Geometrijski smisao rješenja sustava od tri linearne jednadžbe s tri nepoznanice

Zlatko Udovičić*

Sažetak. Geometrijski smisao rješenja sustava od dvije linearne jednadžbe s dvije nepoznanice je relativno jednostavan i dobro poznat. Očigledno je da analogan geometrijski smisao imaju i rješenja sustava od tri linearne jednadžbe s tri nepoznanice. Na žalost, u literaturi je ovaj problem relativno slabo zastupljen i zbog toga, trud uložen u pisanju ovog članka autor ne smatra uzaludnim.

Ključne riječi: sustavi linearnih jednadžbi reda tri, geometrijski smisao

Geometrical Interpretation of the Systems of Three Linear Equations with Three Unknown Values

Abstract. Geometrical interpretation of a linear system of equations with two unknowns is relatively simple and well known. It is obvious that systems of three linear equations in three unknowns have the analogous geometrical interpretation. Unfortunately, this problem is treated rather rarely in literature, and therefore the author believes his effort in relation to writing of this paper is not useless.

Key words: three dimensional systems of linear equations, geometrical interpretation

1. Uvod

1.1. Sustavi od tri linearne jednadžbe sa tri nepoznanice

Opći oblik sustava od tri linearne jednadžbe sa tri nepoznanice glasi

$$\begin{aligned} a_1x+b_1y+c_1z &= d_1\\ a_2x+b_2y+c_2z &= d_2\\ a_3x+b_3y+c_3z &= d_3, \end{aligned} \tag{1}$$

gdje su x, y, z nepoznanice, a $a_k, b_k, c_k, d_k, k \in \{1,2,3\}$, zadani realni brojevi. Ukoliko je $d_k = 0, k \in \{1,2,3\}$, sustav je homogen, dok je u suprotnom (barem jedan od koeficijenata na desnoj strani je različit od nule) nehomogen.

Rješenje sustava (1) je svaka uređena trojka (X, Y, Z) za koju je svaka od tri jednakosti

$$a_kX + b_kY + c_kZ = d_k, \quad k \in \{1,2,3\},$$

*Prirodno-matematički fakultet, Odsjek za matematiku, Zmaja od Bosne 35, BIH-71000 Sarajevo, email: zzlatko@bih.net.ba

točna. Sustav (1) može imati jedinstveno rješenje, beskonačno mnogo rješenja ili uopće nemati rješenja.

Homogeni sustav ima uvijek tzv. trivijalno rješenje, trojku $(0,0,0)$. Ako je uređena trojka (X,Y,Z) rješenje homogenog sustava, onda je i uređena trojka (cX,cY,cZ), za svaki $c \in \mathbb{R}$, također njegovo rješenje. Prema tome, homogeni sustav uvijek ima rješenje: jedinstveno (trivijalno) ili beskonačno mnogo (tzv. netrivijalnih) rješenja.

1.2. Ravnina u prostoru

Neka su u prostoru zadani vektor $\overrightarrow{n} = a\,\overrightarrow{i} + b\,\overrightarrow{j} + c\,\overrightarrow{k} \neq \overrightarrow{0}$ i točka $M_0(x_0,y_0,z_0)$. Postoji točno jedna ravnina koja sadrži točku M_0 i okomita je na vektor $\overrightarrow{n}$. Jednadžba te ravnine glasi

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0,$$

odnosno

$$ax+by+cz=d,$$

gdje je $d = ax_0 + by_0 + cz_0$. Ako je $d = 0$, prethodna ravnina sadrži ishodište. Ravnine

$$a_1x+b_1y+c_1z=d_1$$

i

$$a_2x+b_2y+c_2z=d_2$$

su paralelne onda i samo onda ako je

$$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}=\lambda,$$

tj. ako i samo ako su im vektori normala linearno zavisni (onda i samo onda ako imaju isti pravac). Pri tome, ako je $\dfrac{d_1}{d_2}=\lambda$, ove ravnine se poklapaju, a ako je $\dfrac{d_1}{d_2}\neq\lambda$, ove ravnine su različite.

Skup svih ravnina koje imaju zajednički pravac naziva se pramen ravnina. Pramen ravnina je određen s dvije neparalelne ravnine. Jednadžba svake ravnina koja pripada pramenu određenom ravninama

$$a_1x+b_1y+c_1z=d_1$$

i

$$a_2x+b_2y+c_2z=d_2$$

je oblika

$$\lambda(a_1x+b_1y+c_1z-d_1)+\mu(a_2x+b_2y+c_2z-d_2)=0,$$

za neke $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ koji nisu istovremeno jednaki nuli.

Skup svih ravnina koje imaju zajedničku točku naziva se snop ravnina. Zajednička točka svih ravnina jednog snopa naziva se centar snopa. Snop ravnina je određen s tri ravnine od kojih su svake dvije neparalelne.

Više o ovoj problematici zainteresirani čitatelj može pronaći u navedenoj literaturi.

2. Homogeni sustavi linearnih jednadžbi

Neka je zadan homogeni sustav linearnih jednadžbi. Prema prethodno rečenom, svaka od jednadžbi ovog sustava predstavlja jednadžbu ravnine koja prolazi ishodištem koordinatnog sustava. Pri tome mogu nastupiti dva glavna slučaja:

1. sustav ima samo trivijalno rješenje i
2. sustav ima (beskonačno mnogo) netrivijalnih rješenja.

2.1. Sustav ima samo trivijalno rješenje

U ovom slučaju geometrijski smisao rješenja sustava je jednostavan. Vektori normala tri promatrane ravnine su linearno nezavisni i te ravnine čine snop ravnina s centrom u ishodištu koordinatnog sustava. Rješenje sustava je uređena trojka $(0, 0, 0)$, što je naravno, ishodište.

2.2. Sustav ima (beskonačno mnogo) netrivijalnih rješenja

Ovaj slučaj dalje se dijeli na tri podslučaja.

2.2.1. Dvije jednadžbe sustava su posljedica treće

U ovom podslučaju sustav je oblika

$$\begin{aligned} ax + by + cz &= 0 \\ \lambda ax + \lambda by + \lambda cz &= 0 \\ \mu ax + \mu by + \mu cz &= 0, \end{aligned}$$

što znači da su vektori normala promatranih ravnina linearno zavisni. Dakle, jednadžbe sustava predstavljaju jednadžbu jedne iste ravnine. Odgovarajuće rješenje sustava je dvoparametarska uređena trojka $\left(s, t, \dfrac{-as - bt}{c}\right)$, $s, t \in \mathbb{R}$, koja geometrijski predstavlja upravo ravninu čija je jednadžba bilo koja od jednadžbi promatranog sustava.

2.2.2. Dvije jednadžbe sustava su nezavisne, a treća je posljedica točno jedne od njih

Sada sustav ima oblik

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z &= 0 \\ \lambda a_1x + \lambda b_1y + \lambda c_1z &= 0, \end{aligned}$$

Dva od tri vektora normala su linearno nezavisni, dok treći leži na pravcu točno jednog od ova dva vektora. Jednadžbe sustava predstavljaju dvije ravnine koje imaju zajednički pravac. Rješenje sustava je jednoparametarska familija uređenih trojki

$$\left(t, \frac{c_1a_2 - c_2a_1}{b_1c_2 - b_2c_1}t, \frac{a_1b_2 - a_2b_1}{b_1c_2 - b_2c_1}t\right), \quad t \in \mathbb{R},$$

koja predstavlja jednadžbu (u parametarskom obliku) zajedničkog pravca ravnina $a_1x + b_1y + c_1z = 0$ i $a_2x + b_2y + c_2z = 0$.

2.2.3. Dvije jednadžbe sustava su nezavisne, a treća je njihova zajednička posljedica

U posljednjem podslučaju sustav je oblika

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z &= 0 \\ (\lambda a_1 + \mu a_2)x + (\lambda b_1 + \mu b_2)y + (\lambda c_1 + \mu c_2)z &= 0, \end{aligned}$$

pa je jedan vektor normale linearna kombinacija preostala dva (linearno nezavisna) vektora normale. Dakle, jednadžbe sustava predstavljaju tri ravnine koje pripadaju jednom pramenu ravnina. Rješenje sustava je ponovno jednoparametarska familija uređenih trojki

$$\left(t, \frac{c_1a_2 - c_2a_1}{b_1c_2 - b_2c_1}t, \frac{a_1b_2 - a_2b_1}{b_1c_2 - b_2c_1}t\right), t \in \mathbb{R},$$

koja predstavlja jednadžbu (ponovo u parametarskom obliku) zajedničkog pravca odgovarajućeg pramena ravnina.

3. Nehomogeni sustavi linearnih jednadžbi

Neka je sada zadan nehomogeni sustav linearnih jednadžbi. Očigledno je da su ravnine određene jednadžbama ovog sustava paralelne ravninama određenim jednadžbama pripadnog homogenog sustava. Treba naglasiti da linearna (ne)zavisnost između vektora normalnih na ove ravnine ostaje nepromijenjena.

Slučaj kada pripadni homogeni sustav ima samo trivijalno rješenje ponovo je najjednostavniji. Tri vektora kojima su određene pripadne ravnine ostaju linearno nezavisni, pa uočene ravnine čine snop ravnina. Nehomogeni sustav također ima jedinstveno rješenje koje je centar ovog snopa ravnina.

Dalje, ravnine određene jednadžbama nehomogenog sustava "nastaju" translacijom ravnina određenih jednadžbama pripadnog homogenog sustava za izvjesni vektor. Ukoliko su sve tri ravnine translatirane za isti vektor, nehomogeni sustav će imati beskonačno mnogo rješenja čiji je geometrijski smisao isti kao i geometrijski smisao rješenja pripadnog homogenog sustava.

Ostaje još da se opiše geometrijski smisao slučaja kada nehomogeni sustav nema rješenja.

U slučaju kada jednadžbe pripadnog homogenog sustava predstavljaju istu ravninu, ravnine određene jednadžbama pripadnog nehomogenog sustava paralelne su ovoj ravnini i ne poklapaju se sve tri. Sustav nema rješenja jer paralelne ravnine nemaju zajedničkih točaka.

Neka sada jednadžbe pripadnog homogenog sustava predstavljaju dvije različite ravnine. Ravnine čiji vektori imaju isti pravac translatirane su za različite vektore, pa su paralelne, ali se sada ne poklapaju. Budući da ove dvije ravnine nemaju zajedničkih točaka, sustav nema rješenja. Sa druge strane, ukoliko se ove dvije ravnine translatiraju za isti vektor, sustav će, kao i pripadni homogeni, imati beskonačno mnogo rješenja, neovisno od toga za koji je vektor translatirana treća ravnina.

Posljednji je slučaj kada jednadžbe pripadnog homogenog sustava predstavljaju tri ravnine čiji vektori normala leže na tri različita pravca jedne ravnine (jedan vektor normale je linearna kombinacija preostala dva). Translacijom ovih ravnina nastat će "beskonačni omotač trostrane prizme" (osim u slučaju kada se sve tri ravnine translatiraju za isti vektor). Sada će svake dvije od ove tri ravnine imati zajednički pravac, ali će ova tri pravca biti paralelni, što je suglasno sa činjenicom da sustav nema rješenja.

4. Primjeri

Primjer 1. *U ovisnosti od parametara $a, b \in \mathbb{R}$ riješiti i dati geometrijski smisao rješenja sustava linearnih jednadžbi*

$$\begin{aligned} x + y + z &= 0 \\ x + ay + az &= 0. \\ x + by + az &= 0 \end{aligned}$$

Rješenje: Zadani sustav je homogen i njegova determinanta jednaka je $(a-1)(a-b)$. Dakle, ako je $(a-1)(a-b) \neq 0$, onda sustav ima samo trivijalno rješenje koje geometrijski predstavlja ishodište koordinatnog sustava.

Ako je $b \neq a = 1$, onda su vektori normala $\overrightarrow{n}_1 = \overrightarrow{n}_2 = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$ i $\overrightarrow{n}_3 = \overrightarrow{i} + b\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$ linearno nezavisni, pa jednadžbe sustava predstavljaju dvije ravnine sa zajedničkim pravcem. Rješenje sustava je jednoparametarska familija uređenih trojki $(t, 0, -t), t \in \mathbb{R}$, što je ujedno i jednadžba zajedničkog pravca promatranih ravnina.

Ako je $b = a \neq 1$, onda su vektori normala $\overrightarrow{n}_1 = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$ i $\overrightarrow{n}_2 = \overrightarrow{n}_3 = \overrightarrow{i} + a\overrightarrow{j} + a\overrightarrow{k}$ linearno nezavisni, pa jednadžbe sustava ponovo predstavljaju dvije ravnine sa zajedničkim pravcem. Sada je rješenje sustava jednoparametarska familija uređenih trojki $(0, t, -t), t \in \mathbb{R}$, što je također jednadžba zajedničkog pravca promatranih ravnina.

Konačno, ako je $a = b = 1$, onda su vektori normala međusobno jednaki $\overrightarrow{n}_1 = \overrightarrow{n}_2 = \overrightarrow{n}_3 = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$, pa jednadžbe sustava predstavljaju istu ravninu, a rješenje sustava, dvoparametarska uređena trojka $(s, t, -s-t)$ je jednadžba upravo te ravnine. ▶

Primjer 2. *U ovisnosti od parametra $a \in \mathbb{R}$ riješiti i dati geometrijski smisao rješenja sustava linearnih jednadžbi*

$$\begin{aligned} -2x + ay - z &= a \\ -ax + 2y + z &= a. \\ -x + y + az &= 1 \end{aligned}$$

Rješenje: Budući da je determinanta sustava jednaka $a(a-2)(a+2)$, prema Cramerovom pravilu, sustav će imati jedinstveno rješenje za sve $a \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 0, 2\}$. Geometrijski, jednadžbe sustava predstavljaju tri ravnine jednog pramena sa centrom u točki

$$\Big(-\frac{a^2+1}{a(a+2)}, \frac{a^2-1}{a(a+2)}, -\frac{a-2}{a(a+2)} \Big).$$

Uočimo da je to rješenje jedinstveno.

Ako je $a = -2$, onda vektori normala ($\overrightarrow{n}_1 = -2\overrightarrow{i} - 2\overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}$ i $\overrightarrow{n}_2 = 2\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$) zadovoljavaju relaciju $\overrightarrow{n}_2 = -\overrightarrow{n}_1$, pa leže na (istom) pravcu koji je različit od pravca trećeg vektora normale $\overrightarrow{n}_3 = -\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} - 2\overrightarrow{k}$. Dakle, prve dvije jednadžbe sustava predstavljaju dvije paralelne ravnine (ne poklapaju se jer koeficijenti desnih strana -2 i -2 ne zadovoljavaju odgovarajuću relaciju, $-2 \neq -(-2)$), a treća jednadžba predstavlja ravninu koja ih siječe. Sustav nema rješenja.

U slučaju kada je $a = 0$ vektori normala ($\overrightarrow{n}_1 = -2\overrightarrow{i} - \overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{n}_2 = 2\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{n}_3 = -\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}$) zadovoljavaju relaciju $\overrightarrow{n}_1 = -\overrightarrow{n}_2 + 2\overrightarrow{n}_3$, dok slobodni koeficijenti sustava $0, 0$ i 1 ne zadovoljavaju odgovarajuću relaciju ($0 \neq -0 + 2 \cdot 1$). Stoga, jednadžbe sustava predstavljaju tri ravnine od kojih se svake dvije sijeku, pri čemu su odgovarajući presjeci međusobno paralelni pravci, što znači da sustav nema rješenja.

Na kraju, ako je $a = 2$, i vektori normala ($\overrightarrow{n}_1 = -2\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{n}_2 = -2\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{n}_3 = -\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + 2\overrightarrow{k}$), i slobodni koeficijenti ($2, 2$ i 1) "zadovoljavaju istu relaciju" $\overrightarrow{n}_1 = \frac{5}{3}\overrightarrow{n}_2 - \frac{4}{3}\overrightarrow{n}_3$, odnosno $2 = \frac{5}{3} \cdot 2 - \frac{4}{3} \cdot 1$, pa sustav ima beskonačno mnogo rješenja. Jednadžbe sustava predstavljaju tri ravnine koje se sijeku po jednom pravcu. Jednadžba ovog pravca (rješenje sustava) je jednoparametarska familija uređenih trojki $(t-1, t, 0), t \in \mathbb{R}$. ▶

Literatura

[1] K. HORVATIĆ, *Linearna algebra I i II dio*, Matematički odjel Prirodoslovno-matematički fakultet Sveučilište u Zagrebu, Zagreb, 1999. (osmo prerađeno i dopunjeno izdanje)

[2] S. KUREPA, *Konačno dimenzionalni vektorski prostori i primjene*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1990. (peto dopunjeno izdanje)

[3] V. PERIĆ, *ALGEBRA I dio Prsteni i moduli Linearna algebra*, IP "Svjetlost" D.D. Zavod za udžbenike i nastavna sredstva, Sarajevo, 1991. (treće izdanje)