

PRENOSIMO IZ DRUGIH ČASOPISA

47. međunarodna matematička olimpijada, Ljubljana, Slovenija, 2006*

HANS- DIETRICH GRONAU

47. međunarodna matematička olimpijada održana je od 6. - 16. srpnja 2006. godine u Ljubljani u Sloveniji. S 90 zemalja i 498 sudionika gotovo je dostignut prošlogodišnji rekord.

Na 47. međunarodnoj matematičkoj olimpijadi sudjelovalo je 90 zemalja i 498 sudionika. Time su skoro dostignuti prošlogodišnji rekordni brojevi (91, 513). Sudjelovanje djevojaka (39) ponovo je doseglo tradicionalnu kvotu od 8%. Na ovoj olimpijadi postignuto je 34.5% mogućih bodova. To znači da su zadaci bili teški i da je tako nastavljena tradicija od 1999. godine. Naime, prosjek postignutih bodova tih godina bio je između 31% i 33%. Samo 2004. godine zadaci su bili nešto lakši, pa je te godine postignuto 38.6% mogućih bodova. Posebno treba primijetiti da je ocjenjivački odbor ove godine izabrao dva relativno lagana zadatka (1. i 4.), što je svakome pružilo šansu za uspjeh. Zbog toga je bodovna granica za brončanu medalju bila na 15 bodova – dakle, viša nego mnogih prošlih godina. S druge strane zadaci 3. i 6. bili su iznimno teški. ¹

*Prenosimo iz Mitteilungen der Deutsche Mathematiker Vereinigung

¹Hrvatska ekipa bila je sastavljena od sljedećih natjecatelja: Nikola Adžaga (V. gimnazija, Zagreb), Goran Dražić (V. gimnazija, Zagreb), Vedran Palajić (V. gimnazija, Zagreb), Luka Rimanić (Gimnazija Andrije Mohorovičića u Rijeci), Josip Saratlija (III. gimnazija u Splitu) i Luka Žunić (Gimnazija Andrije Mohorovičića u Rijeci), a vodili su je Ilko Brnetić, Vjekoslav Kovač i Mea Bombardelli. Rezultati

Natjecatelj	Z1	Z2	Z3	Z4	Z5	Z6	Ukupno	Nagrada
Goran Dražić	7	1	1	7	7	0	23	Srebrna medalja
Nikola Adžaga	7	1	0	7	1	0	16	Brončana medalja
Luka Žunić	7	0	1	2	0	0	10	Pohvala
Josip Saratlija	7	1	0	1	1	0	10	Pohvala
Vedran Palajić	5	1	0	3	0	0	9	
Luka Rimanić	0	0	0	4	0	0	4	
Ukupno	33	4	2	24	9	0	72	

Zadaci na 47. matematičkoj olimpijadi²**1. dan**

1. Neka je I središte upisane kružnice trokutu ABC . U unutrašnjosti trokuta ABC dana točka P za koju vrijedi

$$\angle PBA + \angle PCA = \angle PBC + \angle PCB.$$

Dokažite da je

- (i) $\overline{AP} \geq \overline{AI}$, pri čemu
 (ii) jednakost vrijedi onda i samo onda ako je $P = I$.

(Južna Korea)

2. Neka je P pravilni poligon sa 2006 stranica. Za dijagonalu poligona P kažemo da je *dobra* ako njezine krajnje točke dijele rub poligona P na dva dijela, tako da se svaki od njih sastoji od neparnog broja stranica poligona P . Za stranice poligona P također kažemo da su *dobre*.

Promatrajmo podjele poligona P na trokute pomoću 2003 dijagonale, tako da nikoje dvije među tim dijagonalama nemaju zajedničku točku u unutrašnjosti poligona P . Nađite maksimalni broj jednakokračnih trokuta s dvije *dobre* stranice, koje se mogu dobiti pri nekoj takvoj podjeli. . (Srbija i Crna Gora)

3. Odredite najmanji realni broj M takav da nejednakost

$$|ab(a^2 - b^2) + bc(b^2 - c^2) + ca(c^2 - a^2)| \leq M(a^2 + b^2 + c^2)^2$$

vrijedi za sve realne brojeve a, b, c .

(Irska)

2. dan

4. Pronađite sve parove (x, y) cijelih brojeva takvih da vrijedi

$$1 + 2^x + 2^{2x+1} = y^2.$$

(USA)

5. Neka je P polinom stupnja n , $n > 1$, sa cjelobrojnim koeficijentima i neka je k prirodan broj. Promatrajmo polinom

$$Q(x) = P(P(\dots P(P(x))\dots)),$$

pri čemu se P pojavljuje k puta. Dokažite da postoji najviše n cijelih brojeva t takvih da je $Q(t) = t$.

(Rumunjska)

6. Svakoj stranici b konveksnog poligona P pridružena je maksimalna površina trokuta kojemu je b jedna od stranica i koji je sadržan u poligonu P . Dokažite da je zbroj svih površina pridruženih stranicama poligona P veći ili jednak od dvostruke površine poligona P .

(Srbija i Crna Gora)

²korišten je izvor <http://imo2006.dmfai.si/problems.html>

Vrijeme rada: 4 sata i 30 minuta po danu. Svaki zadatak donosi 7 bodova.

U niže navedenoj tablici dana je rang lista zemalja po uspjehu. Svaka ekipa sastojala se od 6 (ili manje, a što je navedeno u zagradi) natjecatelja. Maksimalno je bilo moguće postići 252 boda. Oznake: N : mjesto na listi, P : broj bodova, G : broj zlatnih medalja, S : broj srebrnih medalja, B : broj brončanih medalja,

N	Država	P	G	S	B	N	Država	P	G	S	B
1	Kina	214	6	0	0	44	Španjolska	80	0	1	2
2	Rusija	174	3	3	0	47	Portugal	78	0	0	3
3	Južna Koreja	170	4	2	0	48	Azerbejdžan	77	0	1	1
4	Njemačka	157	4	0	2	48	Češka Rep.	77	0	0	3
5	USA	154	2	4	0	50	Albanija	76	0	1	1
6	Rumunjska	152	3	1	2	50	Kolumbija	76	0	0	2
7	Japan	146	2	3	1	52	Belgija	75	0	0	1
8	Iran	145	3	3	0	52	Letonija	75	0	0	3
9	Moldavija	140	2	1	3	54	Hrvatska	72	0	1	1
10	Tajvan	136	1	5	0	55	Šrilanka	71	0	0	3
11	Poljska	133	1	2	3	56	Grčka	69	0	0	2
12	Italija	132	2	2	0	57	Uzbekistan	68	0	0	2
13	Vijetnam	131	2	2	2	58	Novi Zeland	66	0	0	2
14	Hong Kong	129	1	3	2	59	Island	63	0	0	1
15	Kanada	123	0	5	1	59	Makao	63	0	0	2
16	Tajland	123	1	3	2	61	Turkmenistan	59	0	1	1
17	Mađarska	122	0	5	1	62	Makedonija	57	0	0	1
18	Slovačka	188	1	2	3	62	Nizozemska	57	0	0	0
19	V. Britanija	117	0	4	1	62	JAR	57	0	0	0
19	Turska	117	0	4	1	65	Maroko	55	0	0	0
21	Bugarska	116	0	4	1	66	Norveška	52	0	0	1
22	Ukrajina	114	1	2	2	67	Irska	49	0	0	0
23	Bjelorusija	111	0	3	2	68	Paragvaj	47	0	1	0
24	Meksiko	110	1	2	1	69	Danska	45	0	0	0
25	Izrael	109	0	3	1	70	Ekvador	40	0	0	1
26	Australija	108	0	3	2	70	Malezija	40	0	0	1
27	Singapur	100	0	2	3	72	Tadžikistan	35	0	0	0
28	Francuska	99	1	0	3	73	Trinidad i Tob.	34	0	0	0
29	Brazil	96	0	0	6	73	Venecuela	34	0	0	0
30	Argentina	95	0	2	2	75	Panama	33	0	0	0
31	Kazahstan	95	0	1	4	76	Pakistan	32	0	0	0
31	Švicarska	95	1	1	0	77	Kirgistan	31	0	0	0
33	Gruzija	94	0	1	3	78	Kostarika	27	0	0	1
33	Litva	94	0	1	2	78	El Salvador	27	0	0	0
35	Indija	92	0	0	5	80	Bangladeš	22	0	0	0
36	Armenija	90	0	1	1	81	Cipar	19	0	0	0
36	Slovenija	90	0	1	3	82	Luksemburg	12	0	0	0
38	Srbija	88	0	0	5	82	Urugvaj	12	0	0	0
39	Finska	86	0	0	4	84	Nigerija	11	0	0	0
40	Peru	85	0	1	1	84	Portoriko	11	0	0	0
41	BiH	84	0	1	2	86	Bolivija	5	0	0	0
42	Austrija	83	0	0	3	86	Kuvajt	5	0	0	0
43	Švedska	82	0	0	3	88	Saud. Arabija	3	0	0	0
44	Estonija	80	0	0	2	89	Lihtenštajn	2	0	0	0
44	Mongolija	80	0	0	2	90	Mozambik	0	0	0	0