MATHEMATICA U ANALIZI CENTRALNIH PLOHA DRUGOG REDA

piše: Ivan Medved

S plohom drugog reda studenti geodezije upoznaju se već na prvoj godini studija u matematičkim kolegijima. Tijekom druge godine, a i kasnije, nastavlja se izučavanje tih ploha, upoznaju se njihove jednadžbe u parametarskom obliku te se uči prepoznavati njihova svojstva.

Računalni softver *Mathematica* omogućuje vrlo dobru vizualizaciju ploha drugog reda (kvadrika) upotrijebe li se njihove parametarske jednadžbe. Zadatak postaje znatno složeniji radi li se o kvadrikama zadanim njihovim jednadžbama u općem obliku. U ovom je radu dan postupak za prepoznavanje grafa centralne (nedegenerirane) kvadrike zadane takvom općom jednadžbom te njihova klasifikacija. Osim toga napisan je i program za računalo koji, na osnovu početnih 10 koeficjenata opće jednadžbe plohe drugog reda, plohu klasificira i iscrtava, ukoliko je realna, u standardnom (kanonskom) kao i u općem položaju.

PLOHE DRUGOG REDA

Pod plohom drugoga reda razumijemo skup točaka u prostoru koji je određen jednadžbom drugog stupnja u kartezijevim pravokutnim koordinatama x,y,z tj.

$$F(x,y,z)= \\ = a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+ \\ +2a_{13}xz+2a_{23}yz+2a_{14}x+2a_{24}y \\ +2a_{34}z+a_{44} = 0$$

$$F(x,y,z)=\begin{bmatrix} x & y & z & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}. \qquad (1)$$

gdje su koeficjenti $a_{11}...a_{44}$ realni brojevi i barem jedan od brojeva a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{12}, a_{13}, a_{23} različit od nule. Funkciju F(x,y,z) iz jednadžbe (1) možemo napisati matrično

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{bmatrix} \qquad (2)$$

Vidimo da je matrica

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{bmatrix} \qquad (3)$$

realna i simetrična matrica. Pored toga će još biti važna i podmatrica A_{44} koja se iz matrice (3) dobiva brisanjem zadnjeg retka i stupca,

$$A_{44}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}, \qquad (4)$$

pa je i ona realna i simetrična. Jednadžbu (1) moguće je napisati i pored oblika (2) i u obliku.

$$F(x,y,z)=\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{13} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}+$$

$$+2\begin{bmatrix} a_{14} & a_{24} & a_{34} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}+a_{44}=0. \qquad (5)$$

Najjednostavniji oblik jednadžbe neke centralne plohe drugog reda je tzv. kanonski oblik kod kojeg se glavne osi plohe podudaraju s osima koordinatnog sustava. U jednadžbi (1) kanonski oblik možemo prepoznati kao nepostojanje mješovitih odnosno linearnih članova. Naime, mješoviti članovi xy, xz i yz u jednadžbi kvadrike pokazuju da je kvadrika zarotirana iz kanonskog oblika. Prisustvo x^2 i x, y^2 i y, z^2 i z, u jednadžbi kvadrike bez mješovitih članova znači da je ona iz njega translatirana. Cilj ovog rada će biti klasifikacija centralnih kvadrika svođenjem na kanonski oblik, upotrebom računalnog softvera *Mathematica 3.0.*

CENTRALNE PLOHE DRUGOG REDA

Jednadžbu (1) možemo pisati u matričnom obliku, tj.

$$F(x,y,z) = [x \quad y \quad z]\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{13} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} +$$

$$+2[a_{14} \quad a_{24} \quad a_{34}]\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + a_{44} = 0. \qquad (5)$$

Budući da je A_{44} realna i simetrična matrica, primjenimo li ranije rečeno, ona se može napisati u obliku

$$A_{44} = TBT^T \qquad (6)$$

gdje su matrice B i T sljedećeg oblika:

$$B = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \qquad (7)$$

$$T = \begin{bmatrix} \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi\cos\vartheta & \sin\varphi\cos\psi + \cos\varphi\sin\psi\cos\vartheta & \sin\psi\sin\vartheta \\ -\cos\varphi\sin\psi - \sin\varphi\cos\psi\cos\vartheta & -\sin\varphi\sin\psi + \cos\varphi\cos\psi\cos\vartheta & \cos\psi\sin\vartheta \\ \sin\varphi\sin\vartheta & -\cos\varphi\sin\vartheta & \cos\vartheta \end{bmatrix} \qquad (8)$$

Napomenimo da za centralnu kvadriku matrica A_{44} mora biti regularna i da su u tom slučaju sve svojstvene vrijednosti različite od nule. U daljnjem se radu pretpostavlja da je to ispunjeno.Elementi ë$_1$, ë$_2$, ë$_3$ matrice B su svojstvene vrijednosti matrice A_{44} dakle riješenja kubne jednadžbe

$$\begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & \lambda - a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & \lambda - a_{33} \end{vmatrix} = 0$$

(9)

Matrica T predstavlja matricu prijelaza iz jednog desnog kartezijevog sustava u drugi također desni kartezijev sustav i može se dobiti kao produkt triju matrica od kojih svaka predstavlja rotaciju za određeni kut. Pripadni kutevi nazivaju se Eulerovi kutevi (φ, ϑ, ψ).

Primjetimo da su svojstvene vrijednosti ë$_1$, ë$_2$, ë$_3$ uvijek realni brojevi jer se radi o realnoj simetričnoj matrici. Stupci ortogonalne matrice T komponente su jediničnih svojstvenih vektora v_1, v_2, v_3 matrice A_{44} koji pripadaju svojstvenim vrijednostima ë$_1$, ë$_2$, ë$_3$, poredani tako da bude det T = 1.S pravom se može postaviti pitanje kako odrediti svojstvene vektore u slučaju da svojstvene vrijednosti ë$_1$, ë$_2$, ë$_3$ nisu međusobno različite. Opća teorija se ovdje neće iznositi već ćemo se zadržati na matricama reda 3. Ukoliko su sve svojstvene vrijednosti međusobno jednake, lako se vidi da je svaki vektor u prostoru svojstven vektor matrice A_{44}. Ako su dvije svojstvene vrijedosti međusobno jednake, na primjer ë$_1$ = ë$_2$? ë$_3$, odrede se pripadni svojstveni vektori , v_1 i v_3, dok se treći vektor dobije kao njihov vektorski produkt, uz uvijet da v_1, v_2, v_3 čine desni sustav vektora, tj. det[v_1, v_2, v_3] =1. Dakle, transformacijom

$$T = [v_1 \ v_2 \ v_3]. \qquad (13)$$

prelazimo na nove koordinate x', y', z':

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = T^T \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}. \qquad (14)$$

Zbog ortogonalnosti matrice T vrijedi

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} \qquad (15)$$

dok izraz (5) prelazi u

$$F(x,y,z) =$$

$$= [x \quad y \quad z] T \Lambda T^T \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + 2[a_{14} \quad a_{24} \quad a_{34}]\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} +$$

$$+ a_{44} = 0$$

$$F(x,y,z) =$$

$$= [x' \quad y' \quad z'] \Lambda \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} + 2[a_{14} \quad a_{24} \quad a_{34}] T \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} +$$

$$+ a_{44} = 0$$

$$F(x,y,z)=$$
$$=\begin{bmatrix}x' & y' & z'\end{bmatrix}\Lambda\begin{bmatrix}x'\\ y'\\ z'\end{bmatrix}+2\begin{bmatrix}\alpha & \beta & \gamma\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x'\\ y'\\ z'\end{bmatrix}+$$
$$+a_{44}=0$$

$$F(x,y,z)=\lambda_1 x'^2+\lambda_2 y'^2+\lambda_3 z'^2+$$
$$+2\alpha\, x'+2\beta\, y'+2\gamma\, z'+a_{44}=0 \tag{16}$$

gdje smo označili

$$\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{bmatrix}=T^T\begin{bmatrix}a_{14}\\ a_{24}\\ a_{34}\end{bmatrix} \tag{17}$$

Kako je matrica A_{44} regularna, to su svojstvene vrijednosti ë$_1$, ë$_2$, ë$_3$ različite od nule. Tada se linearni članovi x', x', z', u (16) mogu eliminirati translacijom koordinatnog sustava

$$x''=x'+\frac{\alpha}{\lambda_1}$$
$$y''=y'+\frac{\beta}{\lambda_2} \tag{18}$$
$$z''=z'+\frac{\gamma}{\lambda_3}$$

odnosno

$$x'=x''-\frac{\alpha}{\lambda_1}$$
$$y'=y''-\frac{\beta}{\lambda_2} \tag{19}$$
$$z'=z''-\frac{\gamma}{\lambda_3}$$

Izraz (16) pomoću izraza (19) prelazi u kanonski oblik
F(x,y,z) = ë$_1$x''^{2} + ë$_2$y''^{2} + ë$_3$z''^{2} + a_{44}' = 0 (20)

gdje je

$$a_{44}'=a_{44}-\frac{\alpha^2}{\lambda_1}-\frac{\beta^2}{\lambda_2}-\frac{\gamma^2}{\lambda_3}. \tag{21}$$

Može se također pokazati da vrijedi relacija

$$a_{44}'=\frac{\det(A)}{\det(A_{44})}. \tag{22}$$

KLASIFIKACIJA CENTRALNIH KVADRIKA

Napišimo jednadžbu (20) u obliku

$$\frac{x''^2}{\frac{a_{44}'}{\lambda_1}}+\frac{y''^2}{\frac{a_{44}'}{\lambda_2}}+\frac{z''^2}{\frac{a_{44}'}{\lambda_3}}=-1 \tag{23}$$

i označimo

$$A=\sqrt{\left|\frac{a_{44}'}{\lambda_1}\right|},\quad B=\sqrt{\left|\frac{a_{44}'}{\lambda_2}\right|},\quad C=\sqrt{\left|\frac{a_{44}'}{\lambda_3}\right|}. \tag{24}$$

A, B, C nazivamo poluosima kvadrike.

1) Ako je sgn ë$_1$ = sgn ë$_2$ = sgn ë$_3$ = sgn a_{44}' i a_{44}'? 0 tada (23) možemo napisati u obliku

$$\frac{x''^2}{A^2}+\frac{y''^2}{B^2}+\frac{z''^2}{C^2}=-1 \tag{25}$$

koju nazivamo jednadžbom imaginarnog elipsoida s poluosima A, B, C.

2) Ako je sgn ë$_1$ = sgn ë$_2$ = sgn ë$_3$? sgn a_{44}' i a_{44}'? 0 tada (23) možemo napisati u obliku

$$\frac{x''^2}{A^2}+\frac{y''^2}{B^2}+\frac{z''^2}{C^2}=1 \tag{26}$$

koju nazivamo jednadžbom realnog elipsoida s poluosima A, B, C.

3) Ako je sgn ë$_1$ = sgn ë$_2$ = sgn ë$_3$ i a_{44}'= 0 tada (23) možemo napisati u obliku

$$\frac{x''^2}{A^2}+\frac{y''^2}{B^2}+\frac{z''^2}{C^2}=0 \tag{27}$$

koju nazivamo jednadžbom točke ili imaginarnog stošca.

4) Ako je (sgn ë$_1$) ? (sgn ë$_2$) = 1 i (sgn ë$_3$) · (sgn a_{44}') = 1 i (sgn ë$_1$) ? (sgn ë$_3$) tada (23) možemo napisati u obliku

$$\frac{x''^2}{A^2}+\frac{y''^2}{B^2}-\frac{z''^2}{C^2}=1 \tag{28}$$

koju nazivamo jednadžbom jednoplošnog hiperboloida.

5) Ako je (sgn ë$_1$) ? (sgn ë$_2$) = 1 i (sgn ë$_3$) · (sgn a_{44}') = -1 i (sgn ë$_1$) ? (sgn ë$_3$) tada (23) možemo napisati u obliku

$$\frac{x''^2}{A^2}+\frac{y''^2}{B^2}-\frac{z''^2}{C^2}=-1 \tag{29}$$

koju nazivamo jednadžbom dvoplošnog hiperboloida.

6) Ako je (sgn ë$_1$) ? (sgn ë$_2$) = 1 i (sgn ë$_1$) ? (sgn ë$_3$) i a_{44}' = 0 tada (23) možemo napisati u obliku

$$\frac{x''^2}{A^2}+\frac{y''^2}{B^2}-\frac{z''^2}{C^2}=0 \qquad (30)$$

koju nazivamo jednadžbom realnog stošca.

PRIMJER

Neka je ploha zadana, jednadžbom 4x2+5y2+6z2-4xy+4yz+4x+6y+4z-27=0.

Pripadna karakteristična jednadžba glasi ë^3 −15ë^2 +66ë − 80 = 0.

Njena rješenja su ë$_1$ = 2, ë$_2$ = 5, ë$_3$ = 8, a pripadni svojstveni vektori

$$v_1=\begin{bmatrix}-2\\-2\\1\end{bmatrix},\quad v_2=\begin{bmatrix}2\\-1\\2\end{bmatrix},\quad v_3=\begin{bmatrix}-1\\2\\2\end{bmatrix},$$

$$\det[v_1, v_2, v_3] = 1$$

Kako je a_{44}' = -32, to je sgn ë$_1$ = sgn ë$_2$ = sgn ë$_3$? sgn a_{44}' i a_{44}'? 0, iz čega zaključujemo da se radi o realnom elipsoidu. Njegove poluosi su

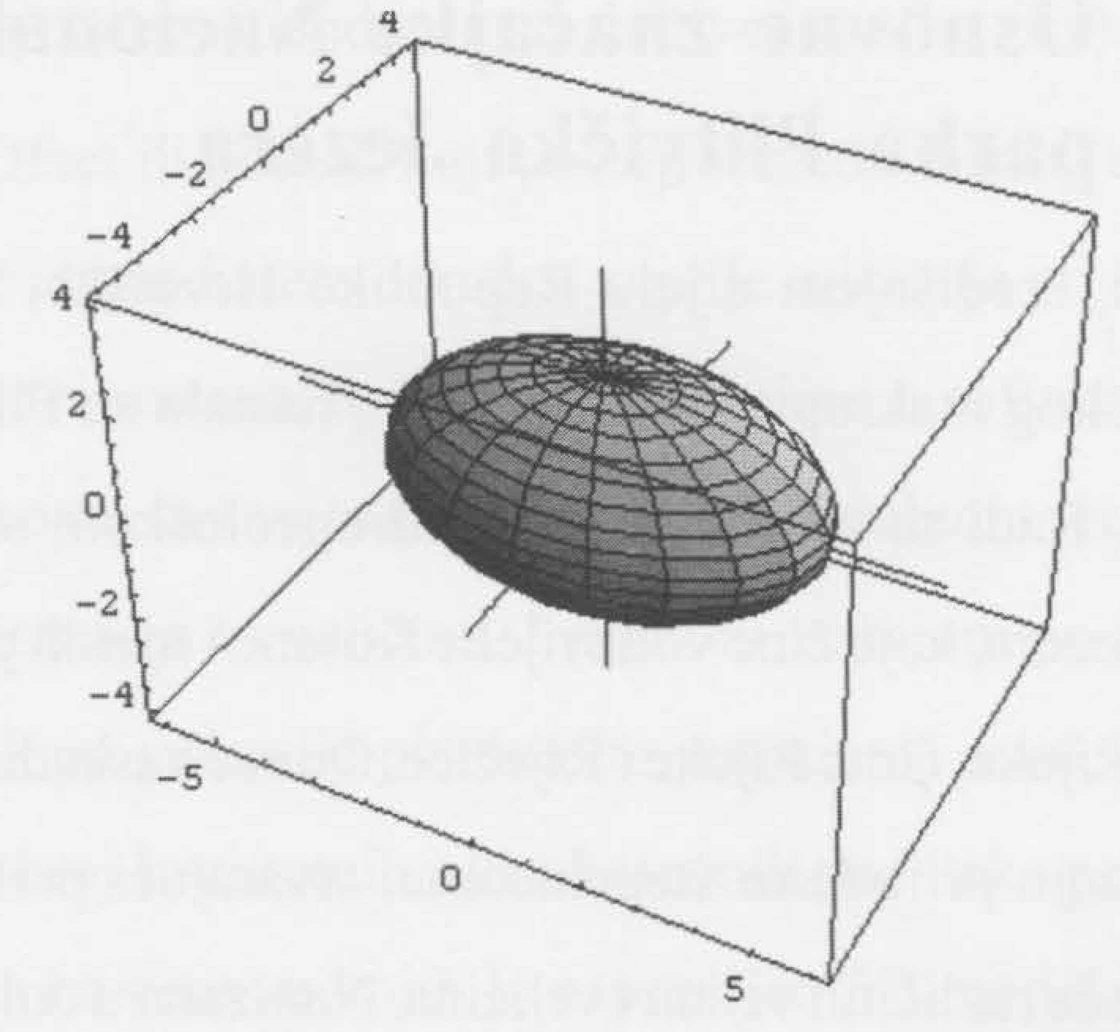
$$A=4,\qquad B=4\sqrt{\frac{2}{5}},\qquad C=2.$$

Kanonski oblik jednadžbe je
2x''^{2} + 5y''^{2} + 8z''^{2} - 32 = 0.

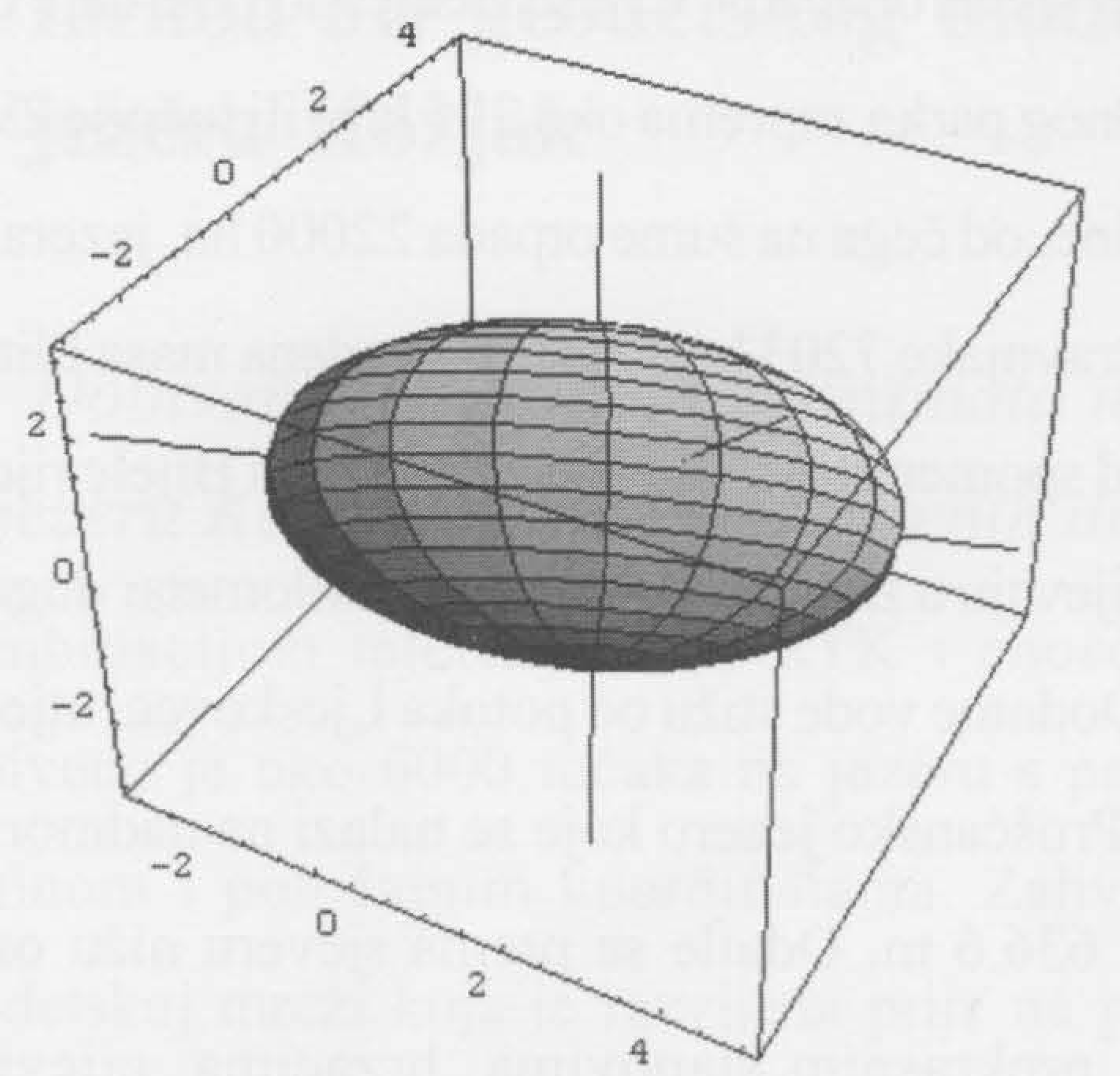
ZAHVALA

Najljepše se zahvaljujem mr. sc. Damjanu Jovičiću na pruženoj pomoći i savjetima pri izradi ovog rada, a posebno na stručnom vodstvu zahvaljujem mentorici dr.sc.Jeleni Beban-Brkić

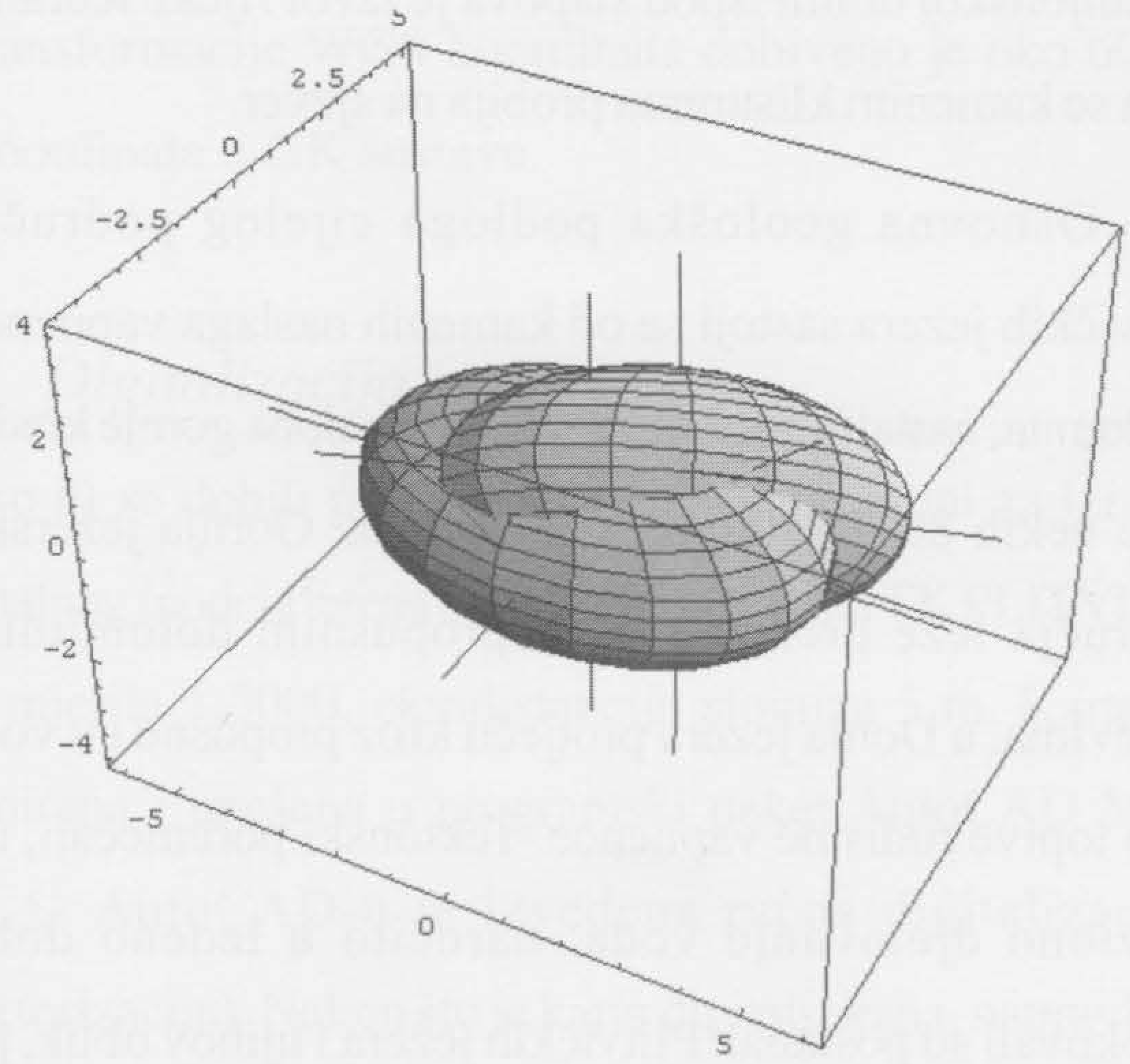
GRAFIČKI PRIKAZ ELIPSOIDA



1. Prikaz elipsoida u kanonskom obliku



2. Prikaz elipsoida zarotiranog i translatiranog u prostoru



3. Međusobni odnos dvaju elipsoida