Dvodimenzionalna Helmertova transformacija

piše: Milan Rezo, dipl.ing.geod.

Dvodimenzionalna transformacija rješava položajno uklapanje mreža bez potrebnih podataka o visinama lokalnog sustava. Negativna strana tog pristupa kombiniranja GPS mjerenja s podacima lokalnog sustava je u smanjenom području koje se bez deformacije smije uzeti u obzir. Ipak, za manja područja, gdje se geoidne visine mnogo ne mijenjaju, može se primjeniti ovakva transformacija položajnih podataka. Njoj se često pribjegava kada je lokalna mreža «dobro» definirana položajnim koordinatama (y,x), dok su visine (H) loše određene, odnosno, ako se ne poznaju geoidne visine s dovoljnom točnošću za točke te lokalne mreže. Visinska situacija našeg sustava je takva da ne postoji dovoljan broj zadovoljavajućih geoidnih visina, pa ako je praktična potreba samo rješenje položajnog odnosa, ovakvo kombiniranje trodimenzionalnih podataka s ravninskim lokalnim podacima postaje optimalno rješenje.

Ako označimo položaj neke točke P u ishodišnom sustavu s X_{GPS}, a sa X_{HDKS} označimo vektor položaja iste točke u lokalnom sustavu, tada je dvodimenzionalna transformacija između dva koordinatna sustava definirana izrazom:

$$X_{HDKS} = c + \mu R X_{GPS} \qquad (1.1)$$

gdje je veličina μ faktor mjerila, c vektor translacije:

$$c = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \qquad (1.2)$$

dok R predstavlja rotacijsku matricu, izraz (1.3):

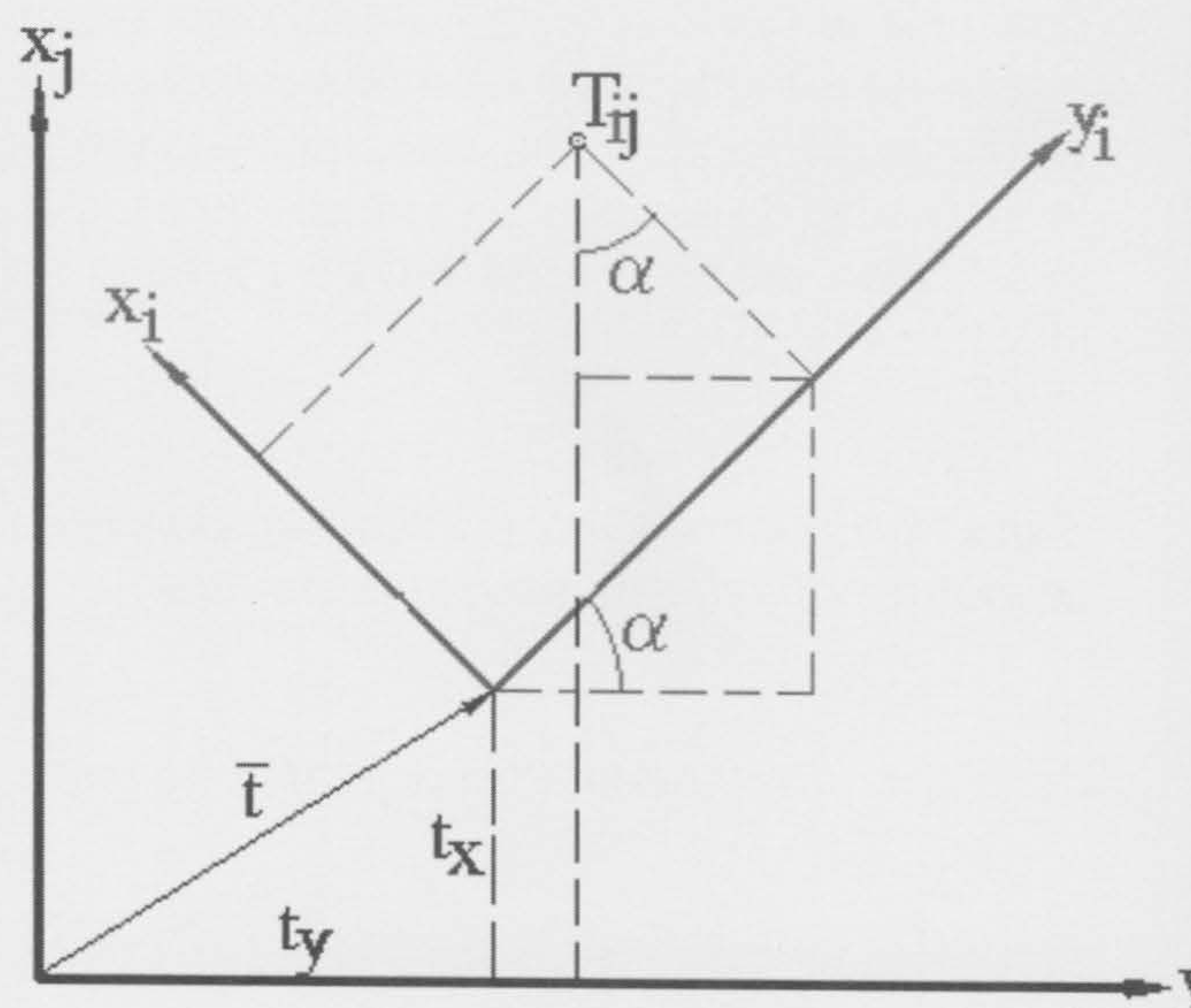
$$R = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \qquad (1.3)$$

Dakle, izraz (1.1) predstavlja Helmert-ovu dvodimenzionalnu transformaciju sa četiri parametara: dvije translacijske komponente c_1 i c_2, kutom rotacije α i promjenom mjerila μ. Uvrštavanjem formula (1.3) i (1.2) u (1.1) dobivamo transformirane komponente za X_i i Y_i:

$$\begin{aligned} X_{HDKS_i} &= c_1 + \mu X_{GPS_i} \cos\alpha - \mu Y_{GPS_i} \sin\alpha \\ Y_{HDKS_i} &= c_2 + \mu X_{GPS_i} \sin\alpha + \mu Y_{GPS_i} \cos\alpha \end{aligned} \qquad (1.4)$$

U slučaju poznatih parametara transformacije, točka iz X_{GPS} sustava može se transformirati u X_{HDKS} sustav pomoću jednadžbe (1.1). Međutim, ako su parametri transformacije nepoznati, oni mogu biti određeni pomoću identičnih točaka u oba koordinatna sustava. Matematički gledano najmanje dvije zajedničke točke su dovoljne za određivanje četiri nepoznanice, ukolio ih ima više potrebno je izvršiti izjednačenje po metodi najmanjih kvadrata. Uvodeći pomoćne veličine imamo:

$$\begin{aligned} p &= \mu\cos\alpha \\ q &= \mu\sin\alpha \end{aligned} \qquad (1.5)$$



Slika 1.: Dvodimenzionalna transformacija.

te uvrštavajući izraz (1.5) u (1.4) dobivamo:

$$\begin{aligned} X_{HDKS_i} &= c_1 + pX_{GPS_i} - qY_{GPS_i} \\ Y_{HDKS_i} &= c_2 + qX_{GPS_i} + pY_{GPS_i} \end{aligned} \qquad (1.6)$$

U slučaju više zajedničkih točaka, do rješenja dolazimo izjednačenjem po metodi najmanjih kvadrata, te imamo sljedeće jednadžbe popravaka:

$$v_{x_i} = c_1 + X_{GPS_i} p - pY_{GPS_i} - X_{HDKS_i}$$
$$v_{y_i} = c_2 + Y_{GPS_i} p + qX_{GPS_i} - Y_{HDKS_i} \qquad (1.7)$$

tj. u matričnom obliku pisano:

$$v = Adx - l \qquad (1.8)$$

gdje je:

$$A_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & X_{GPS\,i} & -Y_{GPS\,i} \\ 0 & 1 & Y_{GPS\,i} & X_{GPS\,i} \end{bmatrix}$$

$$dx = [c_1,\ c_2,\ p,\ q]^T \qquad (1.9)$$

$$l = \begin{bmatrix} X_{HDKS} \\ Y_{HDKS} \end{bmatrix}$$

Normalne jednadžbe, rješenje normalnih jednadžbi i dobivanje parametara transformacije tj. vektora nepoznanica x, računanje popravaka i provođenje potrebnih kontrola dato je u matričnom obliku, izrazi (1.10), (1.11) i (1.12).

$$N = A^t A, Q = N^{-1},$$
$$-n = -A^t l, x = nQ \qquad (1.10)$$

Rješenjem normalnih jednadžbi dobijemo matricu n:

$$A^t l = n = \begin{bmatrix} & & [Y_{HDKS}] \\ & & [X_{HDKS}] \\ [Y_{GPS} Y_{HDKS}] & + & [X_{GPS} X_{HDKS}] \\ [X_{GPS} Y_{HDKS}] & - & [Y_{GPS} X_{HDKS}] \end{bmatrix}$$

(1.11)

Kontrola izjednačenja:

$$v^t v = -l^t v \qquad (1.12)$$

Navedene formule vrijede za jednu točku. Ukoliko imamo n identičnih točaka, vektori v i l , te matrica koeficijenata A glase:

$$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ . \\ . \\ v_n \end{bmatrix}\ l = \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ . \\ . \\ l_n \end{bmatrix}\ A = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ . \\ . \\ A_n \end{bmatrix} \qquad (1.13)$$

Iz numeričkih razloga preporučljiva je redukcija koordinata uvođenjem težišta za oba koordinatna sustava. Težište sustava izražavamo kao srednju vrijednost koordinata, tj.:

$$X_{HDKS_S} = \frac{[X_{HDKS}]}{n},\ Y_{HDKS_S} = \frac{[Y_{HDKS}]}{n}$$
$$X_{GPS_S} = \frac{[X_{GPS}]}{n},\ Y_{GPS_S} = \frac{[Y_{GPS}]}{n} \qquad (1.14)$$

gdje je n broj točaka.

Svaka pojedina koordinata može sada biti izražena u sustavu težišta

$$X_{HDKS_{i_{novi}}} = X_{HDKS_i} - X_{HDKS_S}$$
$$Y_{HDKS_{i_{novi}}} = Y_{HDKS_i} - Y_{HDKS_S}$$
$$X_{GPS_{i_{novi}}} = X_{GPS_i} - X_{gps_S} \qquad (1.15)$$
$$Y_{GPS_{i_{novi}}} = Y_{GPS_i} - Y_{GPS_S}$$

Iz formula (1.11) i (1.14) slijedi:

$$[X_{GPS_{novi}}]=[X_{GPS}]-n[X_{GPS_s}]=[X_{GPS}]-[X_{GPS}]=0$$
$$[Y_{GPS_{novi}}]=[Y_{GPS}]-n[Y_{GPS_s}]=[Y_{GPS}]-[Y_{GPS}]=0$$
$$[X_{HDKS_{novi}}]=[X_{HDKS}]-n[X_{HDKS_s}]=[X_{HDKS}]-[X_{HDKS}]=0$$
$$[Y_{HDKS_{novi}}]=[Y_{HDKS}]-n[Y_{HDKS_s}]=[Y_{HDKS}]-[Y_{HDKS}]=0 \qquad (1.16)$$

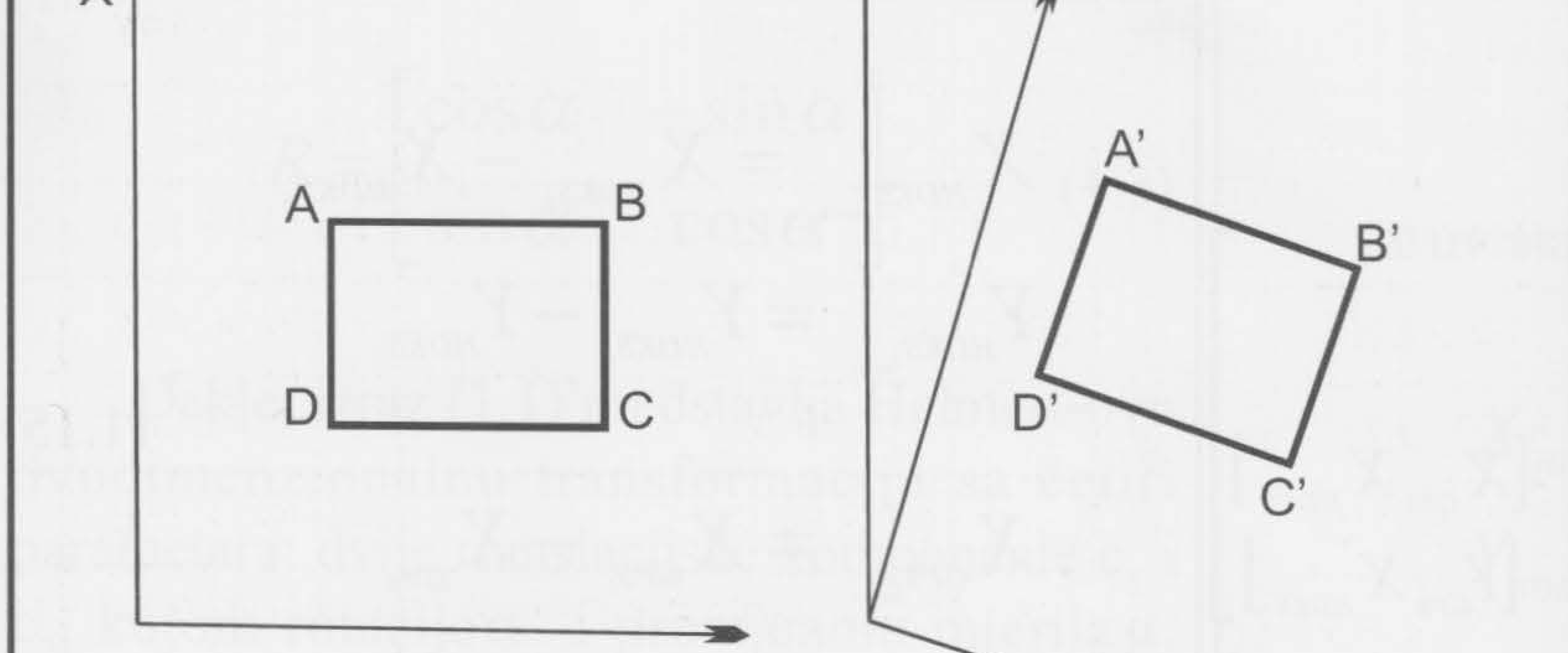
U formuli (1.15) i (1.16) kratica “novi” označava koordinate računate u odnosu na težište sustava. Ako su upotrebljene koordinate računate na taj način nepoznati parametri mogu biti vrlo lako određeni u sustavu normalnih jednadžbi. U jednadžbama (1.16) sume $[X_{GPS}]$, $[Y_{GPS}]$, $[X_{HDKS}]$, $[Y_{HDKS}]$ teže nuli iz čega sljedi sljedeće rješenje sustava normalnih jednadžbi.

$$c_2 = Y_{HDKS_S} - Y_{GPS_S},\ c_1 = X_{HDKS_S} - X_{GPS_S} \qquad (1.17)$$

$$a=\frac{[Y_{GPS}Y_{HDKS}]+[X_{GPS}X_{HDKS}]}{[X_{GPS}^{2}+Y_{GPS}^{2}]}$$

$$b=\frac{[X_{GPS}Y_{HDKS}]-[Y_{GPS}X_{HDKS}]}{[X_{GPS}^{2}+Y_{GPS}^{2}]} \qquad (1.18)$$

Ipak, čak i neovisno o načinu računanja koordinata, rješenje normalnih jednadžbi dat će nepoznate parametre, vidi prilog A i B.

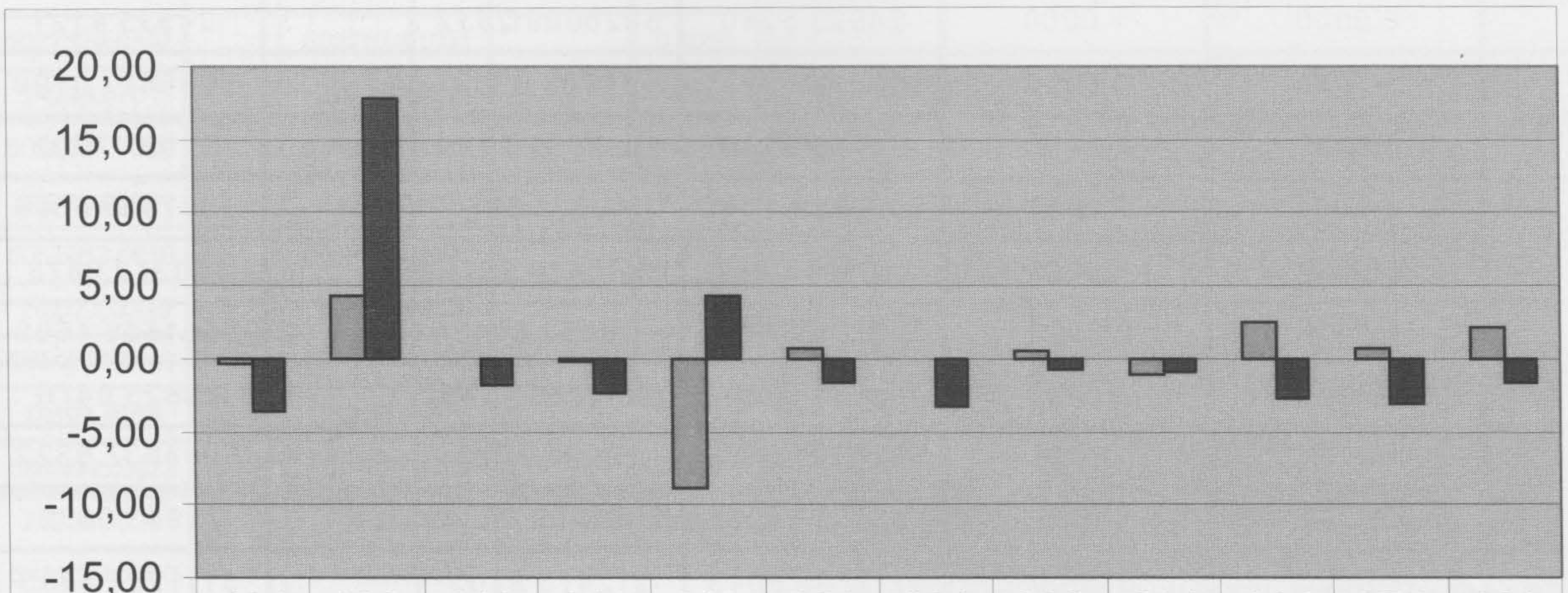


Slika 2.: Helmertova transformacija

Redosljed računanja dvodimenzionalne transformacije

Za rješenje dvodimenzionalne transformacije potrebno je imati položajne koordinate u oba sustava zanemarujući elipsoidne i ortometrijske visine identičnih točaka.

·Na vrijednost kartezijevih $(X, Y)_{GPS}$ kordinata dodaje se vektor translacije c_1 i c_2, čiju je vrijednost dovoljno poznavati na nekoliko metara. Kako za republiku Hrvatsku ne postoje službeni parametri izostavljena je približna transformacija na Besselov elipsoid.
·Iz tako dobivenih kartezijevih koordinata računaju se elipsoidne koordinate $(\phi,\lambda)_{GPS}$, pri čemu se koriste parametri WGS elipsoida. Ova točka je također izostavljena zbog prethodne.
·Iz elipsoidnih koordinata $(\phi.\lambda)_{GPS}$ računaju se kordinate u ravnini $(x,y)_{GPS}$, s parametrima WGS elipsoida, i u odnosu na 15° meridijan.
·Iz elipsoidnih koordinata $(\phi,\lambda)_{HDKS}$ računaju se kordinate u ravnini $(x,y)_{HDKS}$, s parametrima Besselova elipsoida. Kako se radi o većem području (5. i 6. zona) nužno je koristiti nereducirane vrijednosti koordinata računate u odnosu na 15° ili 18° meridijan.
·Iz identičnih točaka u oba koordinatna sustava računaju se parametri dvodimenzionalne transformacije.
·S tako poznatim parametrima možemo GPS koordinate transformirati u HDKS.



	194	196	210	211	212	222	384	390	391	214	375	388
vx	-0,31	4,24	-0,07	-0,23	-8,85	0,78	-0,07	0,46	-1,04	2,43	0,61	2,05
vy	-3,67	17,80	-1,86	-2,43	4,28	-1,66	-3,24	-0,70	-0,97	-2,77	-3,15	-1,64

Graf 1.: Nesuglasice u smjeru x i y osi kod 2D Helmertove transformacije.

PRILOG A: Dvodimenzionalna Helmertova transformacija

GK-BESSEL			
194	PRIVIS	5027524.109	24995.412
196	PLJESEVICA	5066612.020	52387.760
197	PETROVAC	5019943.519	63481.837
198	PRISEKA	5007927.300	102347.258
209	IVANCICA	5116385.918	87401.760
210	IVANIC KLOSTAR	5067953.510	110372.088
211	KOZJACA	5051566.460	78825.048
212	SLJEME	5084837.532	73903.064
222	KALNIK	5111224.380	112785.887
384	BRUSNIK	5048920.214	44877.382
389	KOTORIBA	5136766.842	140464.098
390	KOSEVAC	5106497.316	144876.610
391	NOVOSELSKO BRDO	5052548.469	164274.744
214	DONACKA GORA	5125071.905	57600.160
225	JERUZALEM	5149243.153	91568.520
374	JAVORNIK	5106923.723	33491.923
375	GORJANCI	5068949.190	25125.112
388	LENDAVSKE GORICE	5159565.070	113602.114

Tablica 1.: Transformirane koordinate u Gauss-Krügerove koordinate, korišten Besselov elipsoid

GK-WGS			
194	PRIVIS	5028009.283	24623.624
196	PLJESEVICA	5067092.578	51996.051
197	PETROVAC	5020162.116	63176.355
198	PRISEKA	5007966.768	100688.234
209	IVANCICA	5116851.270	87019.607
210	IVANIC KLOSTAR	5068436.802	110001.087
211	KOZJACA	5052050.500	78453.615
212	SLJEME	5085330.899	73525.752
222	KALNIK	5111707.505	112415.910
384	BRUSNIK	5049404.978	44506.105
389	KOTORIBA	5137197.670	140179.644
390	KOSEVAC	5106979.797	144506.102
391	NOVOSELSKO BRDO	5053030.977	163903.358
214	DONACKA GORA	5125555.133	57230.724
225	JERUZALEM	5149996.414	91365.530
374	JAVORNIK	5045042.674	184143.864
375	GORJANCI	5069434.160	24753.953
388	LENDAVSKE GORICE	5160047.738	113233.461

Tablica 2.: Transformirane koordinate u Gauss-Krugerove koordinate, korišten WGS elipsoid

Matrica koeficijenata normalnih jednadžbi A						prikraćena mjerenja -l
194	1.0000	0.0000	5028009.2832	-24623.6240		5027524.1091
	0.0000	1.0000	24623.6240	5028009.2832		24995.4121
196	1.0000	0.0000	5067092.5775	-51996.0509		5066612.0199
	0.0000	1.0000	51996.0509	5067092.5775		52387.7602
210	1.0000	0.0000	5068436.8019	-110001.0867		5067953.5096
	0.0000	1.0000	110001.0867	5068436.8019		110372.0876
211	1.0000	0.0000	5052050.4995	-78453.6148		5051566.4599
	0.0000	1.0000	78453.6148	5052050.4995		78825.0476
212	1.0000	0.0000	5085330.8988	-73525.7520		5084837.5322
	0.0000	1.0000	73525.7520	5085330.8988		73903.0635
222	1.0000	0.0000	5111707.5049	-112415.9103		5111224.3803
	0.0000	1.0000	112415.9103	5111707.5049		112785.8872
384	1.0000	0.0000	5049404.9776	-44506.1046		5048920.2136
	0.0000	1.0000	44506.1046	5049404.9776		44877.3815
390	1.0000	0.0000	5106979.7966	-144506.1022		5106497.3164
	0.0000	1.0000	144506.1022	5106979.7966		144876.6101
391	1.0000	0.0000	5053030.9770	-163903.3583		5052548.4688
	0.0000	1.0000	163903.3583	5053030.9770		164274.7439
214	1.0000	0.0000	5125555.1331	-57230.7235		5125071.9053
	0.0000	1.0000	57230.7235	5125555.1331		57600.1595
375	1.0000	0.0000	5069434.1601	-24753.9534		5068949.1902
	0.0000	1.0000	24753.9534	5069434.1601		25125.1115
388	1.0000	0.0000	5160047.7382	-113233.4607		5159565.0702
	0.0000	1.0000	113233.4607	5160047.7382		113602.1137

Rješavanje normalnih jednadžbi

	N = A'A				-n = A'l
1.20000E+01	0.00000E+00	6.09771E+07	-9.99150E+05		60971270.18
0.00000E+00	1.20000E+01	9.99150E+05	6.09771E+07		1003625.378
6.09771E+07	9.99150E+05	3.09972E+14	0.00000E+00		3.09943E+14
-9.99150E+05	6.09771E+07	0.00000E+00	3.09972E+14		2322531344 2
	Q = N^{-1}				X = Qn
668.6137246	9.10828E-12	-0.000131528	2.15518E-06	C1	398.4698403
1.34877E-11	668.6137246	-2.15518E-06	-0.000131528	C2	-514.1429769
-0.000131528	-2.15518E-06	2.58841E-11	-5.22151E-25	m	-0.999982682
2.15518E-06	-0.000131528	-3.52559E-25	2.58841E-11	a	2.74985E-05

Kontrola računanja

	N*Q				
1.0000	0.0000	0.0000	0.0000		
0.0000	1.0000	0.0000	0.0000		
0.0000	0.0000	1.0000	0.0000		
0.0000	0.0000	0.0000	1.0000		

Određivanje koeficijenata jednadžbi popravaka za 12 točaka

Određivanje popravaka mjerenja za 12 točaka

A x		-l		v
5027524.4147		5027524.1091		0.3056
24999.0781		24995.4121		3.6660
5066607.7848		5066612.0199		-4.2351
52369.9562		52387.7602		-17.8040
5067953.5810		5067953.5096		0.0714
110373.9505		110372.0876		1.8629
5051566.6949		5051566.4599		0.2350
78827.4755		78825.0476		2.4279
5084846.3823		5084837.5322		8.8501
73898.7829		73903.0635		-4.2806
5111223.6010		5111224.3803		-0.7793
112787.5424		112785.8872		1.6552
5048920.2853		5048920.2136		0.0717
44880.6260		44877.3815		3.2445
5106496.8570		5106497.3164		-0.4594
144877.3086		144876.6101		0.6985
5052549.5051		5052548.4688		1.0363
164275.7122		164274.7439		0.9683
5125069.4719		5125071.9053		-2.4334
57602.9305		57600.1595		2.7710
5068948.5778		5068949.1902		-0.6124
25128.2661		25125.1115		3.1546
5159563.0196		5159565.0702		-2.0506
113603.7494		113602.1137		1.6357

Neke **osnovne karakteristike** Helmertove dvodimenzionalne transformacije:

- ima četiri parametra transformacije
- faktor mjerila je isti u svim smjerovima i na svim mjestima (komforna sličnost)
- oblik figure u lokalnom koordinatnom sustavu ostaje nepromijenjen
- korelacija između fiktivnih mjernja poprima u globalu vrijednost nule.

Transformirane koordinate						
	Xwgs	Ywgs	Xhdks	Yhdks	Kontrola	
					vx	vy
			1	2	3	4
194	5028009.283	24623.624	5027524.415	24999.078	0.306	3.666
196	5067092.578	51996.051	5066607.785	52369.956	-4.235	-17.804
197	5020162.116	63176.355	5019678.444	63551.357	-265.075	69.520
198	5007966.768	100688.234	5007484.339	101062.922	-442.961	-1284.336
209	5116851.270	87019.607	5116366.579	87391.537	-19.339	-10.223
210	5068436.802	110001.087	5067953.581	110373.950	0.071	1.863
211	5052050.500	78453.615	5051566.695	78827.476	0.235	2.428
212	5085330.899	73525.752	5084846.382	73898.783	8.850	-4.281
222	5111707.505	112415.910	5111223.601	112787.542	-0.779	1.655
384	5049404.978	44506.105	5048920.285	44880.626	0.072	3.244
389	5137197.670	140179.644	5136714.088	140550.095	-52.754	85.996
390	5106979.797	144506.102	5106496.857	144877.309	-0.459	0.698
391	5053030.977	163903.358	5052549.505	164275.712	1.036	0.968
214	5125555.133	57230.724	5125069.472	57602.931	-2.433	2.771
225	5149996.414	91365.530	5149511.268	91736.474	268.115	167.954
374	5045042.674	184143.864	5044561.897	184516.087	-62361.826	151024.164
375	5069434.160	24753.953	5068948.578	25128.266	-0.612	3.155
388	5160047.738	113233.461	5159563.020	113603.749	-2.051	1.636

Transformacija koordinata pomoću parametara

PRILOG B: Rješenje Helmertove transformacije pomoću težišta u oba sustava

Matrica koeficijenata"A"			Prikr. mjerenja "-l"
-53.4141	58.6389		-53.4151
-58.6389	-53.4141		-58.6400
-14.3308	31.2664		-14.3272
-31.2664	-14.3308		-31.2477
-12.9866	-26.7386		-12.9857
26.7386	-12.9866		26.7366
-29.3729	4.8089		-29.3727
-4.8089	-29.3729		-4.8104
3.9075	9.7367		3.8984
-9.7367	3.9075		-9.7324
30.2841	-29.1534		30.2852
29.1534	30.2841		29.1504
-32.0184	38.7564		-32.0190
-38.7564	-32.0184		-38.7581
25.5564	-61.2436		25.5581
61.2436	25.5564		61.2412
-28.3924	-80.6409		-28.3907
80.6409	-28.3924		80.6393
44.1318	26.0318		44.1327
-26.0318	44.1318		-26.0353
-11.9892	58.5085		-11.9900
-58.5085	-11.9892		-58.5103
78.6244	-29.9710		78.6259
29.9710	78.6244		29.9667
N=At A			**-n=At l**
38633.7036	0.0000		38633.0287
0.0000	38633.7036		-1.0664
QXX=N-1			**X=QXX n**
0.000026	0.000000	**p =**	-0.9999825
0.000000	0.000026	**q =**	0.0000276