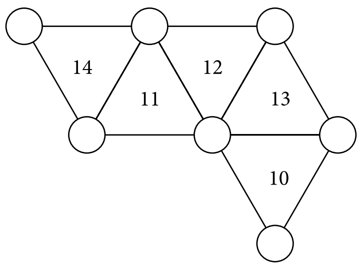
ZABAVNI ZADATCI

Alija Muminagić i Jens Carstensen, Danska

U knjizi *Zabavna matematika u nastavi matematike* prof. Zdravko Kurnik piše: *Početak školske godine (nastava matematike još nije „ozbiljno" krenula); zabavni zadatci su vrlo pogodno sredstvo da nastavi daju početni zamah i potaknu interes za učenje matematike.*

Za tu svrhu smatramo da su pogodna i sljedeća dva zadatka.

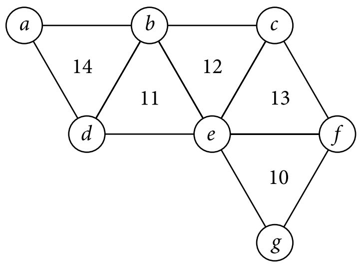
Zadatak 1. U sedam kružića (na slici 1.) upišite prvih sedam prirodnih brojeva tako da zbroj brojeva u tri kružića koji određuju pojedini trokut bude jednak broju upisanom u unutrašnjosti tog trokuta.



Slika 1.

Rješenje. Uz oznake kao na slici 2., prema uvjetu zadatka, vrijedi

$$a + b + c + d + e + f + g = 28.$$



Slika 2.

Prema uvjetima zadatka vrijedi:

$$a + b + d = 14 \quad (1)$$

$$b + d + e = 11 \quad (2)$$

$$b + c + e = 12 \quad (3)$$

$$c + e + f = 13 \quad (4)$$

$$e + f + g = 10 \quad (5)$$

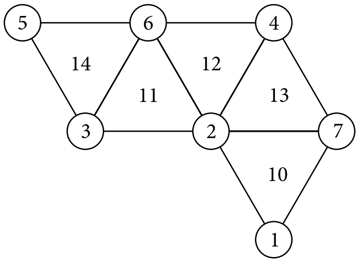
Uzimajući u obzir uvjet $a + b + c + d + e + f + g = 28$, te relacije (1) i (4), dobivamo da je

$$(a + b + d) + (c + e + f) + g = 14 + 13 + g = 28,$$

odakle dobivamo da je $g = 1$.

Nadalje, zbog (1) i (5) dobivamo da je $(a + b + d) + (e + f + g) + c = 14 + 10 +$ $+ c = 28$, pa je $c = 4$. Iz (2) slijedi da je $b + e = 11 - d$, a iz (3) da je $b + e = 12 - c$. Budući da je $c = 4$, zaključujemo da je $b + e = 8$, odnosno da je $11 - d = 8$, tj. da je $d = 3$.

Iz (4) slijedi da je $c + e + f = 13$, pa je $e + f = 9$. Iz činjenice da je $e + f = 9$ zaključujemo da brojevi e i f moraju biti različite parnosti. Budući da je $c = 4$, $d = 3$ i $g = 1$, zaključujemo da brojevi e i f moraju biti iz skupa {2, 5, 6, 7}, dakle mora biti $e = 2$ i $f = 7$. Odatle slijedi konačno rješenje (v. sliku 3.).



Slika 3.

Zadatak 2. U tablicu 4×4 upisani su brojevi od 1 do 16, kao na slici 4. Izaberemo li iz te tablice neki broj, npr. broj 6, i izbrišemo sve preostale brojeve iz toga retka i stupca, dobit ćemo sliku 5.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

Slika 4.

1		3	4
	6		
9		11	12
13		15	16

Slika 5.

Izaberemo li iz tablice na slici 5. neki broj, npr. broj 15, i izbrišemo sve preostale brojeve iz toga retka i stupca, dobit ćemo sliku 6.

1			4
	6		
9			12
		15	

Slika 6.

1			
	6		
			12
		15	

Slika 7.

Ponovljenim postupkom za npr. broj 12 na slici 6. dobivamo tablicu na slici 7. Zbrajanjem preostalih brojeva iz te tablice dobivamo

$$1 + 6 + 12 + 15 = 34.$$

Koliki ćemo zbroj dobiti birajući neke druge brojeve, npr. 4, 6 i 15? Pogledajmo na slikama od 8. do 11.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

Slika 8.

			4
5	6	7	
9	10	11	
13	14	15	

Slika 9.

			4
5			
	10	11	
	14	15	

Slika 10.

			4
5			
	10		
		15	

Slika 11.

U tablici su ostali brojevi 4, 5, 10 i 15, a njihov je zbroj jednak 34!

Dokažite da, bez obzira na izbor brojeva, ovakvim postupkom uvijek dobivamo zbroj 34.

Rješenje: Zbroj brojeva u prvom stupcu tablice jednak je $1 + 5 + 9 + 13 = 28$. Brojevi koji su napisani u prvome retku su redom za 0, 1, 2 i 3 veći od prvoga broja u tom retku, tj. od broja 1. U drugom su retku redom napisani brojevi 5, 6, 7 i 8 koji su redom za 0, 1, 2 i 3 veći od početnog broja u retku (broja 5), itd. Pribrojimo li zbroju $1 + 5 + 9 + 13$ zbroj $0 + 1 + 2 + 3$, dobit ćemo upravo broj 34.

Promotrimo li brojeve iz tablice na slici 7. (1, 6, 12 i 15), uočit ćemo da je $1 = 1 + 0$, $6 = 5 + 1$, $12 = 9 + 3$ i $15 = 13 + 2$, tj.

$$1 + 6 + 12 + 15 = (1 + 0) + (5 + 1) + (9 + 3) + (13 + 2) =$$

$$= (1 + 5 + 9 + 13) + (0 + 1 + 3 + 2) = 28 + 6 = 34$$

U drugom slučaju (tablica na slici 11.) je $4 = 1 + 3$, $5 = 5 + 0$, $10 = 9 + 1$ i $15 = 13 + 2$, pa je

$$4 + 5 + 10 + 15 = (1 + 3) + (5 + 0) + (9 + 1) + (13 + 2) =$$

$$= (1 + 5 + 9 + 13) + (3 + 0 + 1 + 2) = 28 + 6 = 34$$