

Vlasta Bahovec*
Tihana Škrinjarić**

UDK 336.761:303.722(497.5)
JEL Classification G11, C61
Pregledni članak

MOGUĆNOSTI OPTIMIZACIJE PORTFELJA NA ZAGREBAČKOJ BURZI UZ POMOĆ ODABRANIH METODA MULTIVARIJATNE ANALIZE

Moderna teorija portfelja i Markowitzev model uvelike su poznati u domaćoj i stranoj investicijskoj literaturi. S druge strane, metode multivarijatne analize manje se primjenjuju u području investiranja. Ovaj rad povezuje spomenute pojmove uspoređujući rezultate Markowitzeva modela i modela oblikovanih pomoću odabranih metoda multivarijatne analize. Nad uzorkom mjesečnih prinosa 26 dionica koje kotiraju na Zagrebačkoj burzi za razdoblje od ožujka 2009. do svibnja 2012. godine utvrđeno je da modeli oblikovani pomoću multivarijatnih metoda ostvaruju jednako dobre performanse u odnosu na inicijalni model. Uspoređeni su ne samo očekivani prinosi za istu razinu rizika, već i mjere diverzifikacije portfelja. Pokazano je kako su multivarijatne metode komplementarne optimizaciji Markowitzeva portfelja.

Ključne riječi: Markowitzev model, klaster analiza, faktorska analiza glavnih komponenti, Zagrebačka burza, optimizacija portfelja.

* V. Bahovec, prof. dr. sc., redovita profesorica u trajnom zvanju na Katedri za statistiku Ekonomskog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu. (E-mail: vbahovec@efzg.hr).

** T. Škrinjarić, mag. oec., vanjska suradnica na Katedri za matematiku Ekonomskog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu (E-mail: tihana.skrinjaric@gmail.com).

Rad je primljen u uredništvo 23. 8. 2012., a prihvaćen je za objavu 27. 12. 2012.

1. Uvod¹

Investitori već niz desetljeća pokušavaju pronaći odgovore na pitanja kako efikasno raspodijeliti svoja sredstva u različite mogućnosti ulaganja. Moderna teorija portfelja i njene sastavnice nastale u drugoj polovici prošloga stoljeća učinile su veliku prekretnicu u akademskom i investitorskom svijetu. Teorija je uvelike popularizirana u stranoj literaturi, ali i domaćoj. Ideja Markowitzeva modela jest pronaći onu kombinaciju vrijednosnica koje će za danu razinu rizika maksimizirati očekivani prinos portfelja. Na taj način pronalaze se svi oni portfelji koji se nalaze na efikasnoj granici. Posebice se naglašava pojam diverzifikacije portfelja, koja je ukazala na mogućnost smanjenja rizika cjelokupnog portfelja u odnosu na rizike pojedinačnih vrijednosnica od kojih je sastavljen.

S druge strane, metode multivarijatne analize često primjenjivane u području marketinga i psihologije, nešto se rjeđe koriste na području tržišta kapitala i investiranja. Radovi koji povezuju optimizaciju portfelja s metodama multivarijatne analize vrlo su rijetki. Prilikom istraživanja za potrebe ovoga rada pronađena je nekolicina radova koji polazeći od multivarijatnih metoda pokušavaju pokazati investitorima kako diverzificirati portfelje, a većina njih se odnosi na međunarodnu diverzifikaciju. Samo jedan od tih radova primjenjuje optimizaciju u okviru Markowitzeva modela, pri čemu autor analizira samo mali skup zemalja². Cilj ovoga rada jest istražiti mogućnost primjene metoda multivarijatne analize koje mogu pomoći prilikom optimizacije portfelja u okviru Markowitzeva modela. Ovaj rad u odnosu na prethodne proširuje takvu vrstu analize na način da se rezultati dobiveni multivarijatnim metodama ne komentiraju samo deskriptivno, već se koriste kao vodilja za oblikovanje optimalnog portfelja. Svrha rada je istražiti koliko te metode mogu pomoći prilikom optimizacije, na način da pomognu smanjiti inicijalni promatrani skup dionica i omogućće dolazak do jednako efikasnih rezultata. Nadalje, analiziraju se i mjere diverzifikacije portfelja, kako bi se kvantitativno moglo usporediti koliko su dobiveni rezultati uspješni.

Struktura rada je sljedeća. U drugom poglavlju dan je pregled prijašnjih (većinom inozemnih) radova koji se bave tematikom diverzifikacije portfelja koju povezuju s multivarijatnim metodama, pri čemu je prikazana i nekolicina domaćih radova koji koriste Markowitzev pristup optimizacije portfelja. Nakon toga, treće poglavlje prikazuje metodologiju i pristupe korištene u ovome radu. Četvrto poglavlje bavi se empirijskom analizom nad dionicama domaćeg tržišta i konačno, peto poglavlje zaključuje rad.

¹ Autorice se zahvaljuju djelatnicima Zagrebačke burze na ustupljenim podacima o mjesečnim cijenama dionica koje kotiraju na istoj.

² Radi se o članku Hui, T-K. (2005) *Portfolio diversification: a factor analysis approach*, Applied Financial Economics, 15, pp. 821-834, o čemu će više riječi biti u drugom poglavlju.

2. Prijašnja istraživanja

Prije same empirijske analize dionica koje kotiraju na Zagrebačkoj burzi, korisno je prikazati istraživanja i rezultate autora koji tematiku diverzifikacije portfelja povezuju s metodama multivarijatne analize, a koje mogu pomoći pri samom oblikovanju portfelja. Većina radova odnosi se na međunarodnu diverzifikaciju, pri čemu dobivene rezultate komentiraju deskriptivno, bez primjene optimizacije Markowitzeva modela. Također, svi radovi koji primjenjuju neku od multivarijatnih metoda su inozemni, dok se domaći radovi većinom bave samo optimizacijom Markowitzeva modela, bez prethodne analize pomoću multivarijatnih metoda. Stoga je jedna od motivacija ovoga rada i premostiti metodološki jaz između tih pristupa.

Interes za diverzifikacijom portfelja javlja se s počecima moderne teorije portfelja kada je H. Markowitz pokazao kako rizik pomno oblikovanog portfelja može biti reduciran u odnosu na pojedinačne rizike dionica koje ga čine. Ključ je upravo u međusobnoj povezanosti dionica, točnije u kovarijanci njihovih prinosa. S vremenom interes za Markowitzevim pristupom sve više raste, kao i broj provedenih istraživanja. Autori krajem 60-ih godina 20. stoljeća počinju razmatrati ne samo sektorsku diverzifikaciju, već i međunarodnu. Najraniji poznati radovi o međunarodnoj diverzifikaciji su Grubel (1968), Levy i Sarnat (1970.) te Lessard (1973.). Međutim, drugi autori su naglasili probleme vezane uz pristranost koja se javljala prilikom analize međunarodnih indeksa vrijednosnica. Neki od njih su Agmon (1972.) i Solnik (1973.), koji objašnjavaju kako korištenje indeksa koji predstavljaju tržište neke zemlje nije dobro rješenje, s obzirom da takvi indeksi ne uključuju u sebe sve mogućnosti diverzifikacije unutar samog domaćeg tržišta; nacionalni indeksi često nisu reprezentativni. Slaba korelacija između indeksa dviju država ne znači superiornost međunarodne diverzifikacije nad domaćom. Konačno, ti prvi radovi koristili su male uzorke podataka u odnosu na današnje obuhvate, stoga su rezultati bili kao što je spomenuto, pristrani. Pristup ovoga rada temelji se na obuhvatu dionica koje kotiraju na domaćoj burzi, pri čemu je dostupan mnogo veći broj podataka, stoga se ovakvi problemi na taj način izbjegavaju. Sljedeće dvije točke detaljnije razmatraju novije radove koji se bave ovakvom tematikom, dok se čitatelji zainteresirani za prikaz početaka tematike diverzifikacije portfelja, kao i za njegov povijesni pregled mogu uputiti na rad Shawkyja, Kuenzela i Mikhaila (1997).

2.1. Inozemni radovi

Od novijih inozemnih radova korisno je spomenuti rad Da Coste, Cunhe i Da Silve (2005.), koji koriste podatke o prinosu i riziku dionica, E/P omjeru, omjerima

knjigovodstvene vrijednosti i cijene, vrijednosti prodaje i broju dionica te prinosu dividendi za 476 poduzeća Sjeverne i Južne Amerike za dva razdoblja, od 1997. do kraja 1999. te od 2000. do kraja 2001. godine. Svrha njihova rada je klasterirati poduzeća i usporediti klaster u oba razdoblja da bi utvrdili mogućnosti investiranja. Koristeći se Wardovom metodom i Euklidskom udaljenošću, rezultati njihova istraživanja ukazali su na postojanje deset klastera od kojih su eliminirali njih šest s obzirom da su ostali klasteri ostvarivali veće prinose za istu razinu rizika, ili manji rizik za istu razinu prinosa. Za preostala četiri klastera sugeriraju investitorima da biraju poduzeća sukladno njihovim preferencijama glede rizika i prinosa.

Meric et al. (2009.) bave se tržištima u razvoju, s obzirom na njihovu međusobnu nisku korelaciju, kao i sa tržištima dionica razvijenih zemalja. Za razdoblje od 1995. do kraja 2007. godine analiziraju tjedne tržišne indekse dionica za 26 zemalja³. Prije same analize prikazuju deskriptivnu statistiku makroekonomskih performansi država od interesa, da bi ukazali na njihove međusobne razlike koje mogu dovesti do dobro diverzificiranog međunarodnog portfelja. Metodologija koju primjenjuju jest analiza glavnih komponenti nad prinosima tih tržišta, koja je rezultirala sa šest faktora. One države koje pripadaju istom faktoru ostvaruju slične performanse glede prinosa pa autori ne preporučuju ulagati u sve dionice istog faktora. Također, pokazuju primjere nekoliko država koje imaju relativno visoka faktorska opterećenja za više od jednog faktora. S obzirom da su prinosi tih država u korelaciji s prinosima zemalja iz više faktora, investitorima se ne preporučaju ulaganja u zemlje u kojima su međusobne korelacije tržišta relativno visoke. Kao i prethodno spomenuti autori, deskriptivno opisuju mogućnosti ulaganja za investitore.

Međunarodnom diverzifikacijom bave se i Harper i Jin (2012.). Interesira ih veza između Indije i njenih glavnih trgovinskih partnera (Kina, Njemačka, Hong Kong, Izrael, Malezija, Nizozemska, Singapur, Švicarska, Ujedinjeno Kraljevstvo te Sjedinjene Američke Države), kako bi utvrdili mogućnosti investiranja među tim zemljama. Primjenjuju analizu glavnih komponenti nad mjesečnim prinosima indeksa spomenutih zemalja od siječnja 2000. do prosinca 2010. godine. Rezultati analize su ih uputili na postojanje dva faktora, pri čemu su primijenili istu logiku kao i Meric et al. (2009.): indijski investitori morali bi ulagati u indekse onih država koje ne pripadaju faktoru u kojem se nalazi Indija (to su primjerice Njemačka, Nizozemska, UK, Švicarska i SAD).

Hui (2005) analizira američko, australsko i azijska tržišta kapitala također u svrhu međunarodne diverzifikacije portfelja, pri čemu primjenjuje metodu analize

³ Radi se o sljedećim državama: Argentina, Brazil, Čile, Kolumbija, Meksiko, Peru, Venezuela, Kina, Indija, Indonezija, Južna Koreja, Malezija, Pakistan, Filipini, Tajland, Tajvan, Češka, Mađarska, Poljska, Rusija, Turska, Egipat, Izrael, Jordan, Maroko i Južnoafrička republika, a kao razvijeno tržište koriste Sjedinjene Američke Države.

glavnih komponenti za jedanaestogodišnje razdoblje 1990. do 2001., uz dodatnu analizu nekoliko podrazdoblja. Ovaj rad, spomenut u uvodu, vrši optimizaciju Markowitzeva modela temeljem rezultata faktorske analize, pri čemu autor razmatra deset zemalja od kojih su četiri zemlje imale očekivane gubitke i prilikom optimizacije nisu bile uključene u optimalni portfelj. Komentirao je dobivene rezultate: „Japan i Tajvan su isključeni iz optimalnog portfelja zbog očekivanih gubitaka na tim tržištima uz veliki rizik“ (Hui 2005:832), pa „je isključivanje azijskih zemalja iz portfelja vjerojatno posljedica azijske krize koja je rezultirala negativnim prinosima na većini tih tržišta“ (Hui 2005:832). Uspoređuje rezultate dobivene optimizacijom Markowitzeva portfelja nad svim tržištima i modela koji je oblikovan sukladno rezultatima analize metodom glavnih komponenti, i zaključio kako nema razlike između dva portfelja (doduše, oba portfelja, s dodatnom analizom i bez nje sastoje se od istih dionica). Zaključio je da su metode multivarijantne analize primjenjive u svrhu poboljšanja optimizacije portfelja, kako bi smanjile inicijalni skup država koje se promatraju. Svrha rada Valadkhania, Chancharata i Harvia (2008.) je istražiti mogućnosti ulaganja u 13 zemalja, pri čemu primjenjuju faktorsku analizu i metodu najveće vjerodostojnosti nad mjesečnim prinosima za razdoblje od prosinca 1987. do travnja 2007. godine. Utvrdili su integriranost azijskih tržišta kao jedan faktor, a tržišta razvijenih zemalja kao drugi faktor i zaključili da geografski položaj i razina ekonomskog razvitka utječu na integriranost tržišta kapitala. Stoga preporučuju investitorima radi uspješne diverzifikacije portfelja da u njega uključe dionice i razvijenih i zemalja u razvitku.

Dobra rasprava o različitim metodološkim pristupima razvrstavanja dionica prikazana je u radu Nanda, Mahanty i Tiwari (2010), koji se bave klaster analizom, SOM (engl. *self organizing maps*) i *Fuzzy C-means* metodama. Klaster analizu proveli su *K-means* metodom nad uzorkom od 106 dionica sa indijskog tržišta kapitala za fiskalnu godinu 2007./2008. Koristeći se različitim pokazateljima (prinosi, P/E omjer, P/BV⁴ omjer, zarada po dionici, itd.), njihova analiza je sugerirala 5 do 6 klastera. Nasumično su odabrali uzorak dionica iz tih klastera i izvršili optimizaciju Markowitzeva modela kako bi pokazali da se mogu ostvariti zadovoljavajući rezultati primjenom različitih metoda grupiranja dionica.

Meric et al. (2011) analiziraju performanse prinosa indeksa fondova različitih država na američkom tržištu⁵, pri čemu se koriste Sharpeovom i Treynorovom mjerom te analizom glavnih komponenti. Razmatraju razdoblje od sredine svibnja 2008. do siječnja 2010. godine, pri čemu to razdoblje dijele na dva podrazdoblja: prvo opisuju kao medvjede tržište, a drugo kao bikovo. Željeli su ispitati mogućnosti investiranja u ta dva podrazdoblja, pri čemu su utvrdili da su svi razmatrani fondovi za vrijeme medvjedeg tržišta bili izuzetno povezani (analiza je ukazala na

⁴ Odnos cijene i knjigovodstvene vrijednosti.

⁵ Engl. Ishares country index funds.

samo jedan faktor), dok su za vrijeme bikova tržišta pronađena dva faktora što je otvorilo mogućnost diverzifikacije investiranja. Shaoqun i Ying (2004.) koriste hijerarhijsku i *K-means* klaster analizu kako bi utvrdili mogućnosti diverzifikacije rizika na kineskom tržištu, pri čemu su promatrali 35 kineskih gradova za razdoblje od prvog kvartala 2000. do četvrtog kvartala 2004. godine. Klaster analiza je rezultirala s ukupno četiri do pet klastera, pri čemu su promatrali nekoliko podrazdoblja kako bi analizirali stabilnost klastera tijekom vremena. Zaključili su da se struktura klastera tijekom vremena značajno promijenila, te sugeriraju kineskim investitorima kako razmatrati tržišne indekse gradova unutar klastera.

2.2. Domaći radovi

Radovi pisani u Hrvatskoj odnose se na popularizaciju Markowitzeva modela i ostalih sastavnica moderne teorije portfelja. Uz udžbenike koji studente upoznaju s temeljnim pojmovima⁶, radovi koji se teoretski i/ili empirijski bave ovom tematikom su sljedeći. Miljan (2002.a) je 2002. godine testirala efikasnost ulaganja u CROBEX, tako što je simulirala efikasnu granicu na Zagrebačkoj burzi, koristeći se Markowitzevim modelom. Iste godine (Miljan 2002.b) je koristila načela moderne teorije portfelja i optimizirala ovaj puta portfelj sastavljen od hrvatskih dionica i dionica EMU tržišta. Objasnjava da se mogućnosti diverzifikacije unutar Europe smanjuju zbog sve veće korelacije na tržištima dionica koje joj pripadaju, stoga bi europski investitori trebali tražiti mogućnosti ulaganja na tržištima čija kretanja još nisu toliko usklađena. Hrvatsko tržište se pokazalo privlačno takvim investitorima, ali vrijedi i obrat.

Živković (2005.) se u prvom dijelu svog rada bavi mogućnostima investiranja na tržištima kapitala u razvoju poput hrvatskog. Povezuje Markowitzev pristup optimizacije portfelja sa teorijom igara, s obzirom na mogućnosti velikih dobitaka, ali i gubitaka na tržištima poput hrvatskog. Osim optimalnih udjela u portfelju, dobivenih procesom optimizacije Markowitzeva modela, bavi se i optimalnim količinama trgovanja. Aljinović, Marasović i Tomić-Plazibat (2005.) u uvodnom se dijelu svog rada bave klasičnim Markowitzevim modelom – odabirom one kombinacije vrijednosnica koje će minimizirati varijancu portfelja za danu razinu očekivanog prinosa (ili maksimizirati očekivan prinos za danu razinu rizika). Nakon

⁶ Poput primjerice Aljinović, Z., Marasović, B., Šego, B. (2011.) *Financijsko modeliranje, drugo dopunjeno i izmijenjeno izdanje*, Ekonomski fakultet u Splitu, Split, kao i Orsag, S. (2011.) *Vrijednosni papiri*, Revicon d.o.o., Sarajevo.

toga obrađuju optimizaciju portfelja u okviru višekriterijskog programiranja, da bi pokazale mogućnosti uključivanja dodatnih tržišnih uvjeta koji se mogu razmatrati u okviru odabira sastavnica portfelja, čime ulaze u područje višekriterijskog programiranja.

Dobru razradu modela optimalnog portfelja daju Marasović i Šego (2006.). Objašnjavaju da je s obzirom na sama svojstva, Markowitzev model i danas vrlo popularan unatoč što je nastao prije šezdeset godina. I noviji modeli koji se izgrađuju zbog određenih specifičnosti nekih tržišta kapitala često se temelje na ovome inicijalnom modelu. Svrha njihova rada je čitatelje dobro upoznati s procesom optimizacije portfelja, s obzirom da više ne postoje nikakva ograničenja primjene ovakvog pristupa. Jakšić (2007) nakon uvodne teorijske razrade modela primjenjuje optimizaciju Markowitzeva modela na domaćem tržištu kapitala. Uzorak mjesečnih prinosa jedanaest dionica sa Zagrebačke burze za razdoblje od prosinca 1999. do srpnja 2005. godine rezultirao je s nekoliko portfelja. Promjenom razine očekivanog prinosa, modelirao je dvanaest portfelja i zaključio da će s razvojem hrvatskog tržišta kapitala ovakve analize postati relevantnije. Svrha rada Briš, Kristek i Mijoč (2008.) jest upoznati investitore s mogućnostima diverzifikacije kako bi se zaštitili od rizika. Nakon uvodnih napomena o definiciji rizika i njenim sastavnicama (sistematični i nesistematični rizik), autori upoznaju čitatelje s Markowitzevim modelom. Koriste se primjerom od tri dionice sa Zagrebačke burze i prikazuju cjelokupan postupak izračuna svih pojmova u okviru optimizacije portfelja.

Fabac i Munđar (2011.) bave se tehničkom analizom tržišta kapitala, na primjeru Zagrebačke burze, s obzirom da investitore zanimaju cijene i rizik u budućnosti, pri čemu im tehnička analiza pokušava pomoći. Koriste se i optimizacijom portfelja u okviru Markowitzeva pristupa kako bi ih rezultati uputili na specifičnosti dionica koje promatraju. Marasović, Poklepović i Aljinović (2011.) također povezuju tehničku analizu s optimizacijom portfelja. Žele pokazati kako su tehnička analiza i optimizacija portfelja u okviru moderne teorije portfelja komplementarne metode. Jerončić i Aljinović (2011.) analiziraju oblikovanje optimalnog portfelja uz sektorsku podjelu kompanija. Upotpunjuju standardni Markowitzev model prvotnom analizom financijskih izvještaja poduzeća od interesa te su prikazali mogućnosti ulaganja u dionice na Zagrebačkoj burzi za one investitore koji nisu skloni riziku, ali ipak žele ostvariti solidne prinose.

Iz ovog sažetog prikaza novijih inozemnih i domaćih radova očituje se već spomenuti jaz između primjena metoda multivarijatne analize s jedne strane i optimizacije Markowitzeva modela s druge. Stoga sljedeća poglavlja nastoje povezati ove pojmove.

3. Metodologija

3.1. Podaci korišteni u analizi

U ovome radu koriste se podaci o mjesečnim prinosima za 26 dionica koje kotiraju na Zagrebačkoj burzi, za razdoblje od ožujka 2009. do svibnja 2012. godine. To znači da se koristi 39 mjesečnih opservacija za pojedinačnu dionicu, što čini ukupno 1014 opservacija o prinosima. Kriteriji odabira dionica bili su sljedeći: najprije su od Zagrebačke burze preuzeti podaci o cijenama svih dionica koje su u razdoblju od ožujka 2009. do svibnja 2012. godine kotirale na Zagrebačkoj burzi. Nakon toga su filtrirane dionice kojima se u promatranom razdoblju trgovalo svaki mjesec, s obzirom da su potrebni podaci za cijelo razmatrano razdoblje da bi se mogla provesti optimizacija u okviru Markowitzeva modela. Konačno, prema odabiru autorica, izuzete su one dionice čiji je očekivani prinos za promatrano razdoblje bio negativan. Stoga su u analizi korištene sljedeće dionice, prikazane u Tablici 1.

Tablica 1.

DIONICE KORIŠTENE U ANALIZI

Kratica	Poduzeće
ADPL-R-A	AD Plastik d. d. za proizvodnju dijelova i pribora za motorna vozila i proizvoda iz plastičnih masa.
ADRS-R-A	Adris grupa, d. d. za upravljanje i ulaganje.
ATLN-R-A	Excelsa nekretnine, d. d. za poslovanje nekretninama.
BLSC-R-A	Belišće d.d.
BLJE-R-A	Belje d. d. za privređivanje u poljodjelstvu, prerađivačkoj industriji i prometu roba.
CKML-R-A	Čakovečki mlinovi, d. d. za proizvodnju i promet prehrambenih proizvoda.
DDJH-R-A	Đuro Đaković Holding, d.d.
ERNT-R-A	Ericsson Nikola Tesla, d. d. za proizvodnju telekomunikacijskih sustava i uređaja.
JNAF-R-A	Jadranski naftovod d.d.
KNZM-R-A	Konzum, trgovina na veliko i malo d.d.
KODT-R-A	Končar, distributivni i specijalni transformatori d.d.
KOEI-R-A	Končar, elektroindustrija d.d.

Nastavak tablice 1.

KORF-R-A	Valamar Adria Holding d. d. za upravljačke djelatnosti holding društava.
LEDO-R-A	Ledo d. d. za proizvodnju i promet sladoleda i smrznute hrane.
LKRI-R-A	Luka Rijeka d. d. za usluge u pomorskom prometu, lučke usluge, skladištenje roba i špediciju.
LRH-R-A	Liburnia Riviera Hoteli d. d.
PBZ-R-A	Privredna banka Zagreb, d. d.
PDBA-R-A	Podravska banka d. d.
PODR-R-A	Podravka prehrambena industrija d. d.
PTKM-R-A	Petrokemija d. d. tvornica gnojiva.
PUNT-R-A	Pounje trikotaža. d. d.
SLRS-R-A	Solaris, d. d. za hotelijerstvo, ugostiteljstvo i turizam.
SNHO-R-A	SN Holding d. d. za usluge
SUNH-R-A	Sunčani Hvar d. d. za hotelijerstvo, ugostiteljstvo i turizam.
VIRO-R-A	Viro tvornica šećera d. d. za proizvodnju i trgovinu.
ZVCV-R-A	Zvečevo prehrambena industrija d. d.

Izvor: Zagrebačka burza

Vidljivo je kako je sektorska podjela dionica relativno širokog raspona, od prehrambene industrije, preko turističkih i ugostiteljskih usluga do bankarske industrije, što povoljno doprinosi procesu sektorske diverzifikacije.

3.2. Markowitzev model

Harry Markowitz, kao otac moderne teorije portfelja, u okvir područja ekonomike izbora između ograničenih alternativa smjestio je izbor investitora između prinosa i rizika. U ovoj točki sažeto su prikazani ideja i rezultati njegova modela prema članku objavljenom 1952. godine (Markowitz, 1952). Pretpostavlja se da investitori raspoložu s podacima o cijenama i dionica, $P_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, I$, za posljednjih t razdoblja, $t = 1, 2, \dots, T$. Prinosi na svaku dionicu i u vremenskom razdoblju t izračunati su kao kontinuirani prinosi formulom (Aljinović, Marasović i Šego 2011.):

$$r_i(t) = \ln \left(\frac{P_i(t)}{P_i(t-1)} \right), \quad i = 1, \dots, I, \quad (1)$$

pri čemu $r_i(t)$ predstavlja prinos na dionicu i za razdoblje t , a \ln prirodni logaritam. Očekivan prinos dionice i , $E(r_i)$, računa se prema formuli

$$E(r_i) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T r_i(t), \quad i = 1, \dots, I. \quad (2)$$

Označi li se s w_i relativni udio dionice i u portfelju, očekivani prinos portfelja $E(r_p)$ računa se kao ponderirana aritmetička sredina prinosa I dionica,

$$E(r_p) = \sum_{i=1}^I w_i E(r_i). \quad (3)$$

Varijanca portfelja σ_p^2 dana je sljedećim izrazom

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^I w_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^I 2w_i w_j \text{cov}(r_i, r_j), \quad (4)$$

pri čemu σ_i^2 predstavlja varijancu pojedinačne dionice i , a $\text{cov}(r_i, r_j)$ kovarijancu prinosa između dviju dionica i i j ,

$$\sigma_i^2 = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T [r_i(t) - E(r_i)]^2, \quad i = 1, \dots, I, \quad (5)$$

$$\text{cov}(r_i, r_j) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T [r_i(t) - E(r_i)][r_j(t) - E(r_j)]. \quad (6)$$

Standardna devijacija portfelja je naprosto drugi pozitivni korijen varijance. Temeljem uvedenih oznaka moguće je zapisati sljedeći model optimizacije, kojim ćemo se koristiti u ovome radu:

$$\max_{w_i} E(r_p) = \sum_{i=1}^I w_i E(r_i)$$

uz ograničenja

$$\sigma_p = \sqrt{\sum_{i=1}^I w_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^I 2w_i w_j \text{cov}(r_i, r_j)} \leq c \quad (I)$$

$$\sum_{i=1}^I w_i = 1$$

$$w_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, I.$$

Dakle, maksimizirat će se očekivani prinos portfelja, pri čemu su varijable izbora udjeli dionica w_i . Ograničenja modela su sljedeća: standardna devijacija portfelja manja je ili jednaka proizvoljno izabranom konstanti c , nadalje, s obzirom da su w_i relativni udjeli dionica u portfelju, njihova suma mora biti jednaka jedan, što znači da samo te dionice čine portfelj. Konačno, u ovome radu se isključuje mogućnost kratke prodaje, stoga su udjeli dionica ograničeni na nenegativne vrijednosti. Promjenom razine rizika portfelja c , optimizacijom modela (I) dobivaju se portfelji koji pripadaju efikasnoj granici. U ovome radu će se najprije optimizirati model (I), čije će se performanse usporediti s modelima optimiziranim nakon primjene metoda multivarijatne analize.

Kako bi modeli bili usporedivi, za istu razinu rizika uspoređivat će se očekivani prinosi portfelja. Logično, portfelj s boljim performansama bit će onaj koji će za istu razinu rizika ostvarivati veću razinu očekivanog prinosa. Nadalje, dodatno će se analizirati dvije mjere uspješnosti diverzifikacije portfelja⁷, s obzirom na naglasak Markowitzeva pristupa na samu diverzifikaciju. Prva mjera jest normalizirana varijanca portfelja, NV , koja se računa kao omjer varijance portfelja σ_p^2 i prosjeka varijanci svih dionica portfelja, $\bar{\sigma}^2$,

$$NV = \frac{\sigma_p^2}{\bar{\sigma}^2}. \quad (7)$$

Što je NV manja, to je portfelj bolje diverzificiran, jer su odabrane dionice čija je međusobna kovarijanca manja. Druga mjera je suma kvadriranih udjela dionica koje čine portfelj, $SSPW$ (*sum of squared portfolio weights*),

$$SSPW = \sum_{i=1}^I \left(w_i - \frac{1}{N} \right)^2 \approx \sum_{i=1}^I w_i^2, \quad (8)$$

pri čemu je N broj dionica na tržištu. Ova mjera se računa kao suma kvadrata razlike udjela dionice i u portfelju koji se razmatra i udjela te dionice na cijelom tržištu. S obzirom da se na tržištu nalazi N dionica, udio i -te dionice na tržištu je $1/N$. Što je manja vrijednost ove mjere, to je portfelj bolje diverzificiran.

3.3. Faktorska analiza i klaster analiza

Faktorska analiza je metoda kojom se opažene (manifestne) varijable opisuju pomoću manjeg broja neopazivih varijabli (faktora ili latentnih varijabli). Ulazne

⁷ Podrobnije o ovim mjerama vidjeti Goetzmann i Kumar (2008).

se varijable nastoji svrstati u manji broj grupa, tako da su varijable unutar svake pojedine grupe visoko korelirane, i da su slabo korelirane s varijablama iz ostalih grupa. Svaku grupu varijabli reprezentira jedan faktor, koji je procjena latentne varijable na osnovi podataka iz uzorka.

Ortogonalni faktorski model s r zajedničkih faktora se u matričnoj notaciji može zapisati kao

$$Y - \mu = LX + \varepsilon, \quad (9)$$

pri čemu je

$Y = (Y_1, Y_2, \dots, Y_p)'$ $p \times 1$ matrica p ulaznih varijabli izmjenjenih na n opažanja,
 $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p)'$ $p \times 1$ vektor sredina, μ_i je sredina i -te ulazne varijable,
 $L = \{\ell_{ij}\}$, $i = 1, 2, \dots, p$, $j = 1, 2, \dots, r$ $p \times r$ matrica koeficijenata (matrica faktorskih opterećenja), pri čemu je ℓ_{ij} opterećenje i -te ulazne varijable na j -tom faktoru,
 $X = (X_1, X_2, \dots, X_r)'$ $r \times 1$ matrica zajedničkih faktora ($r < p$), te
 $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_p)'$ $p \times 1$ vektor specifičnih faktora (svojtvenih samo jednoj ulaznoj varijabli).

S obzirom da je u modelu obuhvaćeno $r+p$ neopservabilnih slučajnih varijabli, dodaju se ograničenja na zajedničke i specifične faktore kako bi se postigla određena kovarijančna struktura koja se može provjeriti. Pretpostavlja se da su zajednički faktori centrirani i međusobno ortogonalni (tj. nekorelirani), te da su nekorelirani sa specifičnim faktorima, koji su također međusobno nekorelirani. Navedene se pretpostavke mogu zapisati u obliku:

$$E(X) = 0, \text{Cov}(X) = E(XX') = I, E(\varepsilon) = 0,$$

$$U \equiv \text{Cov}(\varepsilon) = E(\varepsilon\varepsilon') = \begin{bmatrix} U_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & U_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & U_p \end{bmatrix}. \quad (10)$$

Polazeći od navedenih pretpostavki lako je pokazati da kovarijančna matrica ulaznih varijabli u ortogonalnom faktorskom modelu glasi:

$$\Sigma = \text{Cov}(Y) = LL' + U. \quad (11)$$

Iz (11) slijedi da se varijanca svake ulazne varijable može rastaviti u obliku

$$\sigma_i^2 = Var(Y_i) = \sum_{j=1}^r \ell_{ij}^2 + U_i \quad h_i^2 = \sum_{j=1}^r \ell_{ij}^2, \quad (12)$$

odnosno da se može podijeliti na zajedničku i specifičnu varijancu. Zajednička varijanca h_i^2 dio je ukupne varijance i -te varijable objašnjene zajedničkim faktorima i naziva se komunalitet. Polazeći od ortogonalnog modela zajedničkih faktora i navedenih ograničanja moguće je različitim postupcima procijeniti faktorska opterećenja. Faktorska analiza provodi se na kovarijančnoj matrici uzorka S izvornih varijabli, odnosno na korelacijskoj matrici uzorka R . Naime, ako se ulazne varijable standardiziraju, kovarijančna matrica prelazi u korelacijsku matricu (koja na glavnoj dijagonali sadrži jedinice).

Često korištena metoda procjene parametara je faktorska analiza glavnih komponentata. U tom pristupu početna je pretpostavka da je broj faktora jednak broju ulaznih varijabli ($r=p$), odnosno da su specifični faktori od malog značaja, i da ih se može zanemariti. Analiza se provodi tako da se kovarijančna (ili korelacijska) matrica dijagonalizira, procijene faktorska opterećenja, odabere broj faktora koje će se zadržati u modelu, i da se provede rotacija faktora s ciljem pojednostavnjenja njihove interpretacije. S obzirom da je kovarijančna matrica simetrična, može se primjenom spektralne dekompozicije izraziti pomoću p parova svojstvenih vrijednosti i svojstvenih vektora $(\lambda_1, e_1), (\lambda_2, e_2), \dots, (\lambda_p, e_p), \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_p$ u obliku:

$$\Sigma = \sum_{i=1}^p \lambda_i e_i e_i' = \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1} e_1 & \sqrt{\lambda_2} e_2 & \dots & \sqrt{\lambda_p} e_p \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1} e_1' \\ \vdots \\ \sqrt{\lambda_2} e_2' \\ \sqrt{\lambda_p} e_p' \end{bmatrix} = LL' \quad (13)$$

Relacija (13) proizlazi iz (11) uz pretpostavku da se utjecaj specifičnih faktora može zanemariti. Slično, iz (12) slijedi:

$$\sigma_i^2 - \underbrace{U_i}_{\approx 0} = \sum_{j=1}^m \ell_{ij}^2 \Rightarrow \sigma_i^2 = \sum_{j=1}^m \ell_{ij}^2. \quad (14)$$

Trag kovarijančne matrice ulaznih varijabli jednak je zbroju njenih dijagonalnih elemenata, odnosno zbroju varijanci ulaznih varijabli, $Tr(\Sigma) = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \dots + \sigma_p^2$. Stoga je doprinos ukupnoj varijanci manifestnih varijabli koji potječe od prvog faktora:

$$\sum_{i=1}^p \ell_{i1}^2 = \sqrt{\lambda_1} e' \sqrt{\lambda_1} e_1 = \lambda_1 \quad \text{jer je} \quad e'_1 \cdot e_1 = 1, \quad (15)$$

a proporcija ukupne varijance manifestnih varijabli protumačena prvim faktorom jednaka $\lambda_1/\text{tr}(\Sigma)$ ⁸. U sljedećem koraku, nakon što se na osnovi kovarijančne matrice uzorka S (odnosno korelacijske matrice uzorka R) procijene parovi svojstvenih vrijednosti i svojstvenih vektora $(\hat{\lambda}_1, \hat{e}_1), (\hat{\lambda}_2, \hat{e}_2), \dots, (\hat{\lambda}_p, \hat{e}_p)$, valja odabrati broj faktora koje će se zadržati u modelu. Uobičajeno se koristi grafički prikaz svojstvenih vrijednosti (Scree dijagram) koji na horizontalnoj osi sadrži redni broj svojstvene vrijednosti, a na osi ordinata aritmetičko mjerilo za svojstvene vrijednosti. Scree dijagram često sadrži prijelomnu točku („lakat“) iza koje svojstvene vrijednosti znatno padaju. U analizu se uključuju faktori sa svojstvenim vrijednostima ispred prijelomne točke. Drugi kriterij je Keiser-Gutmannov kriterij prema kojem treba ostaviti faktore čije su svojstvene vrijednosti veće od 1, jer ti faktori objašnjavaju veći dio varijance od bilo koje pojedine varijable uključene u analizu. Nakon odabira broja zajedničkih faktora provodi se rotacija faktora. Faktori se rotiraju da bi se postigla faktorska struktura jednostavnija za interpretaciju.

S druge strane, cilj klaster analize je pronalaženje optimalnog grupiranja multivarijatnih podataka kod kojeg su opažanja unutar svakog klastera slična, ali se različiti klasteri međusobno razlikuju. U radu je odabrana Wardova metoda, koja se ubraja u hijerarhijske metode klasteriranja. Tim je metodama svojstveno da se grupiranje započinje sa n klastera, jednim za svako opažanje, a završava s jednim klasterom koji sadrži svih n opažanja. U svakom se koraku opažanje, ili već postojeći klaster uključuje u drugi klaster. Pri tom se kao mjera sličnosti koristi udaljenost među opažanjima, koja se može definirati na različite načine, no najčešće korištena je euklidska udaljenost. Wardova metoda, poznata kao metoda minimalne varijance, upotrebljava kvadrirane udaljenosti unutar klastera i kvadrirane udaljenosti između klastera, a u svakom koraku bira se onaj klaster dobiven spajanjem dva klastera iz prethodnog koraka čija je suma kvadrata odstupanja unutar klastera minimalna u odnosu na sve particije dobivene spajanjem dvaju klastera iz prethodnog koraka.

Primjerice, ako je KL klaster dobiven spajanjem klastera K i L iz prethodnog koraka, tada je zbroj kvadrata udaljenosti unutar klastera K , L , odnosno KL dan izrazima

⁸ Napomena: provodi li se analiza nad korelacijskom matricom, proporcija ukupne varijance manifestnih varijabli protumačena prvim faktorom jednaka je omjeru prve svojstvene vrijednosti korelacijske matrice i traga korelacijske matrice tj. λ_1/p .

$$\begin{aligned}
 SS_K &= \sum_{i=1}^{n_K} (y_i - \bar{y}_K)(y_i - \bar{y}_K)' \\
 SS_L &= \sum_{i=1}^{n_L} (y_i - \bar{y}_L)(y_i - \bar{y}_L)' \\
 SS_{KL} &= \sum_{i=1}^{n_{KL}} (y_i - \bar{y}_{KL})(y_i - \bar{y}_{KL})',
 \end{aligned} \tag{16}$$

pri čemu su \bar{y}_K , \bar{y}_L , \bar{y}_{KL} oznake za centroide klastera K , L i KL . Klaster KL će biti odabran kao novi klaster u danom koraku ako je prirast sume kvadrata

$$I_{KL} = SS_{KL} - (SS_K + SS_L) \tag{17}$$

minimalan u odnosu na priraste svih mogućih klastera dobivenih udruživanjem dvaju klastera prethodne generacije. Rezultati hijerarhijskog klasteriranja grafički se predočuju dendogramom koji prikazuje sve korake hijerarhijskog postupka i udaljenosti kod kojih su klasteri spojeni. Zainteresirani čitatelji se mogu za detalje ovih analiza uputiti na knjigu Johnson i Wichern (2007).

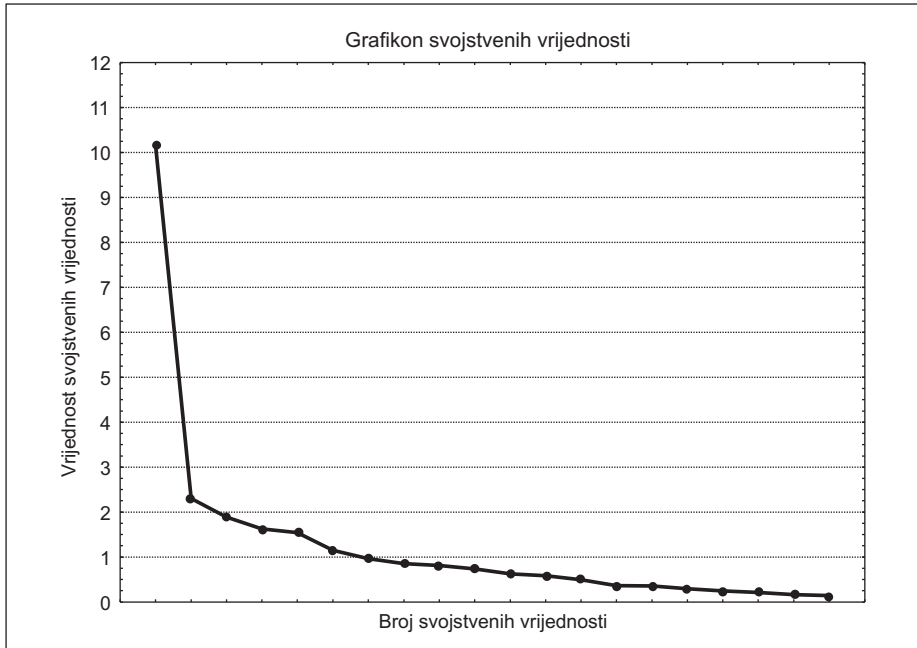
4. Rezultati empirijskog istraživanja

U ovom se poglavlju prikazuju rezultati dobiveni empirijskom analizom. Korištena je programska podrška Excel, kao i programi Statistica 10, SAS Enterprise Guide 4.3 te SAS Jump 10.0.0. Kao početni portfelj za usporedbu, optimiziran je Markowitzev model nad svih 26 već spomenutih dionica sa Zagrebačke burze, bez dodatnih analiza prije same optimizacije (u nastavku će biti naznačen kao Markowitz). Dakle, najprije se uzimaju u obzir sve dionice, pri čemu je razina rizika (konstanta c) mijenjana u rasponu od 7,5% do 11%. Nakon toga je u svrhu procjene drugog modela (u nastavku: Model 2) najprije provedena faktorska analiza glavnih komponenti nad standardiziranim prinosima dionica, pri čemu je za faktorska opterećenja uzeta granica od 0,45. U prijašnjim radovima koji koriste faktorsku analizu nad prinosima dionica koriste sljedeće granice: Meric et al. (2009.) 0,3, Harper i Jin (2012.) 0,5, Hui (2005.) od 0,5 i 0,6, Valadkhani, Chancharat, i Harvie, (2008.) 0,4, Meric et al. (2011.) koriste 0,5. Dionice s faktorskim opterećenjima većim od 0,45 na više od jednog faktora izuzete su iz analize dok u konačnici nije dobivena jednostavna faktorska struktura (radi se o dionicama PBZ-R-A, KNZM-R-A, KOEI-R-A, BLJE-R-A i ERNT-R-A). Rezultati su uputili na postojanje šest faktora, što je vidljivo iz Tablice 2 i Slike 1. U Tablici 2 su prikazane svojstvene vrijednosti veće od 1,

kao i objašnjeni postotak ukupne varijance i kumulativ. Vidljivo je kako šest faktora zajedno objašnjava preko 73% ukupne varijance, što je zadovoljavajuće.

Slika 1.

GRAFIČKI PRIKAZ SVOJSTVENIH VRIJEDNOSTI



Izvor: izračun autorica

Tablica 2.

REZULTATI FAKTORSKE ANALIZE GLAVNIH KOMPONENTI

Faktorska analiza glavnih komponenti			
	Svojstvene vrijednosti	% Ukupne varijance	Kumulativ - %
1	7,386898	35,17571	35,17571
2	2,190763	10,43220	45,60791
3	1,754355	8,35407	53,96198
4	1,582621	7,53629	61,49827
5	1,450876	6,90893	68,40721
6	1,017124	4,84345	73,25065

Izvor: izračun autorica

Rezultati provedene normalizirane Varimax rotacije nad faktorima određenim metodom glavnih komponenti dani su u Tablici 3, iz koje se može iščitati pripadnost prinosa pojedinih dionica nekome od šest faktora. Podebljano su označena faktorska opterećenja čiji je modul veći od 0,45.

Tablica 3.

FAKTORSKA OPTEREĆENJA ZA PROMATRANE PRINOSE

	Faktor - 1	Faktor - 2	Faktor - 3	Faktor - 4	Faktor - 5	Faktor - 6
ZVCV-R-A	0,243002	0,794705	0,200365	0,037860	0,237034	-0,143021
VIRO-R-A	0,120598	0,031540	-0,201671	-0,007179	0,108009	0,876628
PDBA-R-A	-0,118804	0,818027	0,080860	-0,121110	-0,054026	0,165586
PODR-R-A	0,769551	0,264555	0,096769	0,368080	0,052365	0,044304
PTKM-R-A	0,662374	0,361799	0,257065	0,210897	-0,014284	0,134295
PUNT-R-A	0,370763	0,156391	0,117654	0,121595	-0,716080	-0,167150
SLRS-R-A	0,213185	0,146881	0,163852	0,131080	0,845942	0,007112
SNHO-R-A	0,324577	0,023221	0,697748	-0,045041	0,229303	-0,204417
SUNH-R-A	0,150052	0,631631	-0,163945	0,194700	-0,115728	0,014328
LEDO-R-A	0,401411	0,253302	0,164093	0,667256	0,068744	0,237771
LKRI-R-A	0,630210	0,395978	0,220576	0,349709	0,130380	0,151130
LRH-R-A	-0,087662	0,000931	0,816034	0,035140	-0,030161	-0,092200
JNAF-R-A	0,275764	-0,073555	0,042851	0,909524	0,000035	-0,086725
KODT-R-A	0,205444	0,300413	0,448651	0,482769	-0,077830	0,143109
KORF-R-A	0,182990	0,469728	-0,347901	0,375754	0,283391	-0,268542
BLSC-R-A	0,776389	-0,179733	-0,045499	0,215425	0,025227	-0,013134
CKML-R-A	0,877951	-0,070108	-0,047563	-0,004287	-0,083407	-0,065963
DDJH-R-A	0,474825	0,445947	0,208330	0,286524	0,371411	-0,051349
ADPL-R-A	0,169328	0,039628	-0,108738	0,879205	0,049090	-0,068346
ADRS-R-A	0,755578	0,227564	-0,001600	0,373336	-0,216574	0,140976
ATLN-R-A	0,693099	0,147138	0,053555	0,133371	0,138169	0,026092

Izvor: izračun autorica

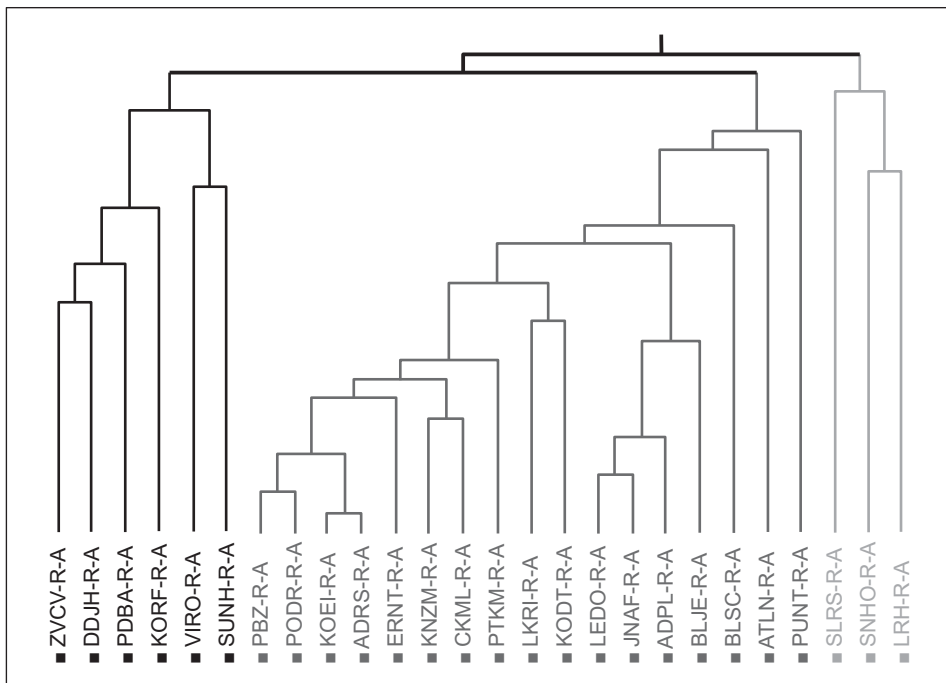
Komunaliteti za svaku od dionica predočeni su u tablici u prilogu 1 ovog rada, pri čemu je vidljivo da su protumačene proporcije varijance svake varijable (dionice) pomoću odabranih faktora zadovoljavajuće. Iz Tablice 3. vidljiva je sljedeća struktura faktora: prvi faktor ima visoka opterećenja za prinose dionica PODR-R-A, PTKM-R-A, LKRI-R-A, BLSC-R-A, CKML-R-A, DDJH-R-A i ATLN-

R-A. Faktor 2 ima visoka opterećenja za prinose dionica ZVCV-R-A, PDBA-R-A, SUNH-R-A te KORF-R-A, faktor 3 za prinose dionica SNHO-R-A i LRH-R-A, dok je faktor 4 povezan s prinosima: LEDO-R-A, JNAF-R-A, KODT-R-A, te ADPL-R-A. Konačno faktor 5 je povezan s prinosima PUNT-R-A i SLRS-R-A; te faktor 6 ima samo veliko opterećenje za prinos dionice VIRO-R-A. Za odabir samo jedne dionice iz svakog faktora korišten je kriterij najvećeg prinosa po jedinici rizika (omjer očekivanog prinosa i standardne devijacije pojedinačne dionice), što je rezultiralo sljedećim dionicama: PTKM-R-A, KORF-R-A, LRH-R-A, ADPL-R-A, PUNT-R-A te VIRO-R-A. Ponovno je optimiziran portfelj modelom (I), ovaj puta temeljem potonjih šest dionica.

Konačno, u svrhu trećeg modela, provedena je i klaster analiza nad prinosima svih dionica. Koristeći se Wardovom metodom i euklidskom udaljenošću prinosi su prema performansama u razmatranom razdoblju grupirani u tri klastera, što je prikazano na Slici 2.

Slika 2.

DENDOGRAM PRINOSA 26 DIONICA ZAGREBAČKE BURZE



Izvor: izračun autorica

Kako bi se optimizirao model temeljem prethodno učinjene klaster analize, najprije je ponovno korišten kriterij najvećeg prinosa po jedinici rizika i model koji je rezultirao s tri dionice je ostvarivao manje prinose uz istu razinu rizika u odnosu na prijašnja dva modela, pa je taj model izuzet iz daljnje analize⁹. Stoga se umjesto najvećeg prinosa po jedinici rizika povukla granica od minimalno 15% očekivanog prinosa na 1% rizika kao novi kriterij odabira dionica u portfelj, što je rezultiralo s ukupno šest dionica (ADPL-R-A, KOEI-R-A, PTKM-R-A, JNAF-R-A, KORF-R-A i LRH-R-A), kojima je optimiziran treći model (u nastavku: Model 3). Rezultati svih optimizacija dani su u Tablici 4, pri čemu se uspoređuju očekivani prinosi sva tri portfelja uz različite razine rizika. Vidljivo je da se rezultati dobiveni optimizacijom Markowitzeva modela ne razlikuju mnogo u odnosu na modificirane modele (model 2 i 3). Razlika se javlja jedino na najnižoj razini rizika, ali na ostalim razinama te razlike su neznatne (prikazane u posljednja dva stupca tablice 4). Stoga je prethodna analiza odabranim metodama multivarijatne analize zaista pomogla u efikasnom odabiru dionica u portfelj kao što je to učinila optimizacija inicijalnog modela. Potrebno je i uzeti u obzir da se radi o relativno malom broju dionica nad kojima se mogla vršiti analiza. Domaće tržište kapitala je još uvijek nelikvidno, stoga neredovito trgovanje dionicama otežava ovakvu vrstu analize.

Tablica 4.

REZULTATI OPTIMIZACIJE SVIH MODELA

Standardna devijacija (%)	Očekivan prinos (%)			Razlika (postotni poeni)	
	Markowitz	Model 2	Model 3	Model 2	Model 3
7,5	3,0102200	2,7988046	3,0090633	-0,2114154	-0,0011567
7,7	3,0397200	3,0397234	3,0397150	0,0000034	-0,0000005
8	3,0777331	3,0777337	3,0777326	0,0000006	-0,0000005
8,5	3,1304160	3,1304182	3,1304179	0,0000022	0,0000019
8,7	3,1492768	3,1492784	3,1492787	0,0000016	0,0000019
9	3,1759859	3,1759916	3,1759919	0,0000056	0,0000059
9,5	3,2079133	3,2079178	3,2079162	0,0000045	0,0000028
10	3,2225738	3,2225754	3,2225767	0,0000016	0,0000029
10,5	3,2337363	3,2337392	3,2337392	0,0000029	0,0000029
11	3,2433215	3,2433243	3,2433243	0,0000029	0,0000029

Izvor: izračun autorica

⁹ Rezultati ovog modela dostupni su od autorica na zahtjev.

Konačno, mogu se još promotriti mjere diverzifikacije za sva tri portfelja, prikazane u Tablici 3. Prema sumi kvadriranih udjela dionica, *SSPW*, svi portfelji su gotovo jednako dobro diverzificirani (podebljano su označeni oni koji su pri određenoj razini rizika najviše diverzificirani, međutim radi se o zaista malim razlikama). Promatranjem druge mjere, omjer varijanci *NV*, na svim razinama rizika je model 2 onaj koji dominira prema stupnju diverzifikacije naspram ostala dva modela, (uzrok su razlike u varijancama dionica uključenih u portfelje).

Tablica 5.

MJERE DIVERZIFIKACIJE ANALIZIRANIH PORTFELJA

Standardna devijacija (%)	SSPW			NV		
	Markowitz	Model 2	Model 3	Markowitz	Model 2	Model 3
7,5	0,328910786	0,329642087	0,330463731	0,11161	0,089866	0,248565
7,7	0,337871915	0,338599753	0,33820405	0,126988	0,102248	0,282811
8	0,353508301	0,354018327	0,354763765	0,117642	0,094723	0,261998
8,5	0,386582981	0,387316686	0,386589393	0,143357	0,115428	0,319267
8,7	0,401716633	0,401039136	0,401725688	0,150183	0,120924	0,334469
9	0,425965549	0,42659284	0,425900925	0,160719	0,129407	0,357933
9,5	0,387978967	0,388025302	0,387983916	0,179073	0,144185	0,398808
10	0,371240438	0,371037282	0,370963541	0,198418	0,159762	0,441893
10,5	0,381601683	0,381601569	0,381601393	0,218756	0,176138	0,487187
11	0,40636555	0,406366082	0,406366061	0,240086	0,193312	0,53469

Izvor: izračun autorica

Zaključno, rezultati analize uputili su na komplementarnost metoda multivarijatne analize koje mogu pomoći pri oblikovanju portfelja dobivenog optimizacijom Markowitzeva modela, pri čemu je korisno analizirati više razina rizika, kao i mjere diverzifikacije kako bi investitor odabrao portfelj koji najbolje odgovara njegovim preferencijama.

5. Zaključci

Efikasno oblikovanje portfelja na Zagrebačkoj burzi centralna je tema ovog rada. Koristi se popularni Markowitzev pristup uz dodatak analize odabranim metodama multivarijatne analize da bi se ustvrdilo jesu li spomenuti pristupi komplementarni. Od samih početaka moderne teorije portfelja, autori na različite načine pokušavaju sugerirati investitorima kako što bolje odabrati inicijalni skup dionica koje će pokušati efikasno diverzificirati u portfelju. Ovaj rad je pokušaj povezivanja rezultata faktorske analize glavnih komponenti i klaster analize sa standardnim pristupom optimizacije portfelja. S obzirom na zadovoljavajuće rezultate – portfelji optimizirani uz prethodnu primjenu faktorske analize glavnih komponenti i klaster analize mogu ostvarivati jednako dobre rezultate kao primjena Markowitzeva modela na inicijalnom većem skupu dionica. Pristup ovoga rada može se primijeniti i na međunarodnu diverzifikaciju portfelja, uz preduvjet da nacionalni indeksi zemalja koji se razmatraju budu reprezentativni. Nedostatak uočen u rezultatima jest relativno mali broj dionica nad kojima se mogla izvršiti analiza (zbog prirode Markowitzeva modela u kojemu je potrebno raspolagati s podacima o prinosima za svako razdoblje), pri čemu valja uzeti u obzir nelikvidnost domaćeg tržišta. Međutim, otvorene su mogućnosti za daljnja istraživanja, poput uzimanja u obzir i rizika pojedinačnih dionica kao kriterije grupiranja dionica, kao i analizu većeg broja razdoblja da bi se promotriло postojе li promjene u strukturi klastera ili faktora dionica od interesa.

LITERATURA

- Agmon, T. (1972) „The relations among equity markets: a study of share price co-movements in the United States, United Kingdom, Germany and Japan“, *Journal of Finance*, 27: 839-855.
- Aljinović, Z., Marasović, B. Tomić-Plazibat, N. (2005) „Multi-criterion approach versus Markowitz in selection of the optimal portfolio“, *Proceedings of the 8th International Symposium on OPERATIONAL RESEARCH*, Ljubljana: 261-266.
- Aljinović, Z., Marasović, B., Šego, B. (2011.) *Financijsko modeliranje, 2. izmijenjeno i dopunjeno izdanje*, Ekonomski fakultet Sveučilišta u Splitu.
- Briš, M., Kristek, I., Mijoč, I. (2008) „Selection of optimal portfolio by use of risk diversification method“, *Interdisciplinary management research IV*, Faculty of Economics in Osijek, Osijek: 329-343.

- Da Costa, Jr, N., Jefferson C., Da Silva, S. (2005) „Stock selection based on cluster analysis“, *Economics Bulletin*, Vol. 13, No1: 1–9.
- Fabac, R., Munđar, D. (2011) „Optimization of Portfolio of Stocks at ZSE through the Analysis of Historical Data“, *Computer Technology and Application*, Vol. 2., No. 12: 1007-1014.
- Grubel, H. G. (1968) „Internationally diversified portfolios: welfare gains and capital flows“, *American Economic Review* 58: 1299-1314.
- Harper, A., Jin, Z. (2012) „Comovements and Stock Market Integration Between India and its Top Trading Partners: a Multivariate Analysis of International Portfolio Diversification“, *International Journal of Business and Social Science*, Vol 3., No. 3: 50-56.
- Hui, T-K. (2005) „Portfolio diversification: a factor analysis approach“, *Applied Financial Economics*, 15, pp. 821-834.
- Jakšić, S. (2007.) „Primjena Markowitzeve teorije na tržište dionica Zagrebačke burze“, *Zbornik Ekonomskog fakulteta u Zagrebu*, Vol.5 No.1 Prosinac 2007: 331-344.
- Jerončić, M., Aljinović, Z. (2011.) „Formiranje optimalnog portfelja pomoću Markowitzevog modela uz sektorsku podjelu kompanija“, *Ekonomski pregled*, 62 (9-10): 583-606.
- Johnson, R. A., Wichern, D.W. (2007) *Applied Multivariate Statistical Analysis*, Upper Saddle River, NY: Pearson Prentice Hall.
- Lessard, D. R. (1973) „International portfolio diversification: a multivariate analysis for a group of Latin American countries“, *Journal of Finance*, Vol. 28, No. 3: 619-633.
- Levy, H., Sarnat, M. (1970) „International Diversification of Investment Portfolios“, *American Economic Review*, 60: 668-675.
- Marasović, B., Poklepović, T., Aljinović, Z. (2011) „Markowitz' Model with Fundamental and Technical Analysis - Complementary Methods or Not“, *Croatian Operational Research Review (CRORR)*, 2: 122-132.
- Marasović, B., Šego, B. (2006) „Markowitzev model optimizacije portfelja“, *Računovodstvo i financije*, LII (2006): 57-61.
- Markowitz, H. (1952) „Portfolio Selection“, *The Journal of Finance*, Vol. 7, No. 1: 77-91.
- Meric, I., Gishlick, H. E., Taga, L. S., Meric, G. (2011) „Risks, Returns, and Portfolio Diversification Benefits of Country Index Funds in Bear and Bull Markets“, *Business and Economics Research Journal*, Volume 2, Number 1: 1-14.
- Meric, I., Prober, L. M., Eichorn, B. H., Meric, G. (2009) „A Principal Components Analysis of the Portfolio Diversification Benefits of Investing in Emerging Stock Markets“, *Middle Eastern Finance and Economics*, Issue 4: 110-116.

- Miljan, I. (2002a) „Ocjena efikasnosti ulaganja u indeks Zagrebačke burze prema MPT modelu“, *Ekonomska istraživanja*, Vol. 15, No. 3: 33-41.
- Miljan, I. (2002b) „International portfolio management – The case of Croatian and EMU stock markets“, *International Conference on Globalization and Entrepreneurship: Fears, Challenges and Opportunities* / Krbec, Denisa (ur.). - Zagreb : FET , 2002.: 372-378.
- Nanda, S. R., Mahanty, B., Tiwari, M. K. (2010) „Clustering Indian stock market data for portfolio management“, *Expert Systems with Applications*, 37: 8793-8798.
- Orsag, S. (2011) *Vrijednosni papiri*, Revicon d.o.o., Sarajevo.
- Shaoqun, W., Ying, H. (2004) „Potential for Portfolio Diversification Across China's Real Estate Markets“, *Asian Real Estate Society Conference*, Delhi, India, August 9-12.
- Shawky, H. A., Kuenzel, R., Mikhail, A. D. (1997) „International portfolio diversification: a synthesis and an update“, *Journal of International Financial Markets, Institutions and Money*, 7: 303-327.
- Valadkhani, A., Chancharat, S., Harvie, C. (2008) „A factor analysis of international portfolio diversification“, *Studies in Economics and Finance*, Vol. 25, No. 3: 166-174.
- Zagrebačka burza, dostupno na www.zse.hr [15. lipnja 2012.].
- Živković, S. (2005) „Optimal Trading Quantity Integration as a Basis for Optimal Portfolio Management“, *Zbornik radova Ekonomskog fakulteta u Rijeci: časopis za ekonomsku teoriju i praksu*, Vol. 22, No. 2, lipanj 2005.: 117-137.

PRILOZI:*Tablica 1.***KOMUNALITETI ZA SVAKU OD RAZMATRANIH DIONICA U OKVIRU FAKTORSKE ANALIZE**

Dionica	Od 1. faktora	Od 2. faktora	Od 3. Faktora	Od 4. faktora	Od 5. faktora	Od 6. faktora	Višestruki R²
ZVCV-R-A	0,059050	0,690607	0,730753	0,732186	0,788371	0,808826	0,757710
VIRO-R-A	0,014544	0,015539	0,056210	0,056261	0,067927	0,836403	0,460957
PDBA-R-A	0,014114	0,683283	0,689821	0,704489	0,707408	0,734827	0,553137
PODR-R-A	0,592209	0,662198	0,671562	0,807045	0,809787	0,811750	0,817108
PTKM-R-A	0,438739	0,569638	0,635720	0,680198	0,680402	0,698437	0,803926
PUNT-R-A	0,137465	0,161923	0,175766	0,190551	0,703322	0,731261	0,574618
SLRS-R-A	0,045448	0,067022	0,093869	0,111051	0,826669	0,826720	0,691315
SNHO-R-A	0,105350	0,105889	0,592742	0,594771	0,647351	0,689137	0,589909
SUNH-R-A	0,022515	0,421473	0,448351	0,486260	0,499653	0,499858	0,436400
LEDO-R-A	0,161131	0,225293	0,252219	0,697450	0,702175	0,758711	0,823063
LKRI-R-A	0,397165	0,553964	0,602618	0,724915	0,741914	0,764754	0,783342
LRH-R-A	0,007685	0,007686	0,673597	0,674832	0,675741	0,684242	0,440780
JNAF-R-A	0,076046	0,081456	0,083293	0,910527	0,910527	0,918048	0,890910
KODT-R-A	0,042207	0,132455	0,333743	0,566809	0,572866	0,593346	0,522709
KORF-R-A	0,033485	0,254130	0,375165	0,516356	0,596666	0,668781	0,696163
BLSC-R-A	0,602780	0,635085	0,637155	0,683563	0,684199	0,684372	0,669705
CKML-R-A	0,770797	0,775712	0,777975	0,777993	0,784950	0,789301	0,768794
DDJH-R-A	0,225459	0,424327	0,467729	0,549825	0,687771	0,690408	0,721866
ADPL-R-A	0,028672	0,030242	0,042066	0,815068	0,817478	0,822149	0,782000
ADRS-R-A	0,570898	0,622683	0,622686	0,762065	0,808970	0,828844	0,881945
ATLN-R-A	0,480386	0,502036	0,504904	0,522692	0,541782	0,542463	0,625131

Izvor: izračun autorica

Tablica 2.

STRUKTURA PORTEFELJA DOBIVENOG OPTIMIZACIJOM POČETNOG MODELA (UDJELI U %)

Standardna devijacija (%)	VIRO-R-A	PTKM-R-A	SNHO-R-A	LRH-R-A	KORF-R-A	CKML-R-A	ADPL-R-A
7,5	0,565707	23,049176	0	22,023867	7,244479	0	47,116771
7,7	0,021003	24,859809	0,000044	19,361977	7,489869	0,00008	48,267218
8	0	27,561404	0	14,581847	7,843782	0	50,012967
8,5	0	31,380661	0,000044	7,894277	8,283007	0,00008	52,441930
8,7	0	32,563573	0,000044	5,492658	8,520730	0,00008	53,422915
9	0	34,563753	0,000044	2,101446	8,700562	0,00008	54,634116
9,5	0	41,523415	0,000044	0	14,307601	0,00008	44,168861
10	0	47,041950	0,000044	0	19,508012	0,00008	33,449915
1,5	0	51,241111	0,000044	0	23,469227	0,00008	25,289539
11	0	54,834093	0,000044	0	26,878458	0,00008	18,287326

Izvor: izračun autorica

Tablica 3.

STRUKTURA PORTFELJA DOBIVENOG OPTIMIZACIJOM MODELA 2
(UDJELI U %)

Standardna devijacija (%)	VIRO-R-A	PTKM-R-A	LRH-R-A	KORF-R-A	ADPL-R-A
7,5	0,566430	22,941122	22,003708	7,230245	47,258495
7,7	0	27,478699	14,568543	7,838725	50,114033
8	0,025351	24,719282	19,334075	7,496628	48,424664
8,5	0	31,171022	7,873271	8,322191	52,633516
8,7	0	32,616269	5,508667	8,554914	53,320150
9	0	34,475805	2,085578	8,689235	54,749382
9,5	0	41,539723	0	14,298587	44,161690
10	0	46,995184	0	19,535693	33,469124
1,5	0	51,240974	0	23,469298	25,289728
11	0	54,834111	0	26,878425	18,287464

Izvor: izračun autorica

Tablica 4.

STRUKTURA PORTFELJA DOBIVENOG OPTIMIZACIJOM MODELA 2
(UDJELI U %)

Standardna devijacija (%)	VIRO-R-A	LRH-R-A	ADPL-R-A
7,5	2,2354632	33,0216471	0,647429
8	1,5209699	29,901675	0,685774
7,7	0,6640571	26,0999092	0,73236
8,5	0	19,9258679	0,800741
8,7	0	17,3537629	0,826462
9	0	13,8047681	0,861952
9,5	0	8,4512866	91,5487134
10	0	3,5625847	96,4374
1,5	0	0	1
11	0	0	1

Izvor: izračun autorica

Tablica 5.

STRUKTURA PORTFELJA DOBIVENOG OPTIMIZACIJOM MODELA 3
 (UDJELI U %)

Standardna devijacija (%)	PTKM-R-A	ADPL-R-A	KORF-R-A	LRH-R-A
7,5	22,5796043	46,9073548	7,2260781	23,2869627
8	24,7794796	48,3281072	7,4959546	19,3964585
7,7	27,4350843	50,2251257	7,7892559	14,5505341
8,5	31,378394	52,4438188	8,2835668	7,8942204
8,7	32,5649203	53,4231777	8,5192631	5,4926389
9	34,5358833	54,6427544	8,7197951	2,1015672
9,5	41,5245933	44,1685558	14,3068508	0
10	46,9788926	33,4747531	19,5463543	0
1,5	51,2409418	25,2897325	23,4693257	0
11	54,834108	18,2874653	26,8784267	0

Izvor: izračun autorica

PORTFOLIO OPTIMIZATION ON ZAGREB STOCK EXCHANGE BY USING
 CHOSEN METHODS OF MULTIVARIATE ANALYSIS

Summary

The Modern Portfolio theory and Markowitz's model are well known in foreign and domestic works. On the other hand, in the field of investment, different methods of multivariate analysis are still rarely applied. This paper combines the before mentioned concepts by comparing the performances of Markowitz's model with models based on chosen methods of multivariate analysis. We have analyzed a sample of 26 monthly stock returns on Zagreb Stock Exchange for the period from March 2009 to May 2012. The results indicate that models designed by using multivariate methods achieve the same performances in comparison to the initial model. Not only the expected returns for the same risk level were compared, but also the measures of portfolio diversification were made. It has shown that multivariate methods are complementary to the optimization of Markowitz's model.

Key words: Markowitz model, cluster analysis, factor analysis, Zagreb Stock Exchange, portfolio optimization.