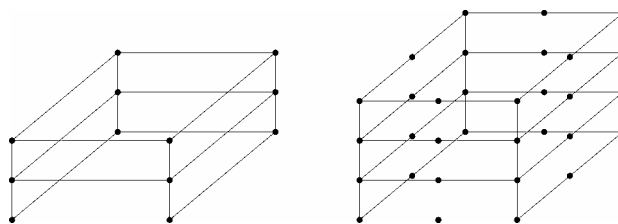
- L - linearni element
- Q - kvadratni element
- C - kubični element

i kreirati široki spektar različitih konačnih elemenata teorije slojeva. Oznaka E12-L5 označava 2D element s 12 čvorova kombiniran s 5 linearnih 1D elemenata po debljini.

Ako slojevitou ploču čini N slojeva s linearnom interpolacijom po debljini (slika 1., [4]) i interpolacijom s m čvorova u ravnini (x, y), tada je ukupan broj stupnjeva slobode jednog elementa $(3 + 2n)m$, gdje je $n = N + 1$. Za konačni element dan na slici 2.a, $m = 4$, $N = 2$, $n = 2 + 1 = 3$, a broj stupnjeva slobode jest $(3 + 2 \times 3) \times 4 = 36$. Za primjer dan na slici 2.b, $m = 8$, $N = 3$, broj stupnjeva slobode jest $(3 + 2 \times 4) \times 8 = 88$.



Slika 1. $N = 6$, $n = 7$, linearne i interpolacijske funkcije dvaju susjednih slojeva



Slika 2. Pravokutni konačni element: (a) E4-L2; (b) E8-L3

Da bismo izračunali elemente matrice krutosti, potrebno je provesti numeričku integraciju. Obično rabimo Gauss-Legendreov postupak integracije definiran na sljedeći način:

$$I(\xi, \eta) = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} f(\xi, \eta) d\xi d\eta = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \omega_i \omega_j f(\bar{\xi}_i, \bar{\eta}_j) \quad (25)$$

gdje su ω_i , $i\omega_j$ težinski koeficijenti integracije, a $(\bar{\xi}_i, \bar{\eta}_j)$ koordinate točaka u kojima se vrši integracija. Težinski koeficijenti i položaj integracijskih točaka za najčešće upotrebljavan red integracije kod konačnih elemenata ploče mogu se pronaći u [6].

4 Uvjetne jednadžbe u metodi konačnih elemenata

Uvjetne jednadžbe u metodi konačnih elemenata računaju se iz principa virtualnih pomaka. Prva varijacija potencijala cijelog sustava elemenata jest:

$$\delta\Pi = \delta U^T K U - \delta U^T F \quad (26)$$

gdje je U - vektor pomaka cijelog sustava, F - vektor čvornih sila i K - matrica krutosti sustava. Primjenom principa virtualnih pomaka na prethodni izraz dobivamo jednadžbe metode konačnih elemenata:

$$K U = F \quad (27)$$

5 Numerički primjeri

Primjenom vlastitog programskog paketa **BELACOP** (**B**ending of **L**aminated **C**omposite **P**late) napisanog u programskom jeziku Fortran 90, za četveročvorni konačni element LW1 dobiveni su numerički podaci koji slijede. Na slikama koje slijede prikazani su rezultati proračuna četveroslojne kompozitne ploče podijeljene na 16 elemenata E4-L4 i граниčnim uvjetima $u = v = w = 0$.

U primjerima su usvojene sljedeća materijalna svojstva $E_1 = 25$, $E_2 = 1$, $G_{12} = G_{13} = 0,5$, $G_{23} = 0,2$, $\nu_{12} = \nu_{13} = 0,25$.

Naprezanja su dana u bezdimenzijskom obliku:

$$(\bar{\sigma}_{xz}, \bar{\sigma}_{yz}) = \frac{1}{q_0 s} (\sigma_{xz}, \sigma_{yz}),$$

$$(\bar{\sigma}_{xx}, \bar{\sigma}_{yy}, \bar{\sigma}_{xy}) = \frac{1}{q_0 s^2} (\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}) \quad (28)$$

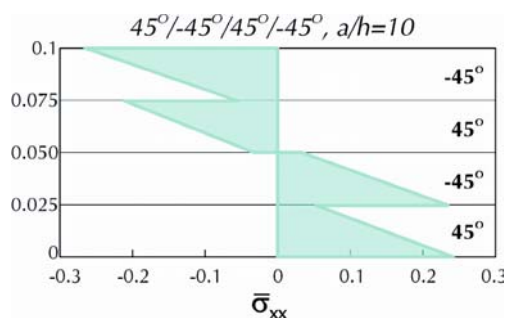
u Gaussovima tačkama:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{xx}, \bar{\sigma}_{yy} &(0.4471688a; 0.4471688a) \\ \bar{\sigma}_{xy} &(0.05283122a; 0.05283122a) \\ \bar{\sigma}_{xz} &(0.9471688a; 0.4471688a) \\ \bar{\sigma}_{yz} &(0.4471688a; 0.9471688a) \end{aligned} \quad (29)$$

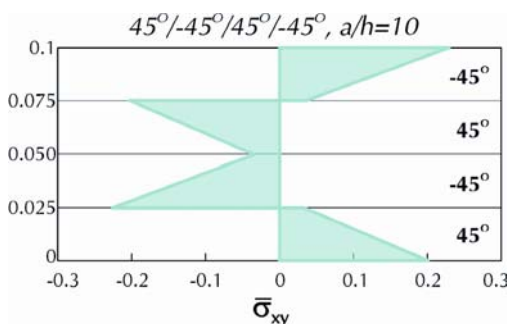
gdje je $s = a/h$ (odnos duljine i debljine ploče), pri čemu je usvojeno da je $a = b$, a q_0 je intenzitet ravnomjerno raspodijeljenog opterećenja svakog elementa posebno.

5.1 Slobodno oslonjena ploča $45^0/-45^0/45^0/-45^0$

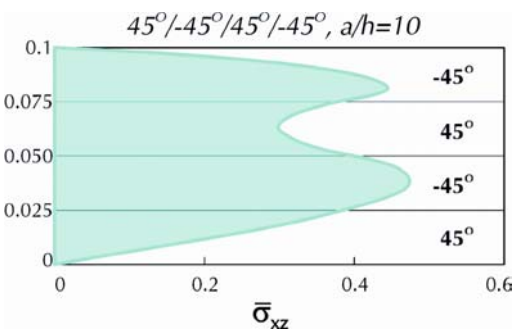
Za slojevitom ploču s antimetričnim rasporedom slojeva $45^0/-45^0/45^0/-45^0$ odnosa $a/h = 10$ promjena napreznja po debljini prikazana je na slikama 3. – 6.



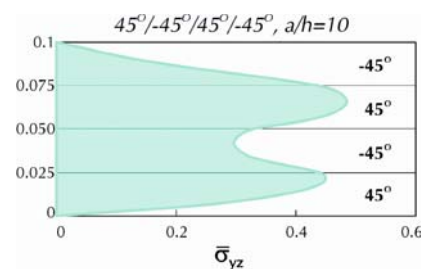
Slika 3. Promjena napreznja $\bar{\sigma}_{xx} = \bar{\sigma}_{yy}$ po debljini ploče



Slika 4. Promjena napreznja $\bar{\sigma}_{xy}$ po debljini ploče



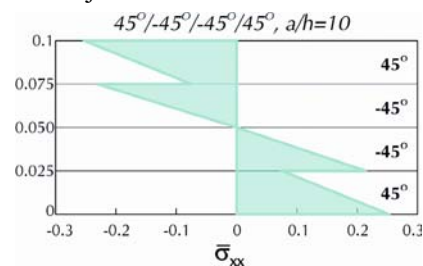
Slika 5. Promjena napreznja $\bar{\sigma}_{xz}$ po debljini ploče



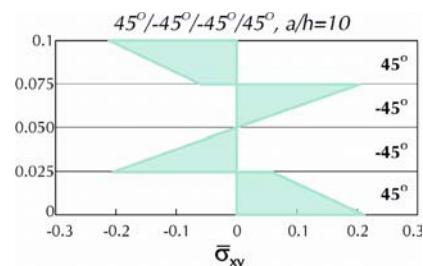
Slika 6. Promjena napreznja $\bar{\sigma}_{yz}$ po debljini ploče

5.2 Slobodno oslonjena ploča $450/-450/-450/450$

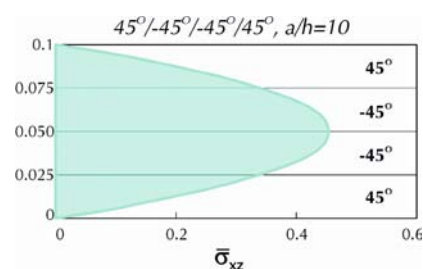
Na slikama 7.do 10. prikazana su napreznja za simetričan raspored slojeva $45^0/-45^0/-45^0/45^0$ odnosa $a/h = 10$.



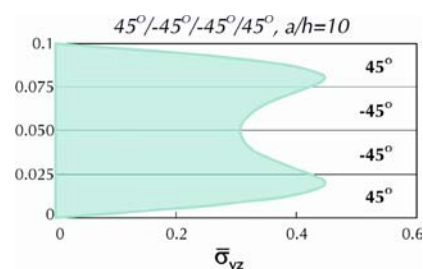
Slika 7. Promjena napreznja $\bar{\sigma}_{xx} = \bar{\sigma}_{yy}$ po debljini ploče



Slika 8. Promjena napreznja $\bar{\sigma}_{xy}$ po debljini ploče



Slika 9. Promjena napreznja $\bar{\sigma}_{xz}$ po debljini ploče



Slika 10. Promjena napreznja $\bar{\sigma}_{yz}$ po debljini ploče

6 Zaključak

Iako rezultati dobiveni primjenom metode konačnih elemenata ovise o izboru graničnih uvjeta, interpolacijskoj funkciji u ravnini (x , y), interpolaciji po debljini ploče, kao i o broju elemenata usvojene mreže, ipak je ova metoda pogodna za analizu slojevitih kompozitnih ploča. Prikazanim modelom konačnog elementa mogu se rješavati ploče s proizvoljnim rasporedom i kutom orijentacije slojeva, pri čemu svaki sloj može imati različite fizikalno-mehaničke značajke. Konačni element LW1 izveden na osnovama parcijalne teorije slojeva daje realniji raspored naprezanja po debljini ploče, što je veoma važno za debele i umjereno debele ploče i probleme koji se kod njih javljaju.

LITERATURA

- [1] Reddy, J. N.: *Mechanics of Laminated Composite Plates - Theory and Analysis*, Department of Mechanical Engineering, Texas A&M University, College Station, 1997.
- [2] Reddy, J. N.; E. J. Barbero, E. J.; Teply, J.: *An accurate determination of stresses in thick laminates using a generalized plate theory*, International Journal for Numerical Methods in engineering, Vol. 29, 1-14(1990).
- [3] Reddy, J. N.; E. J. Barbero, E. J.: *A plate bending element based on a generalized laminated plate theory*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 28, 2275-2292(1989).
- [4] Vuksanović, Đ.; Rakočević, M.: *Opšta teorija laminarnih ploča – analitičko rješenje za slobodno oslonjene ploče*, Simpozijum o istraživanjima i primjeni savremenih dostignuća u našem građevinarstvu u oblasti materijala i konstrukcija, JUDIMK oktobar 2002, 125-130.
- [5] Chaudhuri, R.A.; Seide, P.: *An approximate semi-analytical method for prediction of interlaminar shear stresses in an arbitrarily laminated thick plate*, Computers and Structures, Vol.25, No.4, pp.627-636, 1987.
- [6] Bathe, K.J.: *Finite element procedures in engineering analysis*, Department of Mechanical Engineering Massachusetts Institute of Technology, Prentice-Hall, Inc., New Jersey, 1982.