Osječki matematički list 12 (2012), 83-103

Dokazi nekih planimetrijskih činjenica koordinatnom metodom

Ilija Ilišević*

Sažetak

U radu se razmatra primjena koordinatne metode u dokazu niza zanimljivih tvrdnji iz planimetrije, te određivanju skupova točaka ravnine koji zadovoljavaju određeni uvjet.

Ključne riječi: *koordinatna metoda, trokut*

Proofs of some planimetric statements by means of the coordinate method

Abstract

In this paper, the application of the coordinate method on solving interesting statements in planimetry is considered. Determination of the set of points in a plane satisfying certain conditions is also studied by means of this method.

Keywords: *coordinate method, triangle*

Mnoge planimetrijske zadaće možemo riješiti primjenom analitičke geometrije (tzv. koordinatnom metodom). Najprije se prisjetimo nekih činjenica iz analitičke geometrije ravnine koje će nam trebati pri rješavanju zadataka.

*III gimnazija, Kamila Firingera 14, HR-31 000 Osijek

1. Udaljenost d točaka $T_1(x_1, y_1)$ i $T_2(x_2, y_2)$ je
$$d = |T_1T_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

2. Ako točka $C(x, y)$ dijeli dužinu $\overline{AB}$, $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, u omjeru λ tj. ako je $|AC| = \lambda|CB|$, onda je
$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}.$$
Ako je točka C polovište dužine $\overline{AB}$, tada je $\lambda = 1$, pa je
$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

3. Koordinate težišta $T(x, y)$ trokuta ABC, $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3)$, iznose
$$x = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \quad y = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}.$$

4. Eksplicitni oblik jednadžbe pravca:
$$y = kx + l.$$

5. Implicitni oblik jednadžbe pravca:
$$Ax + By + C = 0, \quad A^2 + B^2 \neq 0.$$

6. Jednadžba pravca koeficijenta k koji prolazi točkom $T_1(x_1, y_1)$:
$$y - y_1 = k(x - x_1).$$

7. Jednadžba pravca koji prolazi točkama $T_1(x_1, y_1), T_2(x_2, y_2)$:
$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1).$$

8. Uvjet okomitosti pravaca $p_1 \ldots y = k_1x + l_1$ i $p_2 \ldots y = k_2x + l_2$:
$$k_1 \cdot k_2 = -1.$$

9. Udaljenost d točke $T_1(x_1, y_1)$ od pravca $Ax + By + C = 0$:
$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

10. Jednadžba kružnice k središta $S(x_0, y_0)$ i polumjera r :
$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2.$$

11. Površina trokuta s vrhovima $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$:
$$P = \frac{1}{2}|x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)|.$$

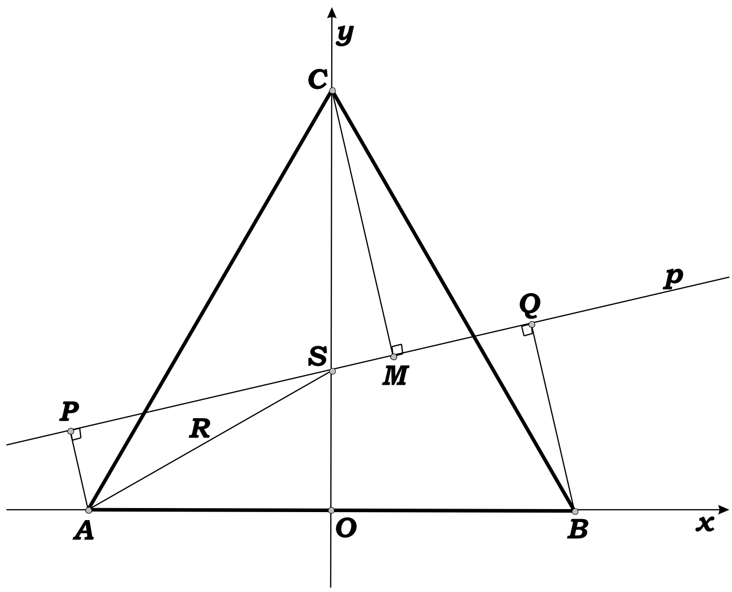
12. Površina četverokuta s vrhovima $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3), D(x_4, y_4)$:
$$P = \frac{1}{2}|x_1(y_2 - y_4) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_4 - y_2) + x_4(y_1 - y_3)|.$$

13. Jednadžbe simetrala kutova između pravaca $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ i $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ su
$$\frac{A_1x + B_1y + C_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} \pm \frac{A_2x + B_2y + C_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}} = 0.$$

Sada ćemo koordinatnu metodu primijeniti u dokazima nekih planimetrijskih činjenica.

Zadatak 1. Središtem S jednakostraničnog trokuta ABC povučen je proizvoljan pravac. Dokažite da je zbroj kvadrata udaljenosti vrhova trokuta od tog pravca jednak $\frac{3}{2}R^2$, gdje je R polumjer kružnice opisane trokutu ABC.

Rješenje. Uvedimo pravokutni koordinatni sustav xOy kao na Slici 1. Ako duljinu stranice jednakostraničnog trokuta označimo sa $2a$, onda su koordinate vrhova trokuta $A(-a, 0)$, $B(a, 0)$ i $C(0, a\sqrt{3})$, a središta $S(0, \frac{a\sqrt{3}}{3})$. Jednadžba pravca p koji prolazi točkom S je
$$y - \frac{a\sqrt{3}}{3} = k(x - 0),$$
odnosno
$$3kx - 3y + a\sqrt{3} = 0.$$
Neka su M, P, Q redom nožišta okomica povučenih iz vrhova C, A, B na pravac p. Udaljenosti točaka A, B, C od pravca p su, redom,
$$|AP| = \frac{|-3ak + a\sqrt{3}|}{3\sqrt{k^2 + 1}}, \quad |BQ| = \frac{|3ak + a\sqrt{3}|}{3\sqrt{k^2 + 1}}, \quad |CM| = \frac{2a\sqrt{3}}{3\sqrt{k^2 + 1}},$$



Slika 1.

pa je

$$|AP|^2 + |BQ|^2 + |CM|^2 = \frac{18a^2k^2 + 18a^2}{9(k^2+1)} = 2a^2.$$

Kako u trokutu AOS vrijedi

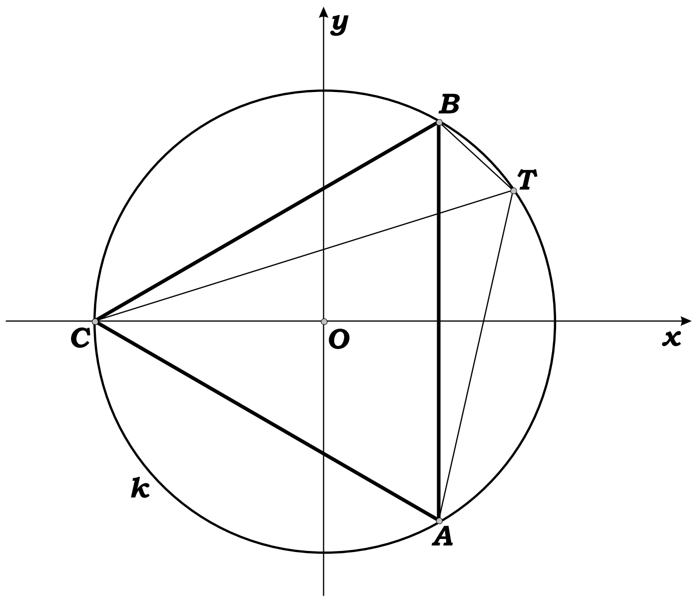
$$R^2 = a^2 + \frac{a^2}{3} = \frac{4}{3}a^2, \text{ tj. } \frac{3}{2}R^2 = 2a^2,$$

to je

$$|AP|^2 + |BQ|^2 + |CM|^2 = \frac{3}{2}R^2.$$

Zadatak 2. Dokažite da je zbroj kvadrata udaljenosti proizvoljne točke kružnice od svih vrhova jednakostraničnog trokuta upisanog u tu kružnicu konstantna veličina.

Rješenje. Uvedimo pravokutni koordinatni sustav xOy tako da mu je ishodište u središtu kružnice k polumjera R, a na negativnom dijelu x-osi



Slika 2.

leži vrh C jednakostraničnog trokuta ABC upisanog u kružnicu k (Slika 2). Tada vrhovi A, B, C trokuta ABC redom imaju koordinate

$$\left(\frac{R}{2}, -\frac{R\sqrt{3}}{2}\right), \left(\frac{R}{2}, \frac{R\sqrt{3}}{2}\right), \left(-R, 0\right).$$

Neka proizvoljna točka T na kružnici k ima koordinate (x, y). Stoga vrijedi

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

Zbrajanjem jednakosti

$$\begin{aligned}
|TA|^2 &= \left(x-\frac{R}{2}\right)^2+\left(y+\frac{R\sqrt{3}}{2}\right)^2\\
&= x^2+y^2-Rx+R\sqrt{3}y+R^2,\\
|TB|^2 &= \left(x-\frac{R}{2}\right)^2+\left(y-\frac{R\sqrt{3}}{2}\right)^2\\
&= x^2+y^2-Rx-R\sqrt{3}y+R^2,\\
|TC|^2 &= (x+R)^2+y^2\\
&= x^2+y^2+2Rx+R^2,
\end{aligned}$$

dobivamo

$$|TA|^2+|TB|^2+|TC|^2=3(x^2+y^2)+3R^2=3R^2+3R^2=6R^2.$$

Zadatak 3. Dan je jednakostraničan trokut ABC. Odredite skup svih točaka T ravnine za koje vrijedi

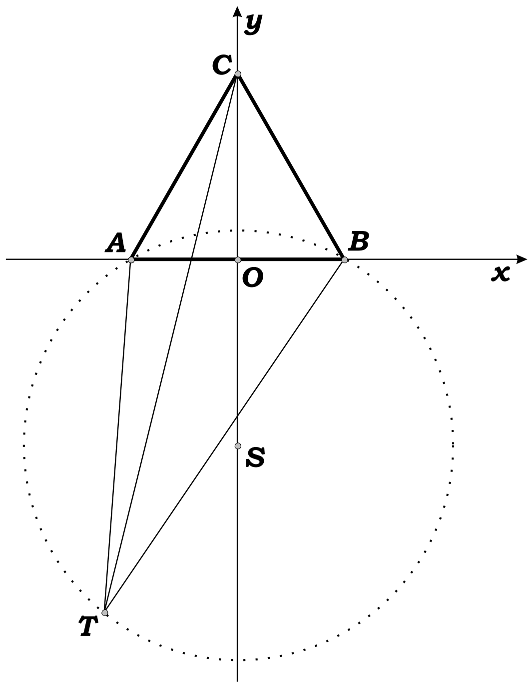
$$|TA|^2+|TB|^2=|TC|^2.$$

Rješenje. Neka je polovište osnovice $\overline{AB}$ ishodište pravokutnog koordinatnog sustava te neka x-os sadrži osnovicu $\overline{AB}$ (Slika 3). Ako je a duljina stranice trokuta, onda je

$$A\left(-\frac{a}{2},0\right),\quad B\left(\frac{a}{2},0\right),\quad C\left(0,\frac{a\sqrt{3}}{2}\right).$$

Neka točka T koja zadovoljava dani uvjet ima koordinate (x,y). Tada imamo

$$\begin{aligned}
|TA|^2 &= \left(x+\frac{a}{2}\right)^2+y^2\\
&= x^2+ax+\frac{a^2}{4}+y^2,\\
|TB|^2 &= \left(x-\frac{a}{2}\right)^2+y^2\\
&= x^2-ax+\frac{a^2}{4}+y^2,\\
|TC|^2 &= x^2+\left(y-\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2\\
&= x^2+y^2-a\sqrt{3}y+\frac{3a^2}{4},
\end{aligned}$$



Slika 3.

pa iz danog uvjeta dobivamo

$$x^2 + \left(y + \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 = a^2,$$

što znači da je traženi skup točaka kružnica sa središtem u $S(0, -\frac{a\sqrt{3}}{2})$ i polumjera a.

Zadatak 4. Dan je pravokutan trokut ABC s duljinama kateta a i b i kutom $\sphericalangle BCA = 90°$. Odredite skup svih točaka T ravnine za koje je $|TA|^2 + |TB|^2 = 2|TC|^2$.

Rješenje. Neka je u pravokutnom koordinatnom sustavu $A(b, 0)$, $B(0, a)$, $C(0, 0)$, $T(x, y)$. Tada iz $|TA|^2 + |TB|^2 = 2|TC|^2$ slijedi

$$(x - b)^2 + y^2 + x^2 + (y - a)^2 = 2(x^2 + y^2),$$

tj.

$$x^2 - 2bx + b^2 + y^2 + x^2 + y^2 - 2ay + a^2 = 2x^2 + 2y^2,$$

odnosno

$$2bx + 2ay - a^2 - b^2 = 0.$$

Dakle, traženi skup točaka T ravnine je pravac čija je jednadžba $2bx + 2ay - a^2 - b^2 = 0$.

Zadatak 5. Dokažite da je zbroj kvadrata udaljenosti točke T, koja leži na promjeru neke kružnice, od krajeva proizvoljne tetive paralelne tom promjeru stalan.

Rješenje. Smjestimo kružnicu polumjera r u pravokutni koordinatni sustav xOy tako da je središte kružnice u ishodištu. Tada krajevi promjera $\overline{AB}$ imaju koordinate $A(-r, 0)$, $B(r, 0)$. Neka je $T(x_T, 0)$ točka na promjeru $\overline{AB}$ i $C(x_C, y_C)$, $D(x_D, y_C)$, gdje su C i D krajevi tetive koja je paralelna promjeru $\overline{AB}$. Tada je

$$\begin{aligned}
|TC|^2 + |TD|^2 &= \left((x_C - x_T)^2 + y_C^2\right) + \left((x_D - x_T)^2 + y_C^2\right) \\
&= x_C^2 - 2x_C x_T + x_T^2 + y_C^2 + x_D^2 - 2x_D x_T + x_T^2 + y_C^2 \\
&= (x_C^2 + y_C^2) + (x_D^2 + y_C^2) + 2x_T^2 - 2x_C x_T - 2x_D x_T \\
&= r^2 + r^2 + 2x_T^2 - 2x_T(x_C + x_D) \\
&= 2r^2 + 2x_T^2 - 2x_T(x_C + x_D). \qquad (1)
\end{aligned}$$

Točke C i D su sjecišta pravca CD i kružnice. Znači da njihove koordinate zadovoljavaju jednadžbe

$$y = y_C, \quad x^2 + y^2 = r^2.$$

Rješavanjem ovog sustava dobivamo $x = \pm\sqrt{r^2 - y_C^2}$, pa je $x_C = -\sqrt{r^2 - y_C^2}$, a $x_D = \sqrt{r^2 - y_C^2}$. Slijedi $x_C + x_D = 0$ odakle uvrštavanjem u (1) dobivamo

$$|TC|^2 + |TD|^2 = 2(r^2 + x_T^2).$$

Zadatak 6. U kvadrat $ABCD$ upisana je kružnica. Dokažite da zbroj kvadrata udaljenosti točke kružnice od vrhova kvadrata ne ovisi o izboru točke na kružnici.

Rješenje. Neka je središte kvadrata $ABCD$ u ishodištu pravokutnog koordinatnog sustava xOy i neka su stranice $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$ paralelne x-osi. Ako je duljina stranice kvadrata $2a$, tada je $A(-a,-a)$, $B(a,-a)$, $C(a,a)$, $D(-a,a)$, a jednadžba kružnice $x^2+y^2=a^2$. Neka je $T(x,y)$ točka na kružnici. Tada je

$$\begin{aligned}
& |TA|^2+|TB|^2+|TC|^2+|TD|^2 \\
= & \left((x+a)^2+(y+a)^2\right)+\left((x-a)^2+(y+a)^2\right) \\
& +\left((x-a)^2+(y-a)^2\right)+\left((x+a)^2+(y-a)^2\right) \\
= & 4x^2+4y^2+8a^2=4(x^2+y^2)+8a^2 \\
= & 4a^2+8a^2=12a^2.
\end{aligned}$$

Zadatak 7. Oko kvadrata $ABCD$ opisana je kružnica. Dokažite da zbroj kvadrata udaljenosti točke kružnice od vrhova kvadrata ne ovisi o izboru točke na kružnici.

Rješenje. Neka je središte kvadrata $ABCD$ u ishodištu pravokutnog koordinatnog sustava xOy, neka je duljina stranice kvadrata a i neka su stranice $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$ paralelne s x-osi. Tada je

$$A\Big(-\frac{a}{2},-\frac{a}{2}\Big),\quad B\Big(\frac{a}{2},-\frac{a}{2}\Big),\quad C\Big(\frac{a}{2},\frac{a}{2}\Big),\quad D\Big(-\frac{a}{2},\frac{a}{2}\Big).$$

Kako za duljinu d dijagonale kvadrata vrijedi $d^2=2a^2$, to je $\left(\frac{d}{2}\right)^2=\frac{a^2}{2}$, pa jednadžba kružnice opisane kvadratu glasi $x^2+y^2=\frac{a^2}{2}$. Neka točka T na kružnici ima koordinate (x,y). Tada je

$$\begin{aligned}
& |TA|^2+|TB|^2+|TC|^2+|TD|^2 \\
= & \left(\Big(x+\frac{a}{2}\Big)^2+\Big(y+\frac{a}{2}\Big)^2\right)+\left(\Big(x-\frac{a}{2}\Big)^2+\Big(y+\frac{a}{2}\Big)^2\right) \\
& +\left(\Big(x-\frac{a}{2}\Big)^2+\Big(y-\frac{a}{2}\Big)^2\right)+\left(\Big(x+\frac{a}{2}\Big)^2+\Big(y-\frac{a}{2}\Big)^2\right) \\
= & 4x^2+4y^2+8\cdot\frac{a^2}{4}=4(x^2+y^2)+2a^2 \\
= & 4\cdot\frac{a^2}{2}+2a^2=4a^2.
\end{aligned}$$

Zadatak 8. Neka su dužine $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$ osnovice trapeza $ABCD$ i neka je točka M polovište kraka $\overline{AD}$. Dokažite da je površina trokuta MBC jednaka polovini površine trapeza.

Rješenje. Uvedimo pravokutni koordinatni sustav xOy tako da je vrh A ishodište koordinatnog sustava, a osnovica $\overline{AB}$ leži na x-osi. Tada je

$$A(0,0), \quad B(x_B,0), \quad C(x_C,y_C), \quad D(x_D,y_C), \quad M\Big(\frac{1}{2}x_D, \frac{1}{2}y_C\Big).$$

Odredimo površinu trapeza $ABCD$ i površinu trokuta MBC :

$$\begin{aligned}
P(ABCD) &= \frac{1}{2}|0(0-y_C)+x_B(y_C-0)+x_C(y_C-0)+x_D(0-y_C)| \\
&= \frac{1}{2}|x_By_C+x_Cy_C-x_Dy_C|. \\
P(MBC) &= \frac{1}{2}\Big|\frac{1}{2}x_D(0-y_C)+x_B\Big(y_C-\frac{1}{2}y_C\Big)+x_C\Big(\frac{1}{2}y_C-0\Big)\Big| \\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}|x_By_C+x_Cy_C-x_Dy_C|.
\end{aligned}$$

Dakle, $P(MBC)=\frac{1}{2}P(ABCD)$.

Zadatak 9. Polovišta dviju susjednih stranica kvadrata i vrh kvadrata koji ne leži na tim stranicama su vrhovi trokuta. Dokažite da je površina tako dobivenog trokuta $\frac{3a^2}{8}$, gdje je a duljina stranice kvadrata.

Rješenje. Neka su u pravokutnom koordinatnom sustavu xOy točke $A(0,0)$, $B(a,0)$, $C(a,a)$, $D(0,a)$ vrhovi kvadrata i neka su E i F redom polovišta stranica $\overline{AB}$ i $\overline{AD}$ tog kvadrata. Kako je $E(\frac{a}{2},0)$, $F(0,\frac{a}{2})$, to je

$$\begin{aligned}
P(ECF) &= \frac{1}{2}\Big|\frac{a}{2}\Big(a-\frac{a}{2}\Big)+a\Big(\frac{a}{2}-0\Big)+0(0-a)\Big| \\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{3a^2}{4}=\frac{3a^2}{8}.
\end{aligned}$$

Zadatak 10. Neka težišnice $\overline{AA_1}$ i $\overline{BB_1}$ trokuta ABC imaju jednake duljine. Dokažite da je tada trokut ABC jednakokračan.

Rješenje. Neka je u pravokutnom koordinatnom sustavu xOy,

$$A(0,0), \quad B(x_B,0), \quad C(x_C,y_C).$$

Tada je

$$A_1\Big(\frac{x_B+x_C}{2},\frac{y_C}{2}\Big),\quad B_1\Big(\frac{x_C}{2},\frac{y_C}{2}\Big),$$

pa imamo

$$\begin{aligned}|AA_1|^2 &= \Big(\frac{x_B+x_C}{2}-0\Big)^2+\Big(\frac{y_C}{2}-0\Big)^2\\ &= \frac{1}{4}(x_B^2+2x_Bx_C+x_C^2+y_C^2),\\ |BB_1|^2 &= \Big(\frac{x_C}{2}-x_B\Big)^2+\Big(\frac{y_C}{2}-0\Big)^2\\ &= \frac{1}{4}(x_C^2-4x_Bx_C+4x_B^2+y_C^2).\end{aligned}$$

Kako je $|AA_1|=|BB_1|$, to je

$$x_B^2+2x_Bx_C+x_C^2+y_C^2=x_C^2-4x_Bx_C+4x_B^2+y_C^2$$

odakle slijedi $x_B=2x_C$. Sada imamo

$$\begin{aligned}|BC|^2 &= (x_C-x_B)^2+(y_C-0)^2\\ &= x_C^2-2x_Bx_C+x_B^2+y_C^2\\ &= x_C^2-2\cdot 2x_C\cdot x_C+(2x_C)^2+y_C^2\\ &= x_C^2+y_C^2=|AC|^2,\end{aligned}$$

pa je trokut ABC jednakokračan s osnovicom $\overline{AB}$.

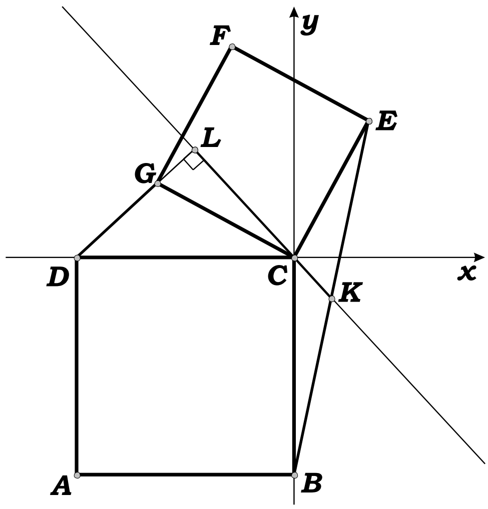
Zadatak 11. Kvadrati $ABCD$ i $CEFG$ imaju točku C zajedničku. Dokažite da su težišnice $\overline{CK}$ trokuta CBE i visina $\overline{CL}$ trokuta DCG kolinearne.

Rješenje. Neka je u pravokutnom koordinatnom sustavu xOy točka C u ishodištu, stranica $\overline{CD}$ leži na negativnom dijelu x-osi, a stranica $\overline{CB}$ na negativnom dijelu y-osi (Slika 4). Tada će točke B, D, E redom imati koordinate

$$B(0,-a),\quad D(-a,0),\quad E(b,c),$$

gdje je a duljina stranice kvadrata $ABCD$, a brojevi b i c takvi pozitivni realni brojevi da je duljina stranice kvadrata $GEFC$ jednaka $\sqrt{b^2+c^2}$. Ako je $G=(x_G,y_G)$, tada iz okomitosti pravaca

$$CG\ldots y=\frac{y_G}{x_G}x\quad \text{i}\quad CE\ldots y=\frac{c}{b}x$$



Slika 4.

zaključujemo

$$\frac{y_G}{x_G} \cdot \frac{c}{b} = -1$$

odnosno

$$y_G = -\frac{b}{c} x_G.$$

Iz $|CG| = \sqrt{b^2 + c^2}$ dobivamo

$$b^2 + c^2 = |CG|^2 = x_G^2 + y_G^2 = x_G^2 + \frac{b^2}{c^2} x_G^2 = \frac{b^2 + c^2}{c^2} x_G^2$$

odakle slijedi $x_G = -c$ jer je $x_G < 0$. Konačno, $y_G = b$ i stoga

$$G(-c, b).$$

Točka K je polovište dužine $\overline{BE}$ pa ima koordinate

$$K\Big(\frac{b}{2}, \frac{c-a}{2}\Big).$$

Koeficijenti smjera pravaca KC i DG su redom

$$k_{KC} = -\frac{a-c}{b}, \quad k_{DG} = \frac{b}{a-c}.$$

Kako je $k_{KC} \cdot k_{DG} = -1$, to su pravci KC i DG okomiti što znači da visina $\overline{CL}$ trokuta DCG leži na pravcu KC.

Zadatak 12. Neka je dan trokut ABC. Na pravcu AB odabrana je točka P tako da je $|BP| = |AB|$, na pravcu BC točka Q tako da je $|CQ| = |BC|$ i na pravcu CA točka R tako da je $|AR| = |CA|$. Dokažite da trokuti ABC i PQR imaju zajedničko težište.

Rješenje. Neka je $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3), P(x'_1, y'_1), Q(x'_2, y'_2)$ i $R(x'_3, y'_3)$. Težište T trokuta ABC ima koordinate

$$\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right),$$

a težište T' trokuta PQR koordinate

$$\left(\frac{x'_1 + x'_2 + x'_3}{3}, \frac{y'_1 + y'_2 + y'_3}{3}\right).$$

Kako je A polovište dužine $\overline{CR}$, to je

$$x_1 = \frac{x_3 + x'_3}{2}, \quad y_1 = \frac{y_3 + y'_3}{2},$$

odakle je

$$x'_3 = 2x_1 - x_3, \quad y'_3 = 2y_1 - y_3.$$

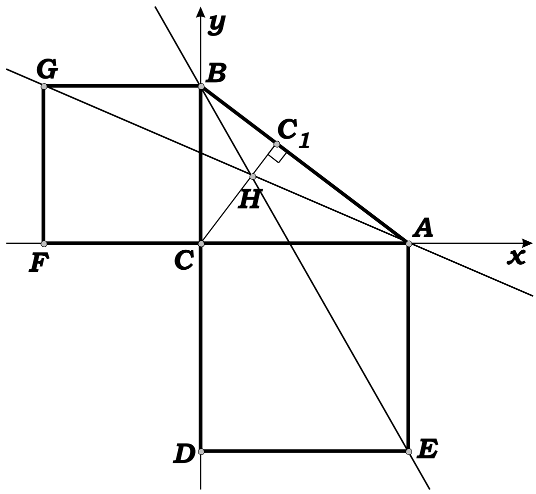
Analogno dobivamo

$$x'_1 = 2x_2 - x_1, \quad y'_1 = 2y_2 - y_1, \quad x'_2 = 2x_3 - x_2, \quad y'_2 = 2y_3 - y_2.$$

Tada je

$$\begin{aligned}
\frac{x'_1 + x'_2 + x'_3}{3} &= \frac{(2x_2 - x_1) + (2x_3 - x_2) + (2x_1 - x_3)}{3} \\
&= \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \\
\frac{y'_1 + y'_2 + y'_3}{3} &= \frac{(2y_2 - y_1) + (2y_3 - y_2) + (2y_1 - y_3)}{3} \\
&= \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3},
\end{aligned}$$

što znači da se točke T i T' podudaraju.



Slika 5.

Zadatak 13. Nad katetama $\overline{AC}$ i $\overline{BC}$ pravokutnog trokuta ABC konstruirani su (na vanjsku stranu) kvadrati $ACDE$ i $BGFC$. Dokažite da se sjecište pravaca AG i BE nalazi na visini $\overline{CC_1}$ trokuta ABC.

Rješenje. Neka su a i b duljine kateta trokuta ABC. Trokut smjestimo u pravokutni koordinatni sustav (Slika 5) tako da njegovi vrhovi imaju koordinate

$$A(b,0), \quad B(0,a), \quad C(0,0).$$

Točke D, E, F i G, prema uvjetima zadatka, imaju koordinate

$$D(0,-b), \quad E(b,-b), \quad F(-a,0), \quad G(-a,a).$$

Jednadžba pravca AG glasi:

$$y = -\frac{a}{a+b}x + \frac{ab}{a+b},$$

a pravca BE :

$$y = -\frac{a+b}{b}x + a.$$

Sjecište H pravaca AG i BE ima koordinate

$$\left(\frac{a^2b}{a^2+ab+b^2}, \frac{ab^2}{a^2+ab+b^2}\right).$$

Jednadžba pravca AB glasi:

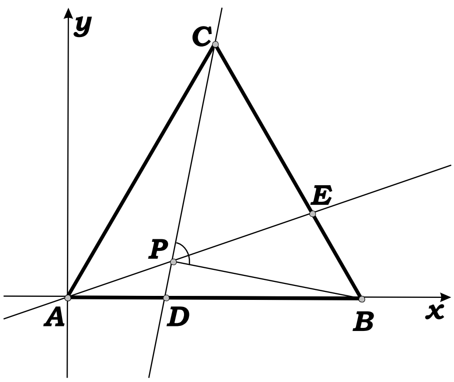
$$y = -\frac{a}{b}x + a,$$

pa je jednadžba pravca CC_1 :

$$y = \frac{b}{a}x.$$

Vidimo da koordinate točke H zadovoljavaju jednadžbu pravca CC_1, pa H leži na pravcu CC_1.

Zadatak 14. Dan je jednakostraničan trokut ABC. Na stranici $\overline{AB}$ odabrana je točka D, a na stranici $\overline{BC}$ točka E tako da je $|AD| = \frac{1}{3}|AB|$ i $|BE| = \frac{1}{3}|BC|$. Pravci AE i CD sijeku se u točki P. Odredite mjeru kuta $\sphericalangle BPC$.



Slika 6.

Rješenje. Neka je točka A ishodište pravokutnog koordinatnog sustava, točka B na pozitivnom dijelu osi x, a točka C u prvom kvadrantu (Slika 6). Tada je

$$A(0,0), \quad B(a,0), \quad C\left(\frac{a}{2}, \frac{a\sqrt{3}}{2}\right), \quad D\left(\frac{a}{3}, 0\right).$$

Iz uvjeta $|BE| = \frac{1}{3}|BC|$, koji je ekvivalentan sa $|BE| = \frac{1}{2}|EC|$, dobivamo

$$E\left(\frac{5a}{6}, \frac{a\sqrt{3}}{6}\right).$$

Odredimo jednadžbe pravaca AE i CD :

$$AE \dots y = \frac{\sqrt{3}}{5}x,$$

$$CD \dots y = 3\sqrt{3}x - a\sqrt{3}.$$

Njihovo sjecište P ima koordinate

$$P\left(\frac{5a}{14}, \frac{a\sqrt{3}}{14}\right).$$

Koeficijenti smjera pravaca PB i PC su redom

$$k_{PB} = -\frac{\sqrt{3}}{9}, \quad k_{PC} = 3\sqrt{3}.$$

Kako je

$$k_{PB} \cdot k_{PC} = -\frac{\sqrt{3}}{9} \cdot 3\sqrt{3} = -1,$$

to su pravci PB i PC okomiti, pa je $\sphericalangle BPC = 90^\circ$.

Zadatak 15. U jednakostraničnom trokutu ABC točka D nalazi se na stranici $\overline{BC}$ tako da je $|BC| = 3|CD|$. Neka je točka C_1 polovište stranice $\overline{AB}$. Pravac AD siječe visinu $\overline{CC_1}$ u točki P. Dokažite da kružnica sa središtem u P i polumjera $|CP|$ dodiruje stranicu $\overline{AB}$ trokuta ABC.

Rješenje. Smjestimo trokut ABC u pravokutni koordinatni sustav tako da mu vrhovi imaju koordinate

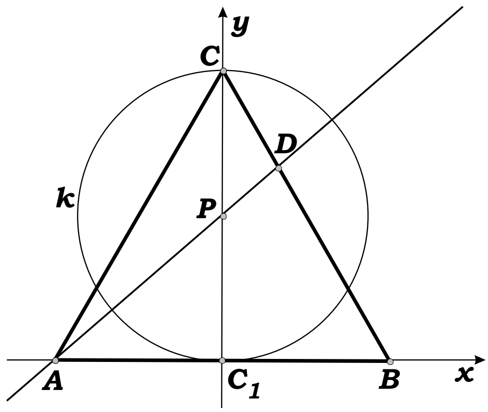
$$A(-a, 0), \quad B(a, 0), \quad C(0, a\sqrt{3}),$$

gdje je $2a$ duljina stranice tog trokuta (Slika 7). Točka C_1 ima koordinate $(0, 0)$. Iz uvjeta $|BC| = 3|CD|$ slijedi $|BD| = 2|DC|$, pa točka D ima koordinate

$$D\left(\frac{a}{3}, \frac{2a\sqrt{3}}{3}\right).$$

Jednadžba pravca AD glasi

$$y = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$



Slika 7.

Kako se točka P nalazi na tom pravcu i na visini $\overline{CC_1}$ trokuta ABC za koordinate točke P dobivamo

$$P\left(0, \frac{a\sqrt{3}}{2}\right).$$

Jednadžba kružnice k sa središtem u P i polumjera $|CP|$ glasi

$$x^2 + \left(y - \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2.$$

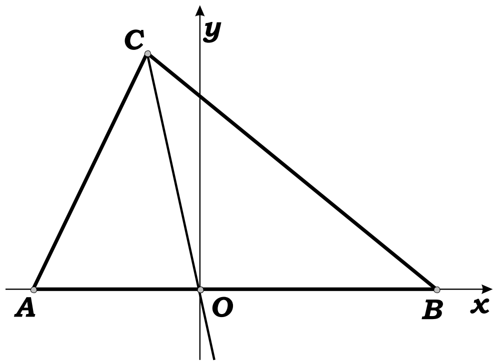
Jednadžba pravca AB je $y = 0$. Rješenje sustava kojeg čine jednadžba kružnice k i jednadžba pravca AB je jedinstveno: $x = 0, y = 0$. Dakle, kružnica k dodiruje stranicu $\overline{AB}$ i to u točki $(0,0)$ odnosno u točki C_1.

Zadatak 16. Dokažite da simetrala unutarnjeg kuta trokuta dijeli nasuprotnu stranicu u omjeru drugih dviju stranica.

Rješenje. Neka je ABC trokut. Uvedimo pravokutni koordinatni sustav xOy tako da je sjecište simetrale kuta $\sphericalangle ACB$ i stranice $\overline{AB}$ ishodište koordinatnog sustava, a stranica $\overline{AB}$ leži na x-osi (Slika 8). Stavimo $A(-m, 0)$, $B(n, 0)$, $C(p, q)$, gdje je $m > 0$, $n > 0$ i $q \neq 0$. Tada je

$$a = |BC| = \sqrt{(p-n)^2 + q^2},$$

$$b = |AC| = \sqrt{(p+m)^2 + q^2}.$$



Slika 8.

Jednadžba pravca AC je

$$qx - (m+p)y + mq = 0,$$

a pravca BC:

$$qx - (p-n)y - nq = 0.$$

Jednadžbe simetrala kutova između pravaca AC i BC su

$$\frac{q}{\sqrt{q^2+(m+p)^2}}x - \frac{m+p}{\sqrt{q^2+(m+p)^2}}y + \frac{mq}{\sqrt{q^2+(m+p)^2}}$$
$$\pm\left(\frac{q}{\sqrt{q^2+(p-n)^2}}x - \frac{p-n}{\sqrt{q^2+(p-n)^2}}y - \frac{nq}{\sqrt{q^2+(p-n)^2}}\right) = 0$$

odnosno

$$\left(\frac{q}{b}x - \frac{m+p}{b}y + \frac{mq}{b}\right) \pm \left(\frac{q}{a}x - \frac{p-n}{a}y - \frac{nq}{a}\right) = 0.$$

Nas zanima ona simetrala koja prolazi ishodištem. Za $x = y = 0$ gornja jednadžba postaje

$$\frac{mq}{b} = \pm\frac{nq}{a}$$

odnosno (zbog $q \neq 0$)

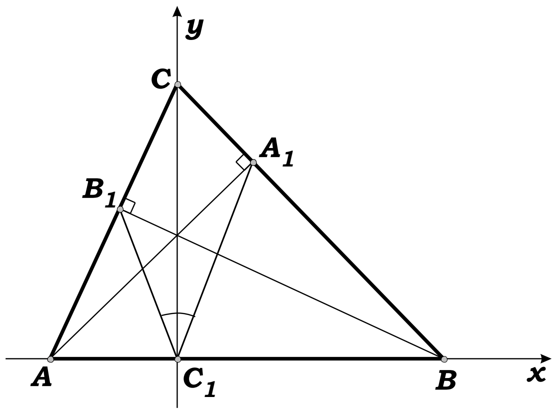
$$\frac{m}{b} = \pm\frac{n}{a}.$$

Kako su $m, n, a, b > 0$, uzimamo pozitivan predznak i zaključujemo

$$m : n = b : a,$$

što je i trebalo dokazati.

Zadatak 17. Nožišta visina trokuta ABC su vrhovi trokuta čije su simetrale kutova pravci na kojima leže visine trokuta ABC. Dokažite.



Slika 9.

Rješenje. Neka su A_1, B_1 i C_1 redom nožišta visina trokuta ABC povučenih iz točaka A, B i C. Smjestimo trokut u pravokutni koordinatni sustav xOy tako da je točka C_1 u ishodištu, a vrhovi A i B na x-osi. Tada je točka C na y-osi (Slika 9). Neka su koordinate vrhova trokuta: $A(-a, 0)$, $B(b, 0)$, $C(0, c)$. Dokažimo da je pravac CC_1 simetrala kuta $\sphericalangle B_1C_1A_1$.

Jednadžba pravca AC je

$$y = \frac{c}{a}x + c, \tag{2}$$

a jednadžba pravca koji prolazi točkom B i okomit je na pravac AC (dakle pravca BB_1) je

$$y = -\frac{a}{c}x + \frac{ab}{c}. \tag{3}$$

Riješivši sustav jednadžbi (2) i (3) dobivamo koordinate sjecišta tih pravaca:

$$B_1\left(\frac{a(ab-c^2)}{a^2+c^2}, \frac{ac(a+b)}{a^2+c^2}\right).$$

Napisavši jednadžbe pravca BC i pravca koji prolazi točkom A i okomit je na BC (pravca AA_1) te riješivši dobiveni sustav jednadžbi, nalazimo koordinate točke A_1 :

$$A_1\left(\frac{b(c^2-ab)}{b^2+c^2}, \frac{bc(a+b)}{b^2+c^2}\right).$$

Sada odredimo jednadžbe pravaca A_1C_1 i B_1C_1:

$$A_1C_1 \ldots \frac{c(a+b)}{c^2-ab}x - y = 0,$$

$$B_1C_1 \ldots \frac{c(a+b)}{ab-c^2}x - y = 0.$$

Ako stavimo

$$k = \frac{c(a+b)}{c^2-ab},$$

jednadžbe pravaca A_1C_1 i B_1C_1 postaju

$$A_1C_1 \ldots kx - y = 0,$$

$$B_1C_1 \cdots - kx - y = 0.$$

Simetrale kutova koje zatvaraju ti pravci imaju jednadžbe

$$\frac{kx-y}{\sqrt{k^2+1}} \pm \frac{-kx-y}{\sqrt{k^2+1}} = 0$$

odnosno $x = 0$ i $y = 0$. Kako je $x = 0$ jednadžba pravca CC_1, to je CC_1 zaista simetrala kuta $\sphericalangle B_1C_1A_1$. Analogno dokazujemo da su i pravci na kojima leže druge dvije visine trokuta ABC simetrale odgovarajućih kutova trokuta $A_1B_1C_1$.

Literatura

[1] A. G. Cipkin, A. I. Pinski, *Spravočnik po metodam rešenija zadač po matematike dlja srednei školi*, Nauka, Moskva, 1989.

[2] R. Đurković, *Riješeni zadaci iz matematike sa kvalifikacionih ispita na univerzitetima BiH*, Književna zajednica Drugari, Sarajevo, 1992.

[3] L. Geröes, *Érettségi-felveteli matematikapeldak,* Müszaki Komyvkiado, Budapest, 1992.

[4] Ž. Ivanović, L. Milin, *Matematiskop 7*, Naučna knjiga, Beograd, 1990.

[5] P. S. Modenov, *Zadači po geometrii,* Nauka, Moskva, 1979.

[6] O. Odvarko, E. Calda, J. Šedivy, S. Židak, *Metody rešeni matematickych uloh,* SPN, Praha, 1990.

[7] A. B. Vasilevski, *Obučenie rešenio zadač po matematike,* Visšaja škola, Minsk, 1988.