1947. godine je vlada Poljske donijela odluku da se svi geodetski radovi u kojima se rješavaju normalne jednadžbe imaju raditi primjenom metode Krakovijana, koja je u svojoj biti metoda iz naslova ovog članka, a koju ću ukratko izložiti.

METODA BANACHIEWICZA

piše: ***mr.sc.Damjan Jovičić***

U našoj geodetskoj praksi se još i danas može desiti da se normalne jednadžbe rješavaju primjenom formulara 33. Piscu ovih redaka nije poznato da li je donešena odluka o zabrani primjene toga ili nekog drugog sličnog mu formulara. No, možda takva odluka i nije potrebna, ukoliko se problemi rješavaju (a bez toga ne ide) primjenom računala.

Pitanje je rješavanja sustava linearnih jednadžbi AX =b. Odmah treba reći da ima velik broj metoda kojima se rješava to pitanje. Ovdje pominjem samo dvije, koje geodeti često koriste, a radi se samo o modifikacijama jedne te iste metode.

Metoda Banachiewicza osniva se na rastavu matrice sustava A u produkt donje B i gornje C trokutaste matrice. Ako je pritom gornja snabdjevena jedinicama na dijagonali, onda je to GAUSSOVA eliminacija. Ako su pak matrice B i C međusobno transponirane, onda je u pitanju metoda CHOLESKOG.

1. Metoda Banachiewicza

Suština metode je dekompozicija matrice sustava u produkt dviju matrica na koje se stavljaju određeni uvjeti. Dakle, radi se o zamjeni polaznog sustava $AX = b$ sustavom $BCX = b$, gdje su B i C trokutaste matrice, kao što je gore rečeno.

Na taj način polazni sustav postaje ekvivalentan dvama trokutastim sustavima od kojih se svaki, kao trokutasti, lako rješava. Imamo, naime zapis sustava u obliku dvaju sustava

$$\begin{cases} BY = b \\ CX = Y \end{cases}$$

Obadva su trokutasta, prvi s donjom, a drugi s gornjom trokutastom matricom. Iz prvog odredimo Y, pa ga uvrstimo u drugi i izračunamo X.

Važno je reći da se može uštedjeti u zapisu rastava tako da se u njemu ne pišu oni elementi koji su jednaki nuli odnosno jedinici..Desna strana donje tablice je kondenzirani zapis na taj način dobiven u slučaju sustava 4x4.

$$\begin{bmatrix} b_{11} & 0 & 0 & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 0 & 0 \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & 0 \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ 0 & 1 & c_{23} & c_{24} \\ 0 & 0 & 1 & c_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & c_{12} & c_{13} & c \\ b_{21} & b_{22} & c_{23} & c_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & c_{34} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} \end{bmatrix}$$

Sasvim je slična situacija u općem slučaju. Zapišemo li polaznu matricu A. i dobivenu kondenziranu jednu ispod druge bit će

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} b_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ b_{21} & b_{22} & c_{23} & c_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & c_{34} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} \end{bmatrix}$$

Napomenimo ovdje da je rastav A=BC moguć uz uvjet da je matrica A regularna.

Kako treba postupati u slučaju singularnosti matrice A ovdje ne promatramo.

Pretpostavljamo, dakle, da je matrica A regularna.

Potrebno je samo odrediti elemente matrica B i C. To ide po formulama :

$$b_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} b_{ik} c_{kj} \,, 1 \le j \le i \le n \qquad 1)$$

odnosno

$$c_{ij} = \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} b_{ik} c_{kj} \right) : b_{ii} \,, 1 \le i < j \le n \qquad 2)$$

Iz formula (2) se vidi da mora biti ispunjen uvjet $b_{ii} \neq 0$, koji je (sa svoje strane) ekvivalentan regularnosti odgovarajućeg glavnog minora. Kako to mora biti ispunjeno za svaki i, to je u drugu ruku ekvivalentno s regularnosti matrice sustava.

Formule 1) & 2) slijede iz rastava A=BC u kojem su B donja trokutasta matrica, a C gornja trokutasta matrica s jedinicama na dijagonali. Shema se može prikazati pregledno u tablici. Gornji dio tablice je proširena matrica sustava, a u donjem su matrice B i C zapisane u kondenziranoj formi (bez nula i jedininica).Konačno, posljednji redak je matrica rješenja. Za iskusne programere vidljivo je da se sve računanje može izvesti u polju dimenzija 4x5, jer se elemente matrica B i C može pisati na mjesta elemenata matrice sustava, a matricu rješenja na mjesto matrice slobodnog stupca. U slučaju da su polazni sustav, pa onda i njegova matrica simetrični (normalne jednadžbe) moguća je ušteda i dijela ispod glavne dijagonale.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & b_3 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & b_4 \end{array}\right] \qquad 3)$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} b_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_1 \\ b_{21} & b_{22} & c_{23} & c_{24} & c_2 \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & c_{34} & c_3 \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} & c_4 \end{array}\right]$$

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{bmatrix}$$

tablica 1

Elementi stupca $\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix}$ računaju se na isti način kao i elementi matrice C, tj. po formulama 2).

Konačno, što je isto tako važno, računanje nepoznanica ide po formulama:

$$x_i = c_i - \sum_{k=i+1}^{n} c_{ik} \cdot x_k \qquad 4)$$

2. Inverz regularne matrice metodom Banachiewicza

Ako nadalje, mjesto stupca

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix} \quad \textit{stavimo matricu} \quad \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} & e_{14} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} & e_{24} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} & e_{34} \\ e_{41} & e_{42} & e_{43} & e_{44} \end{bmatrix}$$

kojoj su stupci, stupci jedinične matrice, onda shemom 3) računamo inverz matrice A. Radi se, naime, o računanju 4 sustava s istom matricom sustava, pa umjesto da rješavamo 4 sustava, rješavamo jedan jedini sustav.

Prema formulama kojima izračunavamo tražene elemente vidi se da nikakvu novost nemamo, već kao i prije rješavamo ali sada simultano sustav u kojem je desna strana malo izmijenjena. Kako to izgleda vidimo na sljedećoj shemi :

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & e_{11} & e_{12} & e_{13} & e_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & e_{21} & e_{22} & e_{23} & e_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & e_{31} & e_{32} & e_{33} & e_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & e_{41} & e_{42} & e_{43} & e_{44} \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} b_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & f_{11} & f_{12} & f_{13} & f_{14} \\ b_{21} & b_{22} & c_{23} & c_{24} & f_{21} & f_{22} & f_{23} & f_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & c_{34} & f_{31} & f_{32} & f_{33} & f_{34} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} & f_{41} & f_{42} & f_{43} & f_{44} \end{array}\right]$$

$$\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & x_{44} \end{bmatrix} = A^{-1}$$

tablica 2

Valja ovdje primjetiti da je ovaj zapis (u njemu smo rješenja pojedinih sustava pisali u stupac) pogodan za provjeru rješenja. Tako npr. treba biti :

$$\begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{13} \\ x_{23} \\ x_{33} \\ x_{43} \end{bmatrix} = e_{23} = 0 \quad \& \quad \begin{bmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{13} \\ x_{23} \\ x_{33} \\ x_{43} \end{bmatrix} = e_{33} = 1$$

Na kraju čitatelju preporučam da sastavi program za računalo kojim rješava ovaj ili općenitiji sustav od nxn jednadžbi gore opisanom metodom, te da se iskuša u pokušaju da odredi odgovarajuće formule za elemente matrica B i C u slučaju metode Choleskog.

3. Primjena Banachiewiczeve metode

U ovoj točki navodim numerički primjer kao ilustraciju metode. Također će biti govora o primjeni na rješavanje normalnih jednadnažbi, koje se javljaju u rješavanju raznih problema kao što su npr. aproksimacija polinomima ili metoda kolokacije.

Primjer 1:

$$\text{Riješi sustav} \quad \left\{ \begin{array}{rrrrcl} x & +2y & +3z & +4t & = & 4 \\ -x & +2y & -3z & +4t & = & 3 \\ & y & -z & +t & = & 2 \\ x & +y & +z & +t & = & 1 \end{array} \right.$$

Primjenimo li gore opisanu shemu možemo pisati tablicu 1 za naš slučaj

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 4 \\ -1 & 2 & -3 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 4 \\ -1 & 4 & 0 & 2 & 1.75 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -0.25 \\ 1 & -1 & -2 & 1 & -1.75 \end{array}\right]$$

$$\begin{bmatrix} -4 & 5.25 & 1.5 & -1.75 \end{bmatrix}$$

Dakle, rješenje sustava je transponirana matrica posljednjeg redka u gornjoj tablici tj :

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 5.25 \\ 1.5 \\ -1.75 \end{bmatrix}$$

Primjer 2:

Odredi inverznu matricu matrice iz primjera 1.

Potrebno je popuniti tablicu broj 2 odgovarajućim elementima koji se računaju prema priloženim formulama. Ako to učinimo tablica 2 će biti :

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -3 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & 2 & 0.25 & 0.25 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0.25 & 0.25 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 1 & -0.25 & 0.75 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & -3 & 3 \\ 0.75 & -1.25 & 4 & -2 \\ 0.5 & -0.5 & 1 & -1 \\ -0.25 & 0.75 & -2 & 1 \end{bmatrix} = A^{-1}$$

Treba dodati da smo ovdje odmah izvršili transponiranje rezultatske matrice,ako bismo je uporedili s tablicom 1, gdje je vektor rješenja zapisivan kao vektor redak.

Primjer 3.

a) Odredi aproksimacioni polinom prvog stupnja

b) Odredi aproksimacioni polinom drugog stupnja

c) Odredi kolokacioni polinom za podatke iz tablice

xk	-1	0	1	2
yk	1	1	1	-5

Rješenje a)

Traženi polinom je oblika

$$y = bx + a$$

Nije teško provjeriti da se metodom najmanjih kvadrata

dobiju normalne jednadžbe $\begin{cases} 6b & +2a & = & -10 \\ 2b & 4a & = & -2 \end{cases}$

Prepuštam čitatelju da provjeri matricu rješenja.

$X = \begin{bmatrix} b \\ a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.8 \\ 0.4 \end{bmatrix}$. Konačno rješenje: Traženi je polinom

$$y = -1.8x + 0.4$$

Rješenje b)

Neka je traženi polinom oblika $y = cx^2 + bx + a$. Zahtijev da suma kvadrata odstupanja bude minimum, svodi se na to da koeficijenti polinoma a,b,c moraju zadovoljavati sustav normalnih jednadžbi .Čitatelju za vježbu preporučam da sastavi normalne jednadžbe. Imali bismo za riješiti sustav:

$$\begin{cases} 18c & +8b & +6a & = & -18 \\ 8c & +6b & +2a & = & -10 \\ 6c & +2b & +4a & = & -2 \end{cases}$$

Prepuštam čitatelju da provjeri rješenje

$X = \begin{bmatrix} c \\ b \\ a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.5 \\ -0.3 \\ 1.9 \end{bmatrix}$. Konačno rješenje: Traženi je polinom :

$$y = -1.5x^2 - 0.3x + 1.9$$

Rješenje c)

U slučaju da tražimo kolokacioni polinom , on je u našem primjeru trećeg stupnja ,dakle oblika

$y = dx^3 + cx^2 + bx + a$.Odgovarajući sustav normalnih jednadžbi je:

$$\begin{cases} 66d & +32c & +18b & +8a & = & -40 \\ 32d & +18c & +8b & +6a & = & -18 \\ 18d & +8c & +6b & +2a & = & -10 \\ 8d & +6c & +2b & +4a & = & -2 \end{cases}$$

Kao i u primjeru b) prepuštam čitatelju da provjeri

matricu rješenja : $X = \begin{bmatrix} d \\ c \\ b \\ a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Konačno rješenje:

Traženi je polinom

$$y = -x^3 + x + 1$$

Na donjoj slici su prikazana sva tri polinoma ■