Eksponencijalne diofantske jednadžbe

Ilija Ilišević*

Sažetak. Kroz mnoštvo ilustrativnih primjera opisani su različiti pristupi za rješavanje eksponencijalnih diofantskih jednadžbi. Zadaci su prilagođeni učenicima srednje škole.

Ključne riječi: eksponencijalne diofantske jednadžbe

Exponential Diophantine equations

Abstract. Various approaches to solving exponential diophantine equations are described by a wide range of illustrative examples. The proofs are adapted to high-school pupils.

Key words: exponential diophantine equations

Eksponencijalne jednadžbe kod kojih se traže cjelobrojna rješenja zvat ćemo eksponencijalne diofantske jednadžbe. Premda ne postoji jedinstvena metoda kojom se rješavaju takve jednadžbe, ipak ćemo na neki način pokušati sistematizirati njihovo rješavanje.

1. Metoda rastavljanja na faktore

Metoda se sastoji u rastavljanju na faktore brojeva i/ili algebarskih izraza koji se pojavljuju u jednadžbi.

Zadatak 1.

Postoje li prirodni brojevi x za koje vrijedi

$$4^x + 3 \cdot 2^x = 88\,?$$

Ako takvi postoje, nađite ih sve.

Rješenje. Dana jednadžba ekvivalentna je jednadžbi

$$2^x(2^x + 3) = 2^3 \cdot 11.$$

Kako je 2^x+3 neparan broj a 2^x paran, na osnovu činjenica koje znamo o djeljivosti brojeva, zaključujemo da mora biti $2^x + 3 = 11$ i $2^x = 2^3$. Jedini prirodan broj koji

*III. gimnazija, Kamila Firingera 14, HR-31000 Osijek

zadovoljava oba ova zahtjeva je $x = 3$. Uvrštavanje u polaznu jednadžbu pokazuje da je $x = 3$ zaista rješenje te jednadžbe.

Zadatak 2. *Postoje li prirodni brojevi x i y za koje vrijedi*

$$3^{x^2+y-1} - 3^{x^2+1} = 1944\,?$$

Ako takvi postoje, nađite ih sve.

Rješenje. Dana jednadžba ekvivalentna je jednadžbi

$$3^{x^2+1}(3^{y-2} - 1) = 3^5 \cdot 2^3.$$

Obzirom da je $3^{y-2}-1$ paran broj, a 3^{x^2+1} neparan, to je $3^{y-2}-1 = 2^3$ i $3^{x^2+1} = 3^5$. Iz prve jednadžbe dobijemo $y = 4$, a iz druge $x = 2$. Uvrštavanje u polaznu jednadžbu pokazuje da su $x = 2$ te $y = 4$ zaista rješenja te jednadžbe.

Zadatak 3. *Postoje li nenegativni cijeli brojevi m, n, x, y, z za koje vrijedi*

$$2^m \cdot 3^n \cdot 5^{x+2} \cdot 7^y = z!\,?$$

Ako takvi postoje, nađite ih sve.

Rješenje. Kako je $z!$ djeljiv sa z, a lijeva strana jednadžbe nije djeljiva sa 11, to je $z \leq 10$. Kako je $x + 2 \geq 2$, to je $5^{x+2} \geq 25$, pa je lijeva strana jednadžbe djeljiva sa 25. Stoga je $z = 10$. Dana jednadžba tako postaje

$$2^m \cdot 3^n \cdot 5^{x+2} \cdot 7^y = 10!.$$

Kako je $10! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 = 2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7$, imamo jednadžbu

$$2^m \cdot 3^n \cdot 5^{x+2} \cdot 7^y = 2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7.$$

Odatle dobivamo $m = 8$, $n = 4$, $x = 0$, $y = 1$. Dakle, $(m, n, x, y, z) = (8, 4, 0, 1, 10)$. Uvrštavanje u polaznu jednadžbu pokazuje da je

$$(m, n, x, y, z) = (8, 4, 0, 1, 10)$$

zaista rješenja te jednadžbe.

Zadatak 4. *Postoje li prirodni brojevi x koji zadovoljavaju jednadžbu*

$$5^x + 2^{x+1} \cdot 3^x = 3^{2x} + 2^{2x}\,?$$

Ako takvi postoje, nađite ih sve.

Rješenje. Dana jednadžba ekvivalentna je jednadžbi

$$5^x = 3^{2x} - 2 \cdot 3^x \cdot 2^x + 2^{2x},$$

a stoga i s

$$5^x = (3^x - 2^x)^2.$$

Dakle, 5^x je potpun kvadrat, pa je x paran broj. Neka je $x = 2m$, $m \in \mathbb{N}$. Tada je

$$5^m = 3^{2m} - 2^{2m} = (3^m - 2^m)(3^m + 2^m),$$

odakle se vidi da je

$$3^m - 2^m = 5^a \quad \text{i} \quad 3^m + 2^m = 5^b$$

za neke $a, b \in \mathbb{N}_0$, $a < b$. Stoga je

$$3^m + 2^m \geq 5(3^m - 2^m),$$

odakle dobivamo

$$6 \cdot 2^m \geq 4 \cdot 3^m,$$

odnosno

$$\frac{3}{2} \geq \left(\frac{3}{2}\right)^m.$$

Kako je m prirodan broj, to je $m = 1$, dakle, $x = 2$. Uvrštavanje u polaznu jednadžbu pokazuje da je $x = 2$ zaista rješenje te jednadžbe.

Zadatak 5. *Postoje li cjelobrojna rješenja jednadžbe*

$$x^2 = 3^y + 7\,?$$

Ako takvi postoje, nađite ih sve.

Rješenje. Očito je da y mora biti prirodan broj. Dokažimo da ne može biti neparan. Naime, ako je y neparan broj, onda je

$$\begin{aligned} & 3^y + 7 = (3^y + 1) + 6 \\ = \; & (3+1)\big(3^{y-1} - 3^{y-2} + \cdots + 1\big) + 6 \\ = \; & 4\big((3^{y-1} - 3^{y-2} + \cdots + 1) + 1\big) + 2. \end{aligned}$$

Znači da $3^y + 7$ pri dijeljenju sa 4 daje ostatak 2, dok x^2 pri dijeljenju sa 4 daje ostatak 0 ili 1. Dakle, y je paran broj. Neka je $y = 2m$, $m \in \mathbb{N}$. Tada je dana jednadžba ekvivalentna s

$$x^2 - 3^{2m} = 7,$$

odnosno s

$$(x - 3^m)(x + 3^m) = 7.$$

Broj 7 se na dva načina može prikazati kao produkt dva cijela broja: $7 = 1 \cdot 7 = (-1) \cdot (-7)$. Stoga je, uzevši u obzir da je $x - 3^m < x + 3^m$,

$$(x - 3^m, x + 3^m) \in \{(1, 7), (-7, -1)\}.$$

Slijedi

$$(x, m) \in \{(4, 1), (-4, 1)\},$$

pa je konačno

$$(x, y) \in \{(4, 2), (-4, 2)\}.$$

Provjera pokazuje da oba para $(4, 2)$ i $(-4, 2)$ zadovoljavaju polaznu jednadžbu pa su to i sva tražena cjelobrojna rješenja.

Zadatak 6. *Postoje li prirodni brojevi x i y za koje vrijedi*

$$3^x - 2^y = 1.$$

Ako takvi postoje, odredite ih sve.
Rješenje. Razlikovat ćemo dva slučaja: kada je x neparan broj i kada je x paran broj.

Neka je x neparan broj tj. $x = 2m + 1$, $m \in \mathbb{N}_0$. Tada je

$$3^x = 3^{2m+1} = (3^2)^m \cdot 3 = 9^m \cdot 3.$$

Kako je $9 \equiv 1 \pmod 4$, to je $9^m \cdot 3 \equiv 3 \pmod 4$. Slijedi

$$2^y = 3^x - 1 \equiv 2 \pmod 4,$$

što je moguće jedino za $x = y = 1$.

Neka je x paran broj, tj. $x = 2m$, $m \in \mathbb{N}$. Tada je

$$2^y = 3^{2m} - 1 = (3^m - 1)(3^m + 1).$$

Slijedi da su $3^m - 1$ i $3^m + 1$ potencije broja 2. To je moguće samo za $3^m - 1 = 2$ i $3^m + 1 = 4$. Odatle dobivamo $m = 1$, pa je $x = 2$, $y = 3$.

Uvrštavanje u polaznu jednadžbu pokazuje da su $x = 2$ te $y = 3$ zaista rješenja te jednadžbe.

2. Metoda kontradikcije

Najprije pogodimo jedno ili više rješenja jednadžbe, a zatim metodom kontradikcije dokažemo da jednadžba nema drugih rješenja. U nekim zadatcima dokazujemo da jednadžba uopće nema rješenja.

Zadatak 7. *Postoje li prirodni brojevi k i n za koje vrijedi*

$$2^k + 1 = 5^n.$$

Ako takvi postoje, nađite ih sve.
Rješenje. Jedno rješenje pogodimo: $(k, n) = (2, 1)$. Dokažimo da jednadžba nema drugih rješenja. Pretpostavimo suprotno, tj. da postoje $k, n \in \mathbb{N}$, $k > 2$, $n > 1$, za koje vrijedi $2^k + 1 = 5^n$.

Ako je k neparan broj, onda 2^k pri dijeljenju sa 5 daje ostatak 2 ili 3, a $2^k + 1$ ostatak 3 ili 4, dok je 5^n djeljiv sa 5. Dakle, k mora biti paran broj.

Neka je $k = 2l$, $l \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Tada je $2^k = 4^l$ djeljivo sa 16. Da bi

$$2^k = 5^n - 1 = (4+1)^n - 1 = 4^n + n \cdot 4^{n-1} + \cdots + \binom{n}{2} \cdot 4^2 + 4n$$

bilo djeljivo sa 16, mora biti $n = 4m$, $m \in \mathbb{N}$. No, tada je

$$2^k = 5^n - 1 = 5^{4m} - 1 = (5^{2m} - 1)(5^{2m} + 1).$$

Brojevi $5^{2m} - 1$ i $5^{2m} + 1$ su uzastopni parni brojevi, pa je njihov produkt oblika 2^k samo za $k = 3$. No, k mora biti paran, pa smo došli u kontradikciju. Dakle, dana jednadžba nema drugih rješenja osim $(k, n) = (2, 1)$.

Zadatak 8. *Dokažite da ne postoje prirodni brojevi x, y, z, n, takvi da je $z \le n$, koji zadovoljavaju jednadžbu*

$$x^n + y^n = z^n.$$

Rješenje. Pretpostavimo da takvi brojevi postoje. Bez smanjenja općenitosti možemo uzeti da je $x \le y$. Tada je $z > y \ge x$. Iz dane jednadžbe slijedi

$$\begin{aligned} x^n &= z^n - y^n = (z-y)(z^{n-1} + z^{n-2}y + \cdots + zy^{n-2} + y^{n-1}) \\ &> (z-y)nx^{n-1} \ge nx^{n-1}, \end{aligned}$$

odakle se dobije $x \ge n$. No, tada je $z > n$, što se protivi uvjetu zadatka.

Zadatak 9. *Postoje li prirodni brojevi n za koje vrijedi*

$$5^n + 7^n + 11^n = 6^n + 8^n + 9^n\,?$$

Ako takvi postoje, nađite ih sve.

Rješenje. Očito je $n = 1$ rješenje jednadžbe. Dokažimo da drugih rješenja nema. Pretpostavimo suprotno, tj. da je neki $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ rješenje dane jednadžbe. Danu jednadžbu možemo zapisati u obliku

$$11^n - 9^n = (8^n - 7^n) + (6^n - 5^n).$$

Tada za $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ imamo

$$\begin{aligned} & 11^n - 9^n = (11-9)(11^{n-1} + 11^{n-2} \cdot 9 + \cdots + 11 \cdot 9^{n-2} + 9^{n-1}) \\ = \;& 2(11^{n-1} + 11^{n-2} \cdot 9 + \cdots + 11 \cdot 9^{n-2} + 9^{n-1}) \\ > \;& (8^{n-1} + 8^{n-2} \cdot 7 + \cdots + 8 \cdot 7^{n-2} + 7^{n-1}) \\ & +(6^{n-1} + 6^{n-2} \cdot 5 + \cdots + 6 \cdot 5^{n-2} + 5^{n-1}) \\ = \;& (8-7)(8^{n-1} + 8^{n-2} \cdot 7 + \cdots + 8 \cdot 7^{n-2} + 7^{n-1}) \\ & +(6-5)(6^{n-1} + 6^{n-2} \cdot 5 + \cdots + 6 \cdot 5^{n-2} + 5^{n-1}) \\ = \;& (8^n - 7^n) + (6^n - 5^n). \end{aligned}$$

Dobili smo da je

$$11^n - 9^n > 8^n - 7^n + 6^n - 5^n,$$

odnosno

$$5^n + 7^n + 11^n > 6^n + 8^n + 9^n,$$

što je kontradikcija. Dakle, $n = 1$ je jedino rješenje jednadžbe.

Zadatak 10. *Dokažite da ne postoje prirodni brojevi x, y, z, t takvi da vrijedi*

$$x^x + y^y + z^z = t^t.$$

Rješenje. Pretpostavimo da takvi brojevi postoje. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $x \le y \le z < t$. Ako je $z = 1$, onda je $1^1 + 1^1 + 1^1 = 3 \ne t^t$. Za $z = 2$ imamo tri mogućnosti:

$$1^1 + 1^1 + 2^2 = 6 \ne t^t,$$

$$1^1 + 2^2 + 2^2 = 9 \neq t^t,$$
$$2^2 + 2^2 + 2^2 = 12 \neq t^t.$$

Neka je $z \geq 3$. Tada je

$$t^t = x^x + y^y + z^z \leq 3z^z \leq z^{z+1} < (z+1)^{z+1}.$$

Odavde slijedi $t < z + 1$, što se protivi pretpostavci da je $x \leq y \leq z < t$.

Zadatak 11. *Postoje li cijeli brojevi x, y za koje vrijedi*

$$x^2 + 1 = 2^y.$$

Ako takvi postoje, nađite ih.

Rješenje. Očito su $(x, y) = (0, 0)$ i $(x, y) = (1, 1)$ rješenja dane jednadžbe. Dokažimo da drugih rješenja nema. Pretpostavimo suprotno, tj. da za neke $x, y \in \mathbb{Z} \setminus \{0, 1\}$ vrijedi $x^2 + 1 = 2^y$. Uočimo da y tada mora biti prirodan broj. Kako je 2^y paran broj, to je x oblika $2m + 1$, $m \in \mathbb{Z}$. Tada je

$$x^2 + 1 = (2m + 1)^2 + 1 = 4m^2 + 4m + 2 = 4m(m + 1) + 2,$$

pa x^2+1 nije djeljiv s 4. No, 2^y je djeljiv sa 4 za $y \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Dakle, dana jednadžba nema drugih rješenja osim gore navedenih.

3. Razni zadaci

Zadatak 12. *Dokažite da ne postoje prirodni brojevi x, y i z koji zadovoljavaju jednadžbu*

$$2^x + 5^y = 19^z.$$

Rješenje. Kako je $19 \equiv 1 \pmod 3$, to je $19^z \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 3)$. S druge strane je $2 \equiv -1 \pmod 3$, odakle slijedi $2^x \equiv (-1)^x \pmod 3$. Iz $5 \equiv -1 \pmod 3$ dobivamo $5^y \equiv (-1)^y \pmod 3$. Stoga je

$$2^x + 5^y \equiv (-1)^x + (-1)^y \pmod 3.$$

Ako su x i y parni brojevi, onda je $2^x + 5^y \equiv 2 \pmod 3$, a ako su različite parnosti onda je $2^x + 5^y \equiv 0 \pmod 3$. Stoga u ovim slučajevima jednadžba nema rješenje.

Ako su x i y neparni brojevi, tada je $2^x + 5^y \equiv -2 \pmod 3$, tj. $2^x + 5^y \equiv 1 \pmod 3$. Dokažimo da ni u ovom slučaju jednadžba nema rješenje. Neka je $x = 2k + 1$, $k \in \mathbb{N}_0$. Tada je

$$2^x = 2^{2k+1} = 4^k \cdot 2 \equiv (-1)^k \cdot 2 \pmod 5,$$

$$19^z \equiv (-1)^z \pmod 5,$$

pa je

$$5^y = 19^z - 2^x \equiv (-1)^z + (-1)^k \cdot 2 \ (\mathrm{mod}\ 5) \not\equiv 0 \pmod 5.$$

Kako je $5^y \equiv 0 \pmod 5$, to dana jednadžba nema rješenje.

Zadatak 13. *Postoji li trojka (x, y, z) prirodnih brojeva takve da je*

$$x^2 + y^2 = 2^z.$$

Ako takva trojka postoji, odredite sve takve.

Rješenje. Ako je $x = y$, tada jednadžbu zadovoljava svaka trojka

$$(2^t, 2^t, 2t + 1), \quad t \in \mathbb{N}_0.$$

Dokažimo da drugih rješenja nema. Pretpostavimo $x \neq y$.

Neka je k najveća zajednička mjera brojeva x i y te neka je $x = km$, $y = kn$, gdje su $m, n \in \mathbb{N}$ relativno prosti brojevi. Dana jednadžba tada prelazi u

$$k^2(m^2 + n^2) = 2^z.$$

Slijedi da je $k = 2^l$, $l \in \mathbb{N}_0$, pa je

$$m^2 + n^2 = 2^{z-2l}.$$

Kako su $m, n \in \mathbb{N}$, to je $2^{z-2l} \geq 2$, pa je 2^{z-2l} paran broj. Znači da m i n moraju biti iste parnosti, a kako su relativno prosti, to su oba neparni.

Neka je $m = 2u - 1$, $n = 2v - 1$, $u, v \in \mathbb{N}$. Tada je

$$m^2 + n^2 = (4u^2 - 4u + 1) + (4v^2 - 4v + 1) = 4(u^2 - u + v^2 - v) + 2,$$

što znači da $m^2 + n^2$ pri dijeljenju sa 4 daje ostatak 2. No, 2^{z-2l} pri dijeljenju sa 4 daje ostatak 2 samo za $z - 2l = 1$, pa je $m^2 + n^2 = 2$. Odatle slijedi $m = n = 1$, pa je $x = y$, što je u kontradikciji s pretpostavkom $x \neq y$.

Zadatak 14. *Postoje li prirodni brojevi za koje vrijedi*

$$x^{(x^x)} = (x^x)^x\,?$$

Ako postoje, odredite ih sve.

Rješenje. Dana jednadžba je, redom, ekvivalentna jednadžbama

$$x^x \log x = x \log x^x,$$

$$x^x \log x = x^2 \log x,$$

$$\log x(x^x - x^2) = 0,$$

$$x^2 \log x(x^{x-2} - 1) = 0.$$

Kako je $x > 0$, to je $\log x = 0$ ili $x^{x-2} = 1$. Ako je $\log x = 0$, tada je $x_1 = 10^0 = 1$. Ako je $x^{x-2} = 1$, logaritmiranjem po bazi 10 dobivamo $(x - 2) \log x = 0$, pa je ili $x - 2 = 0$ ili $\log x = 0$. Slijedi $x_2 = 2$. Dakle, $x \in \{1, 2\}$. Direktnim uvrštavanjem jednostavno se možemo uvjeriti da su $x = 1$ te $x = 2$ zaista rješenja zadane jednadžbe.

Zadatak 15. *Ako postoje, odredite sve parove prirodnih brojeva (x, y) koji zadovoljavaju jednadžbu*

$$x^y = y^{x-y}.$$

Rješenje. Kako je prema uvjetu zadatka x^y prirodan broj, to mora i y^{x-y} biti prirodan broj, pa je $x-y \geq 0$ tj. $x \geq y$. Za $x = y$ dobivamo jednadžbu $x^x = x^0 = 1$, odakle slijedi $x = 1 = y$. Neka je $x > y$. Tada iz dane jednadžbe dobivamo

$$\frac{x^y}{y} = y^{x-y-1}.$$

Kako je y^{x-y-1} prirodan broj, to znači da je x^y djeljiv sa y, a onda je i x djeljiv sa y, tj. $x = ky$, $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Tada iz dane jednadžbe dobivamo

$$(ky)^y = y^{ky-y} = y^{(k-1)y} = (y^{k-1})^y$$

odakle je $ky = y^{k-1}$ tj. $k = y^{k-2}$. Kako je $k > 1$, to je i $y^{k-2} > 1$, pa je $k-2 > 0$, odakle slijedi $k > 2$.

Ako je $k = 3$, tada je $y^{3-2} = 3$ odnosno $y = 3$ i stoga $x = 3 \cdot 3 = 9$.

Ako je $k = 4$, tada je $y^{4-2} = 4$ odnosno $y = 2$ i stoga $x = 4 \cdot 2 = 8$.

Kako je y prirodan broj različit od 1, to je $y \geq 2$, pa je $y^{k-2} \geq 2^{k-2}$. Matematičkom indukcijom lako dokažemo da je $2^{k-2} > k$ za $k \geq 5$. Slijedi $y^{k-2} > k$, što se protivi jednakosti $k = y^{k-2}$. Stoga za $k \geq 5$ jednadžba nema rješenja.

Dakle, $(x, y) \in \{(1, 1), (8, 2), (9, 3)\}$. Uvrštavanjem u polaznu jednadžbu vidimo da su navedeni parovi zaista rješenja jednadžbe.

Zadaci za vježbu

1. Ako postoje, odredite prirodne brojeve x i y za koje vrijedi $2^x + 1 = 3^y$.
Rješenje. $(x, y) \in \{(1, 1), (3, 2)\}$.
2. Ako postoje, odredite cijele brojeve x i y za koje vrijedi $2^x - 3^y = 7$.
Rješenje. $(x, y) \in \{(3, 0), (4, 2)\}$.
3. Dokažite da jednadžba $5^x + 2 = 17^y$ nema rješenja u skupu prirodnih brojeva.
4. Ako postoje, odredite prirodne brojeve x, y, z za koje vrijedi $2^x + 2^y + 2^z = 2306$.
Rješenje. $(x, y, z) \in \{(1, 8, 11), (1, 11, 8), (8, 1, 11), (8, 11, 1), (11, 1, 8), (11, 8, 1)\}$.
5. Ako postoje, odredite cijele brojeve x, y i z za koje vrijedi $3^x + 4^y = 5^z$.
Rješenje. $(x, y) \in \{(0, 1, 1), (2, 2, 2)\}$.
6. Ako postoje, odredite nenegativne cijele brojeve x, y, z za koje vrijedi $5^x \cdot 7^y + 4 = 3^z$.
Rješenje. $(x, y, z) = (1, 0, 2)$.
7. Ako postoje, odredite sve međusobno različite prirodne brojeve x i y za koje vrijedi $x^y = y^x$.
Rješenje. $(x, y) = (2, 4)$.
8. Dokažite da ne postoje prirodni brojevi m, n i k za koje vrijedi $m^2 + n^2 = 3^k$.

Literatura

[1] D. BRÁNZEI, I. SERDEAN, V. SERDEAN, *Junior Balkan Mathematical Olympiads*, Plus Publishing House, Bucharest, 2003.

[2] V. Burjan, P. Bero, P. Černek, *Matematický koktail*, Slovenske pedagogické nakladatelstvo, Bratislava, 1991.

[3] R. Honsberger, *From Erdös to Kiev*, The Mathematical Association of America, Washington

[4] G. Paskalev, P. Penčev, *Zadači za podgotovka za matematičeski olimpiadi*, Narodna prosveta, Sofija, 1983.