ISSN 1864-6168
UDK

IGRA ZATVORENIKOVA DILEMA U KOJOJ SUDJELUJE n IGRAČA

n-PLAYER PRISONERS' DILEMMA GAME

Damira Keček

Stručni članak

Sažetak: *U ovom radu prikazana je igra Zatvorenikova dilema s proizvoljnim brojem igrača. Opisana su svojstva igre te su definirane funkcije isplata koje ovise o omjeru broja igrača koji surađuju u igri i ukupnog broja igrača.*

Ključne riječi: *funkcija isplata, igra Zatvorenikova dilema, igra Zatvorenikova dilema s n igrača*

Professional paper

Abstract: *This paper provides an overview of the Prisoner's Dilemma game with an arbitrary number of players. The properties of the game are described and the payoff functions which depend on the ratio of the players who cooperate in the game and the total number of players are defined.*

Key words: *payoff function, Prisoners' Dilemma game, n-player Prisoners' Dilemma game*

1. UVOD

Igre u kojima sudjeluju samo dva igrača i u kojima svaki igrač ima na raspolaganju samo dvije strategije nazivaju se $2x2$ igrama. Igre Zatvorenikova dilema, Igra kukavice, Bitka spolova i druge $2x2$ igre pružaju temeljni model opisa konfliktnih situacija. Više o ovim igrama vidjeti u [1]. Najpoznatija $2x2$ igra je igra Zatvorenikova dilema koju su formulirali Merrill Flood i Melvin Dresher, kao model suradnje i konflikta, a ime i interpretaciju joj je dao Albert W. Tucker. Igra Zatvorenikova dilema je opisana pričom o dvojici zatvorenika optuženih za isti zločin. Svaki od zatvorenika može priznati i ne priznati zločin. Pojedini zatvorenik odlučuje, a k tome ne zna koju je odluku donio drugi zatvorenik. U $2x2$ igrama odluke igrača općenito predstavljaju suradnju i ne suradnju. U igri Zatvorenikova dilema surađivati znači ne priznati zločin, dok ne surađivati znači priznati zločin. Za svakog zatvorenika postoje četiri moguća ishoda. Sa četiri ishoda i dva igrača igra Zatvorenikova dilema potpuno je opisana s osam brojeva. Iznimno ekonomičan način praćenja koji je od osam brojeva dodijeljen kojem igraču, i u kojoj situaciji, dan je matricom isplata [2]. Matrica isplata daje sve informacije o igri. Retci u matrici odgovaraju strategijama prvog igrača, a stupci strategijama drugog igrača.

U simetričnim $2x2$ igrama, tj. u igrama u kojima igrači raspolažu istim skupom strategija i dobivaju iste isplate za iste strategije, matrica isplata može imati vrijednosti T, S, R i P [3]. Vrijednost S označava isplatu igraču koji surađuje, dok drugi igrač ne surađuje. Vrijednost T označava isplatu igraču koji ne surađuje, dok drugi igrač surađuje. Ako oba igrača surađuju, onda svaki igrač dobiva isplatu R. Ako oba igrača ne surađuju, onda svaki igrač dobiva isplatu P. Matrica isplata za igru Zatvorenikova dilema prikazana je u tabeli 1.

Tabela 1. Matrica isplata za igru Zatvorenikova dilema

		Drugi zatvorenik	
		Ne priznaje zločin	Priznaje zločin
Prvi zatvorenik	Ne priznaje zločin	(R, R)	(S, T)
	Priznaje zločin	(T, S)	(P, P)

Prva vrijednost unutar zagrade odgovara isplati prvom igraču, a druga vrijednost odgovara isplati drugom igraču. Npr., ako oba zatvorenika priznaju zločin, svaki zatvorenik dobiva isplatu P. Ako prvi zatvorenik ne prizna zločin, a drugi prizna, onda prvi zatvorenik dobiva isplatu S, a drugi isplatu T.

Igra Zatvorenikova dilema definirana je sljedećom relacijom:

$$S < P < R < T \tag{1}$$

U želji da igrač koji surađuje, a drugi igrač ne surađuje, dobije isplatu veću od vrijednosti S, dakle isplatu P, potreban mu je prelazak na strategiju nesuradnje. Ako igrač koji dobiva isplatu R, dakle isplatu za suradnju kada i drugi igrač surađuje želi dobiti više treba prijeći na strategiju nesuradnje da bi dobio veću isplatu, isplatu T. Igrač koji ne surađuje i dobiva isplatu P može dobiti veću isplatu, isplatu R, samo ako drugi igrač koji također ne surađuje prijeđe zajedno s njime na strategiju suradnje. Pod pretpostavkom da drugi igrač ne surađuje, prvom igraču je također isplativije ne surađivati, što slijedi iz nejednakosti $S < P$ relacije (1). Pod pretpostavkom da drugi igrač surađuje, prvom igraču je još uvijek isplativije da ne surađuje, što slijedi iz nejednakosti $R < T$ relacije (1).

Osim relacije (1) u igri Zatvorenikova dilema zahtijeva se i sljedeća nejednakost:

$$S + T < 2R \tag{2}$$

Nejednakost (2) se pretpostavlja kako bi uzajamna suradnja bila učinkovitija od naizmjenične suradnje i nesuradnje.

Tipičan primjer igre Zatvorenikova dilema je sljedeći: Policija privodi dvojicu osumnjičenika koje se tereti za isti zločin, nezavisno ih ispituje te od njih traži priznanje. Ako obojica zatvorenika priznaju, svaki će zatvorenik dobiti tromjesečnu kaznu. Ako ni jedan zatvorenik ne prizna, svaki će biti osuđen na mjesec dana zatvora. Ako jedan prizna zločin, a drugi ne, onda onaj zatvorenik koji prizna odlazi slobodan dok drugi dobiva jednogodišnju kaznu. Svaki zatvorenik je suočen s dvojbom priznati li ili ne priznati zločin. U ovoj igri isplate zatvorenicima, u ovom slučaju kazne, dane su matricom isplata koja je prikazana u tabeli 2.

Tabela 2. Matrica isplata za igru Zatvorenikova dilema iz primjera

		Drugi zatvorenik	
		Ne priznaje zločin	Priznaje zločin
Prvi zatvorenik	Ne priznaje zločin	$(-1,-1)$	$(-12,0)$
	Priznaje zločin	$(0,-12)$	$(-3,-3)$

Postavlja se pitanje koju strategiju bi svaki zatvorenik trebao izabrati, ponašajući se racionalno, ako oba zatvorenika žele provesti u zatvoru vrlo kratko. Pod pretpostavkom da prvi zatvorenik prizna zločin, drugi zatvorenik dobiva 12 mjeseci zatvora ako ne prizna zločin, odnosno tri mjeseca ako prizna zločin. U tom je slučaju za drugog zatvorenika bolje priznati zločin. Pod pretpostavkom da prvi zatvorenik ne prizna zločin, drugi zatvorenik dobiva jednomjesečnu kaznu ako ne prizna zločin, a ako prizna onda odlazi slobodan. I u ovom slučaju najbolje je da drugi zatvorenik prizna zločin. Gledajući s perspektive drugog zatvorenika vrijedi ista situacija. Stoga oba zatvorenika priznaju zločin i odlaze u zatvor na tri mjeseca. Rješenje igre, a koje se naziva još i ravnotežna točka je točka $(-3,-3)$. No, to rješenje nije najbolje rješenje za oba zatvorenika. Kada zatvorenici ne bi razmišljali i postupali racionalno, tj. kada ni jedan od njih ne bi priznao zločin, svaki od njih bi išao u zatvor samo mjesec dana.

2. ZATVORENIKOVA DILEMA S n IGRAČA

Igra Zatvorenikova dilema u koju je uključeno n igrača, $n > 2$, analizira situaciju u kojoj svaki od n igrača može ili ne mora surađivati s ostalim igračima. Kao rezultat izbora, svaki igrač dobiva isplatu koja ovisi o njegovom izboru, ali i o izborima svih ostalih igrača.

Zatvorenikova dilema s n igrača definira se na sljedeći način [4]:

(i) Svaki igrač ima na raspolaganju dvije strategije: strategiju suradnje i strategiju nesuradnje. Svaki igrač mora izabrati jednu od njih.
(ii) Bez obzira na izbor drugih igrača, igrač dobiva veću isplatu za nesuradnju nego za suradnju.
(iii) Igrači dobivaju manju isplatu kada svi ne surađuju, nego u slučaju kada svi igrači surađuju.

Spomenuta tri svojstva nisu dovoljna da bi se kreirala opća shema za igru Zatvorenikova dilema s proizvoljnim brojem igrača. U kreiranju igre s n igrača otvaraju se razna pitanja. Tako se npr. postavlja pitanje formiranja koalicije među igračima. Ako igrač ne zna druge igrače, ne može formirati koaliciju s njima. Ako i pozna sve igrače, nije nužno da može komunicirati s njima, a kamoli koalirati. Ključno pitanje za igrače je pitanje njihovih ciljeva. Je li cilj maksimalizirati isplatu, pobijediti konkurenciju, ponašati se kao većina ili neki drugi cilj? Igra se mijenja ako su ciljevi igrača različiti i u stvarnim situacijama igrači imaju različite ciljeve. Što se tiče jednopotezne ili ponavljajuće igre, interesantnija je ponavljajuća igra u kojoj igrači djeluju u više navrata na temelju svojih sposobnosti, na temelju položaja svojih susjeda i na temelju isplata dobivenih za svoje prethodne akcije. Ako u ponavljajućoj igri igrač odbije sudjelovati u nekim ponavljanjima, igra se znatno mijenja. Osobnost igrača je također jedna od važnijih karakteristika igre. Igrači različito reagiraju na iste poticaje iz svoje okoline. Osobnost se također pod utjecajem drugih igrača može promijeniti tijekom vremena. Više o problematici koja se javlja prilikom formiranja igre Zatvorenikova dilema s proizvoljnim brojem igrača vidjeti u [5].

2.1. Funkcije isplata

U igrama s n igrača isplate igrača se ne prikazuju pomoću matrice isplata već se prikazuju funkcijama isplata. U igrama u kojima sudjeluje n igrača i u kojima je uključena nedoumica u izboru preferencija javljaju se zanimljiva pitanja kada i zašto igrači surađuju, kako manipulirati igračima da surađuju i kako suradnja utječe na isplate. Primjer takve igre je upravo igra Zatvorenikova dilema. U nastavku su definirane funkcije isplata za igru Zatvorenikova dilema s n igrača.

Neka u igri Zatvorenikova dilema, u koju je uključeno n igrača, surađuje njih y, očito je $0 \le y \le n$. Neka je

$$x = \frac{y}{n} \tag{3}$$

omjer broja igrača koji surađuju i ukupnog broja igrača. Ako y igrača surađuje, onda $n - y$ igrača ne surađuje pa je omjer broja igrača koji ne surađuju i ukupnog broja igrača jednak:

$$\frac{n-y}{n} = 1 - \frac{y}{n} = 1 - x \tag{4}$$

Neka je s funkcija isplata za igrače koji surađuju, a d funkcija isplata za igrače koji ne surađuju. Označimo sa $s(x)$ isplatu igraču koji surađuje, a s $d(x)$ isplatu igraču koji ne surađuje. S obzirom na spomenute oznake svojstvo (ii) igre Zatvorenikova dilema s n igrača može se zapisati kao

$$d(x) > s(x). \quad (5)$$

Ako svi igrači surađuju, $(y = n)$, onda je $x = \frac{n}{n} = 1$, a kada ni jedan igrač ne surađuje, $(y = 0)$, onda je $x = \frac{0}{n} = 0$ pa se svojstvo (iii) može zapisati kao

$$s(1) > d(0). \quad (6)$$

Isplata svakog igrača ovisi o njegovom izboru, ali i o raspodjeli ostalih igrača između onih koji surađuju i onih koji ne surađuju. Funkcije isplata su dakle funkcije koje ovise o omjeru broja igrača koji surađuju i ukupnog broja igrača. Da bi se smanjio broj parametara, pretpostavlja se da su funkcije isplata linearne funkcije. Vrijednosti isplata T, S, R i P iz uvodnog dijela koriste se i u igri s n igrača. Tako vrijednost S označava isplatu igraču koji surađuje, dok svi drugi igrači ne surađuju, a vrijednost T isplatu igraču koji ne surađuje kad svi drugi igrači surađuju. Kada svi igrači surađuju, svaki igrač dobiva isplatu R, a kada ni jedan igrač ne surađuje, tada svaki igrač dobiva isplatu P. Prema vrijednostima isplata i omjeru x je

$$s(1) = R \quad (7)$$

i

$$d(0) = P. \quad (8)$$

Očito je da vrijednosti $s(0)$ i $d(1)$ nema smisla definirati. Međutim, da bi se što jednostavnije definirale funkcije isplata s i d te da bi se definirale za svaki $0 \leq x \leq 1$ stavlja se

$$s(0) = S \quad (9)$$

i

$$d(1) = T. \quad (10)$$

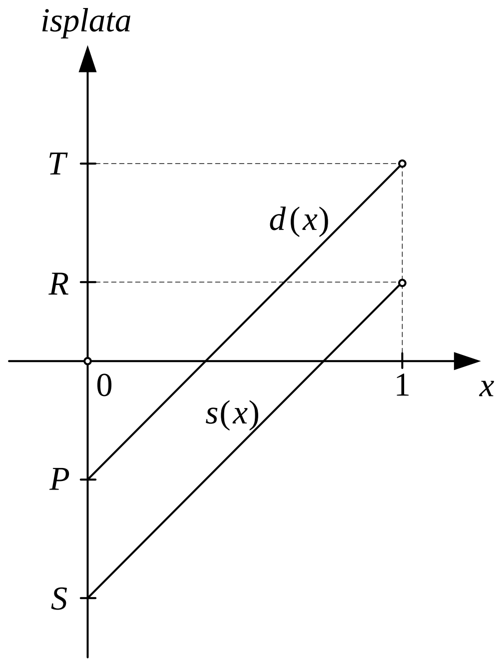
Prema (7) i (9), te pretpostavci o linearnosti funkcije isplata, funkcija isplata s glasi:

$$s(x) = (R - S)x + S \quad (11)$$

Nadalje, prema (8) i (10), te pretpostavci da je funkcija isplata linearna, funkcija d ima oblik:

$$d(x) = (T - P)x + P \quad (12)$$

Funkcije isplata s i d prikazane su na slici 1. Os x predstavlja omjer broja igrača koji surađuju i ukupnog broja igrača, a os y predstavlja isplate.



Slika 1. Funkcije isplata s i d

Ravnoteža u igri Zatvorenikova dilema u kojoj sudjeluje n igrača i u kojoj je x omjer igrača koji surađuju, a $1-x$ omjer igrača koji u isto vrijeme ne surađuju, javlja se kada igrači koji surađuju prime istu ukupnu isplatu kao i igrači koji ne surađuju [4], tj. kada vrijedi jednakost:

$$x \cdot s(x) = (1 - x) \cdot d(x) \quad (13)$$

Ako su s i d linearne funkcije oblika (11) i (12), tada jednakost (13) prelazi u kvadratnu jednadžbu

$$(R - S + T - P)x^2 + (S - T + 2P)x - P = 0 \quad (14)$$

a rješenja x_1 i x_2 kvadratne jednadžbe (14) takva da je $0 < x_1 < x_2 < 1$ su ravnotežna rješenja igre Zatvorenikova dilema s n igrača.

3. ZAKLJUČAK

Igra Zatvorenikova dilema s dva igrača može se, uz određene promjene, proširiti na proizvoljno mnogo igrača. Svaki igrač u igri Zatvorenikova dilema s proizvoljno mnogo igrača može surađivati ili ne surađivati s drugim igračima, a kao rezultat izbora dobiva isplatu iskazanu preko funkcija isplata. U ovom su radu funkcije isplata za igru Zatvorenikova dilema s n igrača definirane kao funkcije koje ovise o omjeru broja igrača koji surađuju i ukupnog broja igrača.

4. LITERATURA

[1] Shoham, Y.; Leyton-Brown, K.: Multiagent Systems: Algorithmic, Game-Theoretic, and Logical Foundations, Cambridge University Press, 2009.

[2] Robinson, D.; Goforth, D.: The Topology of the $2x2$ games. A new periodic table, Routledge Advances in Game Theory, Routledge/Taylor&Francis Group, New York, 2005.

[3] Rapoport, A.; Chammah A. M.: Prisoner's Dilemma, The University of Michigan Press, Ann Arbor, 2009

[4] Szidarovszky F.; Szilagyi M. N.: An Analytical Study of the N-Person Prisoners' Dilemma, Electronic Journal: Southwest Journal of Pure and Applied Mathematics, No. 2 (2002) 22-31

[5] Szilagyi M. N.: An Investigation of N-person Prisoners' Dilemmas, Complex Systems, Vol. 14, No. 2 (2003) 155-174

Kontakt autora:

Damira Keček, dipl. ing.
Veleučilište u Varaždinu
J. Križanića 33/6
42 000 Varaždin
damira.kecek@velv.hr