Da bih studentima olakšao pripremanje za ispit sastavio sam zbirku zadatka, vodeći pritom računa da izlaganje bude po mogućnosti matematički korektno te da se ne zadaju zadaci teorijskog tipa koji su obično i znatno teži.

ZBIRKA RIJEŠENIH ZADATAKA IZ VEKTORSKE ANALIZE

piše: ***dr. sc. Miljenko Lapaine***

Na Geodetskom su se fakultetu vježbe iz Matematike III godinama održavale četiri sata tjedno, dok je po novom nastavnom planu na vježbe otpalo svega tri sata tjedno. Program se, međutim, nije smanjio. Da bih studentima olakšao pripremanje za ispit sastavio sam zbirku zadatka, vodeći pritom računa da izlaganje bude po mogućnosti matematički korektno te da se ne zadaju zadaci teorijskog tipa koji su obično i znatno teži.

S druge strane, nastojao sam da u zbirku ne uđu samo zadaci koji su tu isključivo radi matematike. Naime, geodezija je vrlo bliska matematici i velika je šteta što naši studenti to ne mogu doživjeti. Stoga sam sastavio ili odabrao i takve zadatke koji imaju i svoju interpretaciju u geodeziji ili kartografiji. Tako primjerice ima veći broj zadataka koji se bave elipsom, kao jednom od najčešće primjenjivanih krivulja u geodeziji. Tu su zatim lančanica, astroida, kardioida, krivulja pogrešaka, ortodroma, loksodroma, dakle takve krivulje koje imaju svoje mjesto i susreću se u drugim geodetskim kolegijima.

Kao primjere vektorskih polja, osim sasvim apstraktnih, izabrao sam elekstrostatsko, magnetsko oko ravnog vodiča, polje centrifugalne sile i polje gravitacijske sile. Imajući u vidu druge kolegije, među kojima prvenstveno fiziku, gravimetriju i fizikalnu geodeziju obradio sam u nizu zadataka potencijale spomenutih vektorskih polja, njihove ekvipotencijalne ili nivo-plohe te problem rada, posebno u konzervativnom ili potencijalnom polju. U zadacima o krivolinijskim integralima pokazana je njihova primjena na računanje duljine luka lančanice, astroide, kardioide, krivulje pogrešaka, ortodrome, loksodrome, pa čak i elipse, bez obzira na to što se taj problem svodi na rješavanje eliptičkih integrala i obično se izbjegava, ali je bitan u drugim geodetskim kolegijima. Isto tako, u zadacima o plošnim integralima pokazana je njihova moguća primjena na računanje površine dijela sfere i rotacijskog elipsoida.

Zbirka obuhvaća sljedeća poglavlja:

Predgovor

1. Vektorske funkcije. Krivulje.
   Derivacija vektorske funkcije.Tangenta, brzina, akceleracija.
2. Skalarna i vektorska polja.
   Nivo-krivulje i nivo-plohe. Vektorske linije. Gradijent skalarnog polja. Krivulje najvećeg priklona. Divergencija i rotacija vektorskog polja. Potencijal vektorskog polja.
3. Krivolinijski integrali.
   Krivolinijski integrali prve i druge vrste. Greenov teorem. Integral u potencijalnom polju. Primjena krivolinijskih integrala.
4. Plošni integrali.
   Plošni integrali prve i druge vrste. Tok vektorskog polja. Teorem o divergenciji. Stokesov teorem. Površina plohe. Primjena plošnih integrala.
5. Zadaci s pismenih ispita na Geodetskom fakultetu
   Rješenja
6. Pregled definicija i formula
7. Literatura

U pripremi zbirke tekst je obrađen i crteži su izrađeni pomoću računala. Sve zadatke, na stotine matematičkih formula, obradila je Ivka Tunjić, koja je u taj posao uložila mnogo truda i strpljenja. Veliku većinu slika također je ona izradila, a pri onima nastalim uz pomoć programa MATHEMATICA pomogao je mr. sc. D. Jovičić.

Vektorski račun je naziv za dio matematike u kojem se proučavaju svojstva operacija s vektorima. Vektorski se račun dijeli na vektorsku algebru i vektorsku analizu. U vektorskoj algebri proučavaju se linearne operacije (zbrajanje vektora i množenje brojem) te različita množenja vektora (skalarno, vektorsko, mješovito).Vektorska analiza dio je vektorskog računa u kojem se proučavaju skalarna i vektorska polja. U njoj se proučavaju vektori kao funkcije jednog ili više skalarnih argumenata.

Jedna od važnijih primjena vektorskog računa je u diferencijalnoj geometriji. To je dio geometrije koji se bavi proučavanjem krivulja i ploha, a na Geodetskom fakultetu predaje se u posebnom kolegiju - Matematici IV.

Teorijski dio Vektorske analize studenti geodezije slušaju u okviru predmeta Matematika III. Po mojoj je procjeni, za studente tehničkih fakulteta teorijski dio najprihvatljivije objašnjen u skriptama V. Devidéa: *Vektorski račun*.

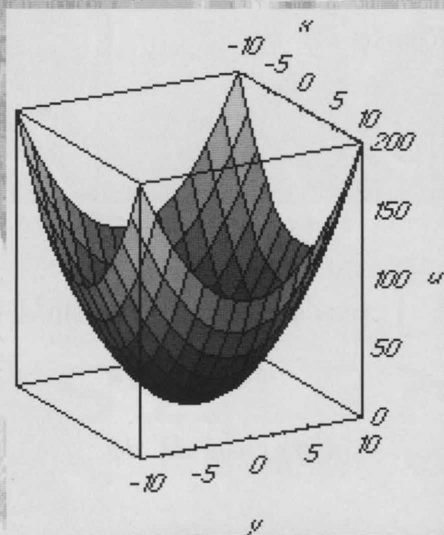
Slijede dva zadatka iz zbirke. Prvi je u istom obliku u kakvom se pojavljuje u samoj zbirci, a drugi je s pismenog ispita i u zbirci je samo zadatak s rezultatom. Na prijedlog urednika ovog časopisa, taj će zadatak biti ovdje u potpunosti riješen

Zadatak Odrediti krivulje najvećeg priklona na

plohi $u=\dfrac{\omega^2}{2}(x^2+y^2)$.

Rješenje:

$$\operatorname{grad} u \parallel d\vec{r}$$



$$\frac{dx}{\dfrac{\partial u}{\partial x}}=\frac{dy}{\dfrac{\partial u}{\partial y}} \quad\Leftrightarrow\quad \frac{\partial u}{\partial y}dx=\frac{\partial u}{\partial x}dy$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=x\omega^2 \qquad \frac{\partial u}{\partial y}=y\omega^2$$

$$y\omega^2 dx=x\omega^2 dy$$

$$\frac{dy}{y}=\frac{dx}{x}$$

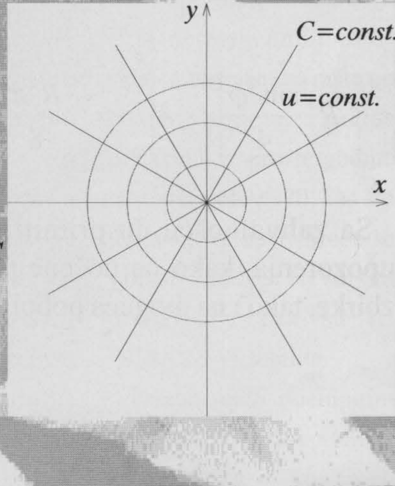
$$\int\frac{dy}{y}=\int\frac{dx}{x}$$

$$\ln y=\ln x+\ln C$$

$$\ln y=\ln C\,x$$

$$\ln y=\ln C\,x$$

$$y=C\,x\,.$$



Zadatak Izračunati tok vektorskog polja $\vec{a}=x^2\vec{i}-y^2\vec{j}+z^2\vec{k}$ kroz dio sfere $x^2+y^2+z^2=R^2$, $x\geq 0$, $y\geq 0$, $z\geq 0$, u smjeru vanjske normale.

Rješenje:

$$\vec{a}=x^2\vec{i}-y^2\vec{j}+z^2\vec{k}, \qquad x^2+y^2+z^2=R^2,$$

$$x\geq 0, \quad y\geq 0, \quad z\geq 0$$

$$\vec{N}_0=\frac{x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}}{R}$$

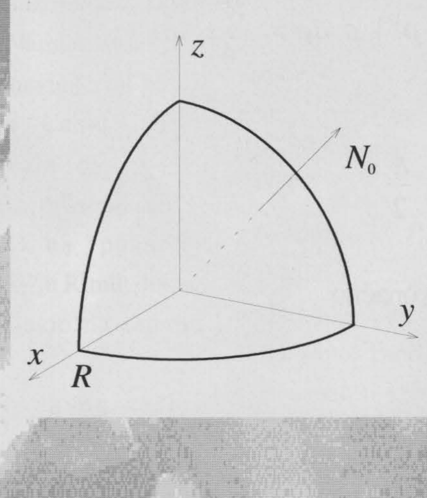
$$z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{x}{z}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{y}{z},$$

$$dS=\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy$$

$$=\frac{R\,dx\,dy}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}$$

$$I=\int_S \vec{a}d\vec{S}=\int_S \vec{a}\vec{N}_0 dS=\frac{1}{R}\int_S\left(x^3-y^3+z^3\right)dS$$



$$I=\frac{1}{R}\int_D\left(x^3-y^3+\sqrt{\left(R^2-x^2-y^2\right)^3}\right)\frac{R\ dx\ dy}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}=$$

$$=\int_0^R\int_0^{\pi/2}\left[\frac{\rho^4}{\sqrt{R^2-\rho^2}}\left(\cos^3 t-\sin^3 t\right)+\right.$$

$$\left.+\left(R^2-\rho^2\right)\rho\ \right]d\rho\ dt=$$

$$=\int_0^R\frac{\rho^4 d\rho}{\sqrt{R^2-\rho^2}}\int_0^{\pi/2}\left(\cos^3 t-\sin^3 t\right)\ dt+$$

$$+\int_0^R\left(R^2-\rho^2\right)\rho\ d\rho\int_0^{\pi/2}dt$$

Kako je

$$\int_0^{\pi/2}\left(\cos^3 t-\sin^3 t\right)\ dt=\int_0^{\pi/2}\cos t\ dt-$$

$$-\int_0^{\pi/2}\sin^2 t\ \cos t\ dt-\int_0^{\pi/2}\sin t\ dt+$$

$$+\int_0^{\pi/2}\sin t\cos^2 t\ dt=0$$

$$\int_0^R\left(R^2-\rho^2\right)\rho\ d\rho=\frac{R^4}{4}$$

$$\int_0^{\pi/2}dt=\frac{\pi}{2}$$

imamo konačno

$$I=\frac{R^4\pi}{8}\ .$$

Isti zadatak bi student koji je uočio da je geografska parametrizacija sfere uobičajena u geodeziji i kartografiji mogao riješiti i na sljedeći način.

$$x=R\ \cos\varphi\ \cos\lambda\ ,$$

$$y=R\ \cos\varphi\ \sin\lambda\ ,$$

$$z=R\ \sin\varphi\ ,$$

$$dS=R^2\cos\varphi\ d\lambda\ d\varphi$$

$$I=\frac{1}{R}\int_S\left(x^3-y^3+z^3\right)\ dS=$$

$$=R^4\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\left(\cos^3\varphi\ \cos^3\lambda-\cos^3\varphi\ \sin^3\lambda+\right.$$

$$\left.+\sin^3\varphi\right)\ \cos\varphi\ d\lambda\ d\varphi$$

Kako je

$$\int_0^{\pi/2}\left(\cos^3\lambda-\sin^3\lambda\right)\ d\lambda=0\ ,$$

što se dokazuje kao i gore, to se integral I pojednostavljuje te imamo

$$I=R^4\int_0^{\pi/2}\sin^3\varphi\ \cos\varphi\ d\varphi\int_0^{\pi/2}d\lambda=$$

$$=\ R^4\left.\frac{\sin^4\varphi}{4}\right|_0^{\pi/2}\left.\lambda\right|_0^{\pi/2}=\frac{R^4\pi}{8}\ .$$

Sa zahvalnošću ću primiti sve primjedbe i upozorenja, kako na uočene pogreške u tekstu zbirke, tako i na moguća poboljšanja. ■