POVIJESNA RUBRIKA

Blaise Pascal

Do istine ne dolazimo samo razumom, već i srcem. (Pensées,1670)

Franka Miriam Brückler*

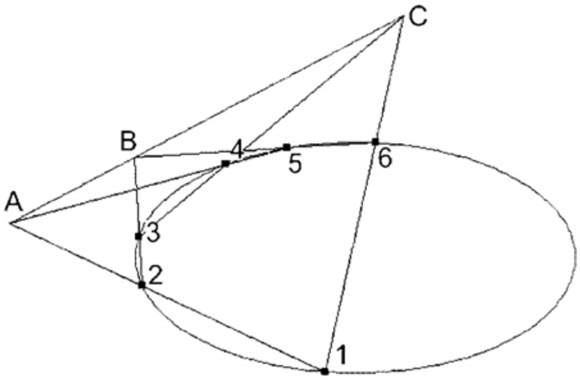
Blaise Pascal rođen je 19. lipnja 1623. u francuskoj pokrajini Auvergne, u mjestu Clermont. Kad je Blaise imao devet godina, obitelj se preselila u Pariz. Otac Étienne po struci je bio pravnik, ali se iz hobija bavio i matematikom. Étienne Pascal sam je školovao sina, a odlučio je da Blaise ne smije učiti matematiku dok ne navrši petnaest godina. Tako su svi matematički tekstovi bili uklonjeni iz kuće, no upravo to je izazvalo zanimanje kod Blaisea. S dvanaest godina Blaise se sam počeo baviti geometrijom te ga je otac našao kako ugljenom na zidu ispisuje dokaz da je zbroj kuteva u trokutu jednak dva prava kuta. To je oca tako impresioniralo da je dozvolio Blaiseu da proučava Euklidove *Elemente*.

Blaise Pascal već je u dobi od četrnaest godina počeo pratiti oca na sastanke Mersenneove grupe. Opat Mersenne bio je centralna točka grupice najboljih francuskih matematičara toga doba, koji su međusobno komunicirali upravo preko Mersennea. Étienne Pascal bio je jedan od članove te skupine, kao i Roberval, Desargues i mnogi drugi. Kad je Blaise imao šesnaest godina na jednom je sastanku Mersenneove grupe prezentirao komad papira na kojem je naveo nekoliko teorema projektivne geometrije[1] koje je sam dokazao, a od kojih je najpoznatiji **Pascalov**

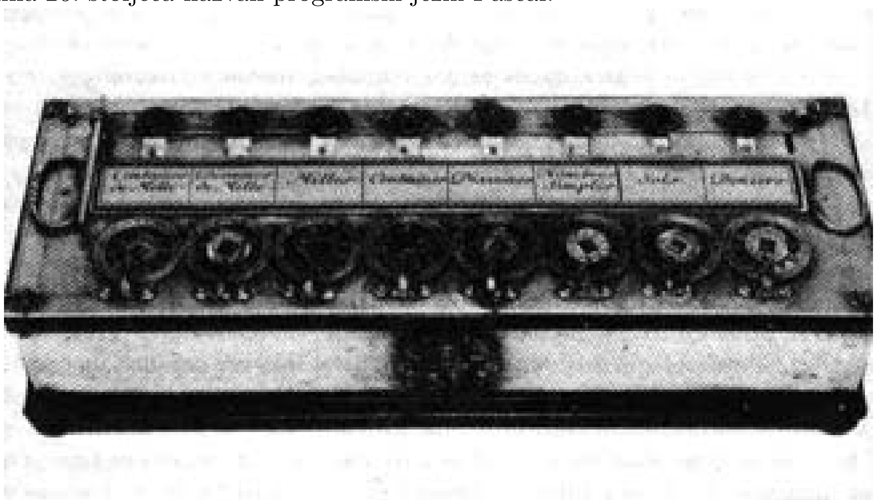
*Matematički odjel PMF-a, Sveučilište u Zagrebu, Bijenička 30, HR-10000 Zagreb, e-mail: `bruckler@math.hr`

[1]Projektivna geometrija je oblik geometrije u kojem se međusobno paralelni pravci sijeku u jednoj beskonačno dalekoj točki. Jedno od bitnih svojstava te geometrije je da su u njoj sve krivulje drugog reda međusobno ekvivalentne.

teorem o mističnom heksagonu. Taj teorem kaže: ako na krivulji drugog reda, recimo na elipsi, označimo šest točaka u redoslijedu 1,2,3,4,5,6 (bitan je redoslijed označivanja, nije nužno da spajanje točaka u tom redoslijedu daje šesterokut), onda su sjecišta A, B, C parova pravaca 12 i 45, 23 i 56, 34 i 61 međusobno kolinearna:



Svoje prvo djelo, *Esej o konikama*, Blaise Pascal je objavio godinu dana kasnije, 1640, a s konikama i projektivnom geometrijom bavio se i u kasnijim razdobljima svog života te se uz Desarguesa smatra utemeljiteljem projektivne geometrije. Kako mu je otac bio zaposlen kao sakupljač poreza, Pascal je u razdoblju 1642–1645 izumio kalkulator, poznat kao *Pascaline*. *Pascaline* je bio sličan mehaničkim kalkulatorima iz četrdesetih godina 20. stoljeća i bio je drugi izumljeni mehanički kalkulator (prvog je 1624. izumio njemački astronom Schickard). Po Pascalu je sedamdesetih godina 20. stoljeća nazvan programski jezik Pascal.



Godine 1646. prekretnica je u Pascalovom životu: od te godine intenzivno se posvećuje vjeri i filozofiji. Povod prekretnici je bila očeva ozljeda nakon koje su ga njegovala dva brata iz jednog vjerskog pokreta koji su ostavili dubok dojam na Pascala. U isto doba Pascal se počinje baviti i fizikom. Tako je 1647. dokazao postojanje vakuuma. Nakon toga se susreo s Descartesom, koji nije vjerovao u postojanje vakuuma, te je poslije susreta u pismu Huygensu napisao da Pascal

„... ima previše vakuuma u glavi”. Godine 1653. objavio je djelo o ravnoteži u tekućinama u kojem se može naći Pascalov zakon tlaka, na osnovi kojeg je SI jedinica za tlak dobila ime Pascal.

Pascal se tokom ljeta 1654. dopisivao s de Fermatom, a iz te korespondencije nastala je suvremena teorija vjerojatnosti. U pet pisama Pascal i de Fermat su proučili već prije poznate kockarske probleme: problem dvije kocke i problem podjele uloga. Te je probleme Pascalu postavio prijatelj, kockar Chevalier de Méré, a Pascal i de Fermat su riješili oba problema.

Problem dvije kocke sastoji se u pitanju koliko puta treba baciti par kocaka da bi se isplatilo kladiti da će bar jednom pasti par šestica. Konkretno, isplati li se kladiti da će u 24 bacanja para kocaka bar jednom pasti par šestica? Taj je problem lako rješiv, kako je pokazao Pascal: vjerojatnost da će u jednom bacanju pasti par šestica je $1/36 \approx 2,78\%$ jer je samo jedna od 36 mogućih kombinacija „broj na prvoj kocki - broj na drugog kocki” odgovarajuća. Stoga je vjerojatnost da u jednom bacanju neće pasti par šestica jednaka $p = 35/36 \approx 97,22\%$. Svako bacanje je nezavisno od prethodnog, pa se za dobivanje vjerojatnosti da u n bacanja nijednom ne padne par šestica p treba n puta množiti sam sa sobom: $P = p^{24} \approx 50,86\%$ je vjerojatnost da u 24 bacanja nijednom ne padne par šestica. Kako će u 24 bacanja ili bar jednom pasti ili nijednom ne pasti par šestica, znači da je vjerojatnost da par šestica bar jednom padne $1 - P \approx 49,14\%$ tj. ne isplati se kladiti da će u 24 bacanja para kocaka bar jednom pasti par šestica.

Zanimljiviji je problem podjele uloga: dva igrača igraju neku igru koja se igra po krugovima sve dok jedan ne ostvari zadani broj pobjeda, recimo 3. U nekom trenutku prije kraja, recimo pri stanju bodova 2 : 1, igrači žele prekinuti igru. Pitanje je u kojem omjeru trebaju podijeliti ulog (recimo da su oba uložila po 32 kn). U pismima su se Pascal i de Fermat suglasili oko odgovora, no dali su različite dokaze. Pascalov pristup je idući: da su igrali još jedan krug, rezultat bi bio ili 3 : 1 (u kojem slučaju prvi dobiva 64 kn) ili 2 : 2 (u kojem slučaju treba igrati još jedan krug ili se mogu suglasiti da svaki uzme po 32 kn). Stoga prvi igrač može reći da je siguran u dobitak 32 kn, a što se druge 32 kn tiče, šansa je pola-pola da će ih dobiti tj. od njih bi trebao dobiti pola. Stoga Pascal zaključuje da je pravedna podjela uloga 48 kn prvom i 16 kn drugom igraču. Pascal je analizirao i slučaj da je stanje pri prekidu bilo 2 : 0 (dobiva se omjer 56 kn : 8 kn) ili 1 : 0 (dobiva se omjer 44 kn : 20 kn).

Pascal i de Fermat su problem razmotrili i u općenitijem slučaju. Recimo da je za pobjedu potrebno $m + n$ bodova ukupno, a igra je prekinuta pri stanju $m : n$. U pismu Pascalu iz kolovoza 1654. de Fermat kaže da ako prvom igraču do pobjede manjkaju 2 boda, a drugom 3, igra bi u najduljoj varijanti trajala još 4 kruga (uvjerite se u to!). Uzmimo dva slova, recimo a i b, kao oznake pobjede prvog odnosno drugog u pojedinom krugu. Svi nizovi duljine 4 koje možemo složiti od ta dva slova predstavljaju sve moguće redosljede pobjeda u ta 4 dodatna kruga. To su *aaaa, aaab, aaba, aabb, abaa, abab, abba, abbb, baaa, baab, baba, babb, bbaa, bbab, bbba, bbbb*, ukupno njih 16. Svaki niz s bar dva a predstavlja situaciju u kojoj pobjeđuje prvi igrač, a oni s bar tri b su u korist b. Prebrajanjem vidimo da prvi pobjeđuje u 11, a drugi u 5 od tih 16 slučajeva.

Pascal je za dobivanje rješenja iskoristio aritmetički trokut poznat kao **Pascalov**

trokut. Pascalov trokut bio je nekoliko stotina godina ranije poznat Kinezima i Arapima, no Pascalovo djelo *Rasprava o aritmetičkom trokutu* (1665) je prvo detaljnije proučavanje tog trokuta. Pascalov trokut je trokutasta tablica binomnih koeficijenata. Pascal ju je zapisivao kao pravokutnu:

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots \\ 1 & 3 & 6 & 10 & 15 & \dots \\ 1 & 4 & 10 & 20 & 35 & \dots \\ 1 & 5 & 15 & 35 & 70 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{array}$$

U prvom retku i stupcu su samo jedinice, a ostali brojevi nastaju tako da zbrojimo brojeve lijevo od i iznad pozicije na koju unosimo novi broj. Danas je uobičajeno tu tablicu pisati u trokutastom obliku

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 2 & & 1 & & \\ & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\ 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\ \vdots & & & & \vdots & & & & \vdots \end{array}$$

U ovakvom zapisu, rubovi su jedinice, a element na nekoj poziciji je zbroj dva elementa iznad njega. Ako za Pascalovu (pravokutnu) tablicu indeks retka promatranog broja označimo s i, a indeks njegova stupca s j, te ako je broj u i-tom retku, j-tom stupcu jednak $p_{i+1,j+1}$ pravilo kojim se zbrajanjem dobivaju brojevi glasi

$$p_{i+1,j+1} = p_{i+1,j} + p_{i,j+1}.$$

Iz toga slijedi da je $p_{i+1,j+1} = \sum_{k=1}^{i+1} p_{k,j}$ tj. svaki broj (npr. broj 20 na poziciji 4. redak, 4. stupac) je jednak zbroju brojeva u stupcu lijevo od njega od prvog do njegovog retka (u našem slučaju $20 = 1 + 3 + 6 + 10$). Pascal je otkrio i niz drugih svojstava ovog trokuta. Danas kažemo: broj $p_{i+1,j+1}$ je **binomni koeficijent** $\binom{i+j}{i} = \frac{(i+j)!}{i!j!}$; vidimo dakle da je Pascalov trokut tablica binomnih koeficijenata. Nalaženje binomnih koeficijenata lakše je u suvremenom trokutastom zapisu Pascalova trokuta: binomni koeficijent $\binom{n}{k}$ nalazi se kao $(k+1)$-vi element u $(n+1)$-vom redu. Kako je poznato, binomni koeficijenti su koeficijenti koji se pojavljuju u binomnoj formuli

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} x^k y^{n-k}$$

i lako i brzo ih se računa koristeći Pascalov trokut. Tako su koeficijenti za $(x+y)^3$ redom elementi četvrtog retka Pascalova trokuta (zapisanog na suvremeni način): to su $1, 3, 3, 1$ pa je $(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$.

Kako Pascalov trokut iskoristiti u rješavanju problema uloga? Upotrebom Pascalova trokuta može se izbjeći ispisivanje svih nizova. Tako u opisanom slučaju kojeg je razmatrao de Fermat trebamo pogledati peti redak Pascalova trokuta (zapisanog na suvremeni način) $1, 4, 6, 4, 1$. Ti brojevi redom kažu u koliko nizova (duljine 4 sastavljenih od slova a i b) imamo a točno $4, 3, 2, 1, 0$ puta (prvi pobijedi u sva 4 kruga samo u 1 slučaju, prvi pobijedi ukupno 3 kruga u 4 slučaja, prvi pobijedi ukupno 2 kruga u 6 slučajeva, prvi pobijedi u točno 1 krugu u 4 slučaja, prvi ne pobijedi nijednom u 1 slučaju). Kako za konačnu pobjedu prvog on treba pobijediti u bar 2 kruga, povoljni za prvog su slučajevi s ukupno 4, 3 ili 2 slova a, a njih ima ukupno $1+4+6 = 11$; za drugog su povoljna preostala dva slučaja (slovo a jednom ili nijednom u nizu), a njih ima $4 + 1 = 5$. Stoga je omjer u kojem treba podijeliti uloge $11 : 5$.

U doba dopisivanja s de Fermatom Pascalovo zdravlje počelo je pokazivati prve znakove slabljenja. U listopadu iste godine zamalo je izgubio život u nezgodi, kad su se konji koji su vukli njegovu kočiju uplašili te je kočija ostala visjeti na mostu nad Seinom. Slabljenje zdravlja i opisana nezgoda ostavile su i psihološke posljedice te se još više okreće vjeri. Usmjerio se na jansenizam, izvorno katolički pokret koji su pape proglasile heretičkim. Karakteristike tog pokreta su naglašavanje istočnoga grijeha i vjera u predodređenost. U ovom razdoblju pisao je filozofska djela, od kojih je najznamenitije *Pensées* (*Misli*), skup osobnih razmišljanja o ljudskoj patnji. U tom djelu zapisana je poznata **Pascalova vaga**: ako Bog ne postoji, čovjek ništa ne gubi vjerujući u njega; ako pak postoji, nevjerovanjem gubi sve. Od mladih dana boležljiv i u jakim bolovima (bio je sklon migreni), u to je doba sve bolesniji. Umro je 19. kolovoza 1662. u Parizu, s 39 godina, u jakim bolovima nakon metastaziranja raka želuca i mozga.

Literatura

[1] W. W. ROUSE BALL, *A Short Account of the History of Mathematics*, Dover, 1960.

[2] R. MANKIEWICZ, *Zeitreise Mathematik*, vgs Verlagsgesellschaft, Köln, 2000.

[3] *MacTutor History of Mathematics Archives: Pascal biography*, `http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Pascal.html`

[4] *Wikipedia: Blaise Pascal*, `http://en.wikipedia.org/wiki/Blaise_Pascal`