**math.e**

Hrvatski matematički elektronički časopis

Od koenigsberških mostova do kineskog poštara

problem kineskog poštara teorija grafova

Anka Golemac, Ana Mimica i Tanja Vučić
Prirodoslovno-matematički fakultet Sveučilišta u Splitu
golemac@pmfst.hr

2012

Od koenigsberških mostova do kineskog poštara

Sažetak

U članku se daje kratak osvrt na povijest teorije grafova i u tom kontekstu govori o rješavanju Problema kineskog poštara kao jednog o najpoznatijih problema kombinatorne optimizacije.

1 Što bilježe kroničari

Teorija grafova ima dosta precizne povijesne odrednice. Prvi rad iz teorije grafova je Eulerovo¹ rješenje pitanja šetnje koenigsberškim mostovima, objavljen 1736. godine, [5]. Prvu knjigu iz teorije grafova [8] napisao je 200 godina poslije D. Koenig², što se smatra početkom razvoja teorije grafova kao zasebne matematičke discipline. Koenig je dotadašnje rezultate objedinio i sistematizirao, navodeći popis od svega 110 objavljenih radova u kojima se eksplicitno pojavljuje pojam grafa. Među njihovom autorima su slavna imena poput G. Kirhhoff, A. Cayley i C. Kuratowsky. Od tada graf postaje općenito prihvaćen pojam. Sljedećih tridesetak godina jezikom grafova su postavljani i rješavani brojni zanimljivi problemi o čemu primjerice svjedoči popis od 1617 referencija iz teorije grafova objavljen u [14] 1964. godine.

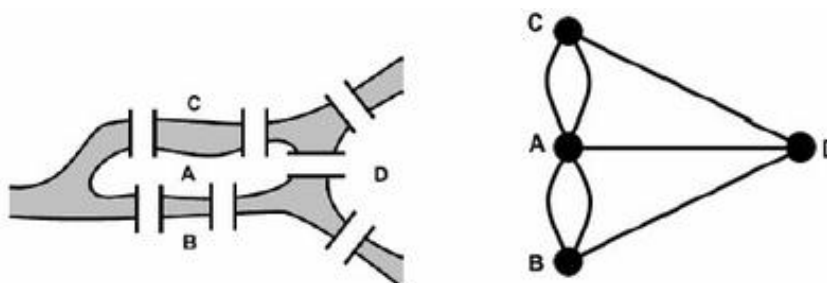
U 60-tim godinama dvadesetog stoljeća počinje snažan razvoj istraživanja u teoriji grafova i njenim primjenama koji traje do danas. U razdoblju od 1960. do 1970. broj godišnje objavljenih radova se više nego udeseterostručio. Danas imamo na desetine uglednih časopisa koji gotovo isključivo objavljuju članke iz teorije grafova i njenih primjena. Neobično intenzivan razvoj i veliku popularnost teorija grafova je doživjela zahvaljujući, izravno ili neizravno, naglom razvoju modernih informacijskih tehnologija. Jasna geometrijska predodžba koju graf sadržava i koja je bliska intuitivnom poimanju osobina i veza objekata predstavljenih grafom pridonijela je širokom spektru primjene grafova. S druge strane, grafovi postaju univerzalni matematički jezik kojim je moguće opisati najrazličitije, i sasvim apstraktne matematičke strukture.

Ovdje ćemo usmjeriti pozornost na dvije slavne teme: šetnje koenigsberškim mostovima i problem kineskog poštara.



Slika 1: Koenigsberški mostovi

Građani Koenigsberga (tada glavni grad pruskog kraljevstva, a poslije Kalinjingrad u Rusiji) zabavljali su se starim pitanjem mogu li prošetati svojim gradom tako da svaki od 7 mostova na rijeci Pregel pređu *točno jedanput* i završe šetnju u polaznoj točki, Slika 1. Leonhard Euler riješio je taj problem kao usputni zadatak na početku karijere vodećeg matematičara Ruske carske akademije u Petrogradu, gdje je 1733. godine dobio posao. Odgovor je bio nedvosmislen: takva šetnja nije moguća ako svaki dio kopna nije s ostalima povezan parnim brojem mostova. Matematički oblik te tvrdnje iskazan je Teoremom 2. Shematski prikaz na Slici 2, na kojem su dijelovi kopna (obale B i C i otoci A i D) predstavljeni točkama a mostovi njihovim spojnicama, prototip je modela koji će odrediti definiciju pojma grafa.



Slika 2: Shematski prikaz

Početakom 60-tih godina dvadesetog stoljeća kineski matematičar M. Guan (Meigu Guan ili Mei-Ko Kwan) postavlja i proučava pitanje optimizacije poštaraova puta pri dostavi pošiljki, [7]. Poštar kreće iz poštanskog ureda, dijeli poštu i vraća se u ured. Poštarov cilj je svakom ulicom proći barem jedanput i pri tome prijeći najkraći mogući put. U slučaju koenigsberških mostova analogan zadatak bi bio: prošetati gradom i vratiti se u polaznu točku prelazeći svaki most *najmanje jedanput* uz minimalan broj ponovljenih prelazaka. Guanovo pitanje doživjet će brojne modifikacije i imati raznovrsne primjene. Taj tip problema njemu u čast nazvan je Problem kineskog poštara, skraćeno **CPP** (engl. Chinese Postman Problem). Pod tim imenom je poznat kao jedan od najpopularnijih problema kombinatorne optimizacije. Optimizacijske probleme i kombinatorne probleme općenito relativno je lako formulirati, ali je njihovo rješavanje rijetko kada jednostavno. Za sustavno traženje rješenja potrebno je pronaći primjerene matematičke modele i metode. O matematičkim modelima motiviranim rješavanjem spomenutih problema govorimo u nastavku.

2 Malo o grafovima

Definicija 1. **Graf** je uređena trojka $G = (V, E, \varphi)$, gdje je $V = V(G)$ neprazan skup čije elemente nazivamo **vrhovima**, $E = E(G)$ je skup disjunktan s V čije elemente nazivamo **bridovima** i φ je funkcija koja svakom bridu e iz E pridružuje par $\{u, v\}$, ne nužno različitih vrhova iz V . Graf skraćeno označavamo $G = (V, E)$ ili samo G .

Vrhove u i v koji su pridruženi bridu e nazivamo **krajevima** brida e . Brid čiji se krajevi podudaraju nazivamo **petljom**. **Višestruki bridovi** su dva ili više njih s istim parom krajeva. Za par vrhova u i v kažemo da su **susjedni** ako postoji brid e kojemu su oni krajevi. Pri tome kažemo da je brid e **incidentan** s vrhovima u i v , za što ćemo upotrijebiti oznaku $e = \{u, v\}$ ili $e = uv$. **Stupanj** vrha v u grafu G je broj bridova grafa G incidentnih s v , pri čemu se svaka petlja računa kao dva brida. **Izolirani** vrh je vrh stupnja 0.

Šetnja u grafu G je niz $W := v_0 e_1 v_1 e_2 \dots e_k v_k$ čiji članovi su naizmjenično vrhovi v_i i bridovi e_i , tako da su krajevi od e_i vrhovi v_{i-1} i v_i , $i = 1, \dots, k$. Kažemo da je v_0 početak a v_k kraj šetnje W , da je W šetnja od v_0 do v_k ili (v_0, v_k) -šetnja. Šetnja se, kada to ne umanjuje jasnoću, skraćeno zapisuje samo bridovima $W = e_1 e_2 \dots e_k$. Šetnja se, kada to ne umanjuje jasnoću, skraćeno zapisuje samo bridovima $W = e_1 e_2 \dots e_k$. Šetnja se, kada to ne umanjuje jasnoću, skraćeno zapisuje samo bridovima $W = e_1 e_2 \dots e_k$. Šetnja se, kada to ne umanjuje jasnoću, skraćeno zapisuje samo bridovima $W = e_1 e_2 \dots e_k$. Šetnju kojoj su svi bridovi međusobno različiti nazivamo **stazom**. **Put** je staza čiji su vrhovi međusobno različiti. Dva vrha u i v grafa G su **povezana** ako postoji (u, v) -put u G . Graf je povezan ako su svaka dva njegova vrha povezana.

Eulerova staza je staza koja sadržava svaki brid grafa (točno jedanput!). **Eulerova tura** u grafu je zatvorena Eulerova staza. Ako graf dopušta Eulerovu turu kažemo da je **Eulerov graf**.

Odgovor na pitanje koji graf ima Eulerovu turu ili Eulerovu stazu daje sljedeći karakterizacijski teorem.

Teorem 2. *Povezani graf je Eulerov ako i samo ako mu je svaki vrh parnog stupnja. Povezani graf koji nije Eulerov sadržava Eulerovu stazu ako i samo ako ima točno dva vrha neparnog stupnja.*

Graf sa Slike 2, koji predstavlja koenigsberške mostove, ima sva četiri vrha neparnog stupnja. Na temelju Teorema 2 možemo ustvrditi da taj graf ne sadržava Eulerovu turu, ali ni Eulerovu stazu. Dakle, šetnja gradom koja prolazi svakim mostom točno jedanput nije moguća.

Rješavajući probleme "obilazaka gradskih ulica" nerijetko treba uzeti u obzir dodatni parametar kao što je "dopušteni smjer". Traženje matematičkog modela za slične probleme prirodno vodi pojmu usmjerenog grafa.

Definicija 3. **Digraf** ili **usmjereni graf** D je uređena trojka $D = (V, A, \psi)$, gdje je $V = V(D)$ neprazan skup čije elemente nazivamo **vrhovima**, $A = A(D)$ skup disjunktan s V čije elemente nazivamo **lukovima** i ψ funkcija koja svakom luku a iz A pridružuje uređeni par (u, v) , pri čemu $u, v \in V$ nisu nužno različiti. Kažemo da je u početak, a v kraj luka a , da je smjer ili orijentacija luka a od u prema v i koristimo oznaku $a = (u, v)$. Digraf skraćeno označavamo $D(V, A)$ ili samo D .

Pojmove koje smo imali kod grafova analogno definiramo za digrafove. Dva ili više lukova s istim početkom i krajem su **višestruki lukovi**. **Usmjereni šetnja** u digrafu D je niz $W := v_0 e_1 v_1 e_2 \dots e_k v_k$ čiji članovi su naizmjenično vrhovi v_i i lukovi e_i tako da je početak od e_i vrh v_{i-1} , a kraj mu je v_i , $i = 1, \dots, k$. Kažemo da je v_0 početak, a v_k kraj usmjerene šetnje W ili da je $W(v_0, v_k)$ usmjerena šetnja. Usmjereni šetnja je zatvorena ako je $v_0 = v_k$. Usmjereni šetnju kojoj su svi lukovi međusobno različiti nazivamo **usmjerenom stazom**. **Usmjereni put** je usmjerena staza čiji su vrhovi međusobno različiti. **Usmjereni Eulerov tura** je usmjerena zatvorena staza koja svaki luk digrafa sadržava točno jedanput. **Eulerov digraf** je onaj koji ima Eulerovu turu.

Pripadajući graf $G(D)$ digrafa D je graf dobiven zamjenom svakog luka $a = (u, v)$ bridom $e = \{u, v\}$. Digraf D je **slabo povezan** (kraće **povezan**) ako je pripadajući graf povezan, a **jako povezan** ako za svaka dva vrha $u, v \in V(D)$ postoje (u, v) i (v, u) usmjereni putovi. **Ulazni (izlazni) stupanj vrha** v digrafa je broj lukova kojima je v kraj (početak).

Eulerov digraf ima karakterizaciju analognu onoj koju za Eulerov graf daje Teorem 2.

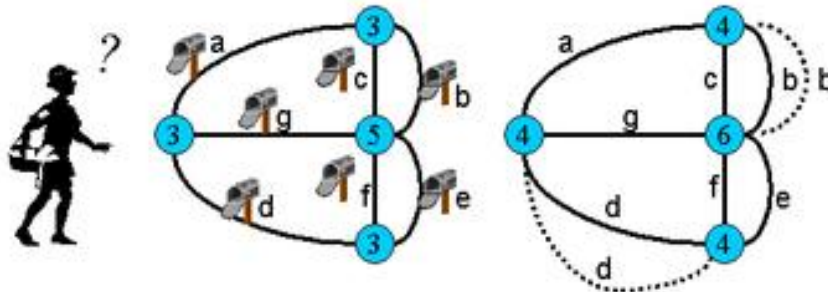
Teorem 4. *Povezani digraf je Eulerov ako i samo ako je za svaki njegov vrh ulazni stupanj jednak izlaznom.*

Smjer luka na skicama označavamo strelicom koja pokazuje od početka prema kraju luka. Jedan digraf prikazan je na Slici 4. Vidimo da taj digraf nije Eulerov jer ne zadovoljava uvjet o stupnjevima iz Teorema

4. Ako mu dodamo jedan luk (v, w) i jedan luk (z, y) , novi digraf će biti Eulerov.

Opširnije o spomenutim pojmovima i tvrdnjama može se naći u brojnim knjigama iz teorije grafova kao što su [6] ili [16].

3 Traženje rješenja za CPP



Slika 3: Poštarova tura

Vratimo se Problemu kineskog poštara na primjeru grafa za koenigsberške mostove, Slika 3. Pretpostavimo da je svaki brid u grafu ulica u kojoj treba isporučiti poštu, a vrh je mjesto gdje poštara može promijeniti smjer. Poštara mora proći svakom ulicom da bi isporučio poštu i želi minimizirati broj ponovnih prolazaka istom ulicom, koji se ne mogu izbjeći jer grafi nije Eulerov. Ponovni prolazak istom ulicom prikazujemo na grafu kao dodani (ponovljeni) brid. Nastali višestruki bridovi omogućuju da svaki vrh novog grafa bude parnog stupnja, odnosno dodavanjem bridova je izvršena "eulerizacija" grafa. U modificiranom grafu može se odrediti Eulerova tura. Na primjer, traženi poštarov obilazak za Eulerov grafi sa Slike 3 može biti $a b c b e f g d d$. U njemu se ponavljaju samo bridovi b i d .

Pri traženju najkraćeg poštarovog obilaska gradskih ulica treba uzeti u obzir parametre kao što su duljine ulica ili vrijeme potrebno za prolazak tim ulicama. Matematički model za ovaj i slične probleme je težinski grafi.

Definicija 5. Težinski grafi je uređeni par (G, ω) , gdje je G grafi i $\omega : E(G) \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ funkcija koja svakom bridu e iz G pridružuje nenegativni broj $\omega(e)$. Vrijednost $\omega(e)$ nazivamo **težinom brida** e .

Težine bridova težinskog grafa mogu predstavljati udaljenost, vrijeme, visinu nekih troškova i slično.

Definicija 6. Poštarova tura u grafu G je zatvorena šetnja koja uključuje svaki brid grafa G najmanje jednom. U težinskom grafu **optimalna poštarova tura** je poštarova tura kojoj je ukupna težina uključenih bridova minimalna.

Dakle, osnovni oblik CPP-a svodi se na traženje optimalne poštarove ture u težinskom grafu. Ako je grafi Eulerov, svaka Eulerova tura je optimalna poštarova tura pa je njenim pronalaskom problem riješen. Navest ćemo dva standardna algoritma za pronalaženje Eulerove ture, Fleuryjev i Hierholzerov. Pri tome ćemo se koristiti nekim pojmovima i oznakama iz teorije grafova koje do sada nismo spomenuli pa ih ovdje uvodimo.

Ako su G i H grafovi, $V(H) \subseteq V(G)$, $E(H) \subseteq E(G)$ i svaki brid iz H ima iste krajeve u H kao što ih ima u G , onda kažemo da je H **podgraf** od G . Neka je $G = (V, E)$ i $E' \subseteq E$. Podgraf od G čiji je skup vrhova V i skup bridova $E \setminus E'$ označavamo $G - E'$. Ako je $E' = \{e\}$, koristimo oznaku $G - e$.

Komponenta povezanosti grafa G je maksimalni povezani podgraf od G , tj. povezani podgraf koji nije sadržan ni u jednom drugom povezanom podgrafu. Za broj komponenti povezanosti grafa G koristimo se oznakom $c(G)$. **Rezni brid** u grafu G je brid $e \in E(G)$ za koji je $c(G - e) > c(G)$, tj. čijim se izostavljanjem povećava broj komponenti povezanosti.

Algoritam 1.

Fleuryjev algoritam

Ulaz: Eulerov graf G .

Izlaz: Eulerova tura C u grafu G .

Korak 1: Izabrati proizvoljni vrh $v \in V(G)$. Postaviti v za *tekući vrh* i $C := v$.

Korak 2: Označiti proizvoljni brid e koji je incidentan s *tekućim vrhom* i nije rezni brid te ga dodati stazi C . Samo ako nema drugih mogućnosti, za e uzeti rezni brid. Postaviti za *tekući vrh* drugi kraj brida e .

Korak 3: Izbrisati označeni brid iz G . Ako nema preostalih bridova: KRAJ; u suprotnom: povratak na Korak 2.

Hierholzerov algoritam traži Eulerovu turu u Eulerovom grafu bez provjere je li brid kojim prolazi rezni. Ovaj algoritam konstruira u grafu sukcesivno zatvorene staze čijim se spajanjem u konačnici dobije Eulerova tura.

Algoritam 2. Hierholzerov algoritam

Ulaz: Eulerov graf G .

Izlaz: Eulerova tura u grafu G .

Korak 1: Izabrati proizvoljni vrh $v \in V(G)$.

Korak 2: Konstruirati zatvorenu stazu C_0 u G s početkom u vrhu v . Postaviti $i := 0$.

Korak 3: Ako je $E(C_i) = E(G)$ (C_i Eulerova tura u G): KRAJ.

Ako je $E(C_i) \neq E(G)$, odabrati vrh $v_i \in C_i$ incidentan bridu $e \notin C_i$ i konstruirati zatvorenu stazu C_i^* u grafu $G - E(C_i)$ s početkom u vrhu v_i .

Korak 4: Spajanjem staza C_i i C_i^* konstruirati zatvorenu stazu C_{i+1} s početkom u vrhu $v_{i-1} \in C_i$; ići stazom C_i do $v_i \in C_i$, zatim preko svih bridova u C_i^* i potom svih preostalih bridova u C_i . Postaviti $i := i + 1$ i ići na Korak 3.

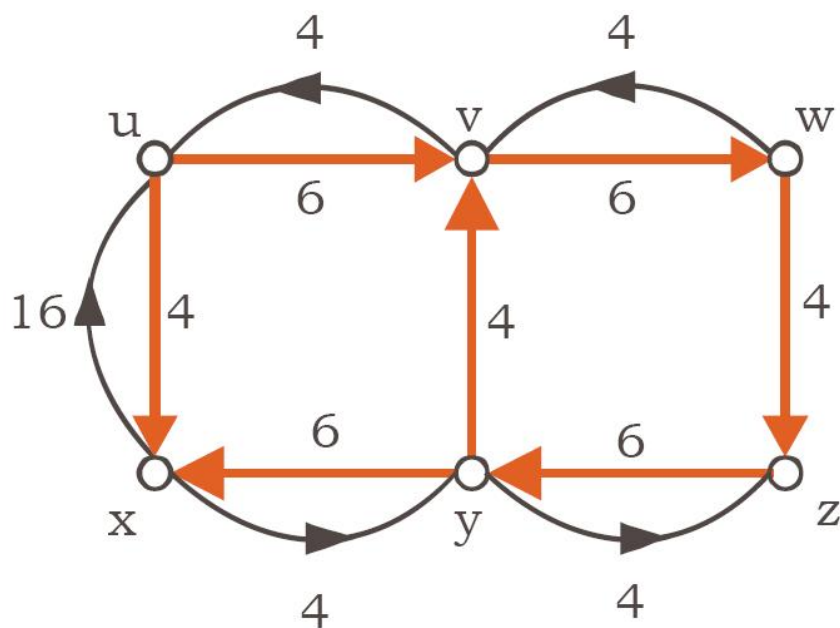
Ako graf nije Eulerov, dodavanjem ponovljenih bridova može se prevesti u graf koji ima Eulerovu turu, što je bila Guanova polazna ideja, [7]. Ta procedura provodi se takozvanim CPP algoritmom.

Sada, koristeći se Fleuryjevim algoritmom možemo naći Eulerovu turu u grafu. Polaskom iz vrha a imamo Eulerovu turu $a - b - c - g - d - e - f - g - e - g - b - a - f - a$. Budući da je to optimalna poštaraova tura, dobili smo traženo rješenje.

4 Varijacije problema

Kao što je rečeno, osnovni oblik CPP-a svodi se na traženje optimalne poštaraove ture u težinskom grafu. Pokazalo se da uz određene modifikacije ovaj model može postati način rješavanja velikog broja vrlo različitih optimizacijskih problema, o čemu govore brojne publikacije. Spomenut ćemo za ilustraciju [4], [9], [11] i [12].

Primjer 7. Poznati primjer primjene CPP-a je optimizacija rute za čišćenje ulica grada New Yorka, [2, 3]. Pretpostavimo da usmjereni graf na Slici 4 predstavlja mrežu jednosmjernih ulica. Težine lukova znače vrijeme potrebno za prolazak ulicom bez čišćenja. Lukovi su bojenjem podijeljeni u dvije klase; jedna boja (crvena) označava ulice koje treba očistiti, a druga ulice koje se mogu koristiti za prolazak. Zadatak je odrediti koja ruta minimizira ukupno vrijeme potrebno za čišćenje zadanih ulica, na način da se krene iz vrha z i završi u vrhu z .



Slika 4: Usmjereni graf

Za primjer smo mogli uzeti slučaj u kojemu se pojavljuju i jednosmjerne i dvosmjerne ulice. To upućuje na model koji će istovremeno imati bridove i lukove.

Definicija 8. Mješoviti graf je uređena trojka $M = (V, E, A)$, gdje je V skup vrhova, E skup bridova i A skup lukova.

S vremenom su, kroz primjene, nastale brojne verzije CPP-a vezane uz različite optimizacijske probleme. Glavne verzije su određene tipom modela. **Neusmjereni CPP** (UCPP-Undirected Chinese Postman Problem) za model ima težinski graf, **usmjereni CPP** (DCPP-Directed Chinese Postman Problem) modelira se u digraf, kao u Primjeru 7, a **mješoviti CPP** (MCPM-Mixed Chinese Postman Problem) za rješavanje upotrebljava mješoviti graf. Za svaku od ovih verzija postoje razne varijacije. Navodimo neke od njih, [9].

Problem ruralnog poštara (CRPP-Rural Postman Problem) je varijacija UCPP-a u kojoj se razmatra povezani težinski graf $G = (V, E)$ s podskupom $E' \subseteq E$ istaknutih bridova. Cilj je pronaći zatvorenu šetnju u G najmanje težine koja svaki brid $e \in E'$ prijeđe barem jednom. Ime problema dolazi iz prakse dostave pošte u ruralnim sredinama gdje postoje ulice u kojima nijedan stanovnik tog dana nema pošte, ali te ulice ipak mogu služiti kao poveznice među ulicama u koje tog dana treba dostaviti poštu.

Vjetroviti CPP (WPP-Windy Postman Problem) razmatra povezani težinski graf $G = (V, E)$ sa zadanim dvjema težinskim funkcijama. Težine svakog pojedinog brida mogu se razlikovati ovisno o smjeru prelaska brida ("s vjetrom u leđa" ili "protiv vjetra"). Cilj je pronaći zatvorenu šetnju u G najmanje težine koja svaki brid $e \in E$ sadržava barem jedanput.

Generalizirani CPP (GCPP-Generalized Chinese Postman Problem) modelira se u povezani težinski graf $G = (V, E)$ čiji je skup bridova E podijeljen u podskupove E_1, \dots, E_k . Potrebno je pronaći zatvorenu šetnju najmanje težine koja sadržava barem jedan brid iz svakog od podskupova E_1, \dots, E_k .

Mješoviti k-CPP (M k-CPP-Mixed k-Chinese Postman Problem) polazi od jako povezanog mješovitog težinskog grafa $G = (V, E, A)$ s istaknutim vrhom i zadanim brojem $k > 1$. Cilj je pronaći skup od k

mješovitih zatvorenih šetnji minimalne ukupne težine koje zadovoljavaju sljedeće uvjete:

- (a) svaka šetnja počinje i završava u istaknutom vrhu;
- (b) svaki brid sadržan je u barem jednoj šetnji.

Min-max k-CPP (MM k-CPP-*Min-Max k-Chinese Postman Problem*) kao polazište ima povezani težinski graf $G = (V, E)$ s istaknutim vrhom i zadanim brojem $k > 1$. Promatraju se svi skupovi od k zatvorenih šetnji koje zadovoljavaju uvjete (a) i (b). Među njima treba pronaći skup koji ima minimalnu težinu najteže šetnje.

Hijerarhijski CPP (HCPP-*Hierarchical Chinese Postman Problem*) razmatra povezan težinski graf $G = (V, E)$ čiji je skup bridova E podijeljen u nekoliko klasa između kojih je uspostavljen odnos prednosti. Ako klasa E_p ima veću prednost od klase E_q , onda bridovi iz E_p moraju biti prijeđeni prije onih iz E_q . U tom grafu treba pronaći zatvorenu šetnju minimalne težine koja prelazi svaki brid barem jedanput, tako da se poštuje odnos prednosti klasa.

Primjenjivost CPP-a u praksi, uključujući i područja visoko komercijalnih modernih tehnologija, potiče potragu za učinkovitim algoritmima i programskim alatima za njegovo rješavanje [1, 4, 10, 15]. Usmjereni CPP složeniji je od neusmjerenog, ali u osnovnoj verziji oba spadaju u probleme koji se rješavaju algoritmima polinomijalne složenosti. Mješoviti CPP još je zahtjevniji i pripada klasi NP-teških problema. Složenost i učinkovitost algoritama nova je tema koja izlazi iz okvira ovog rada. Više o njoj može se naći u [13].

Napomena. Članak je nastao pri izradi završnog preddiplomskog rada Ane Mimice na studiju Matematike PMF-a u Splitu. Mrežne stranice korištene su kao izvorik za slike.

Bibliografija

- [1] D. Ahr, *Contributions to Multiple Postmen Problems*, Ph.D. thesis, University of Heidelberg, 2004
- [2] E. Beltrami, *Models for Public Systems Analysis*, Academic Press, New York, 1977
- [3] L. Bodin, A. Tucker, *Model for municipal street sweeping operations*, Modules in Applied Mathematics Vol. 3: Discrete and System Models, (1983), 76-111
- [4] J. Edmonds, E. L. Johnson, *Matching, Euler tours and the Chinese postman*, Mathematical Programming, 5 (1973), 88-124
- [5] L. Euler, *Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis*, Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae, 8 (1736), 128-140
- [6] J. L. Gross, J. Yellen, *Graph Theory and Its Applications*, CRC Press, 1999
- [7] M. Guan, *Graphic Programming using odd and even points*, Chinese Mathematics 1, 1962
- [8] D. Koenig, *Theorie der endlichen und unendlichen Graphen*, Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1936.
Translated from German by Richard McCoart, *Theory of finite and infinite graphs*, Birkhäuser, 1990.
- [9] T. Kramberger, J. Žerovnik, *Priority Constrained Chinese Postman Problem*, Logistics & Sustainable Transport, Volume 1, Issue 1, 2007
- [10] B. Raghavachari, J. Veerasamy, *Approximation Algorithms for Mixed Postman Problems*, Lecture Notes in Computer Science, Volume 1412 (1998), 169-179
- [11] T. K. Ralphs, *On the Mixed Chinese Postman Problem*, School of Operations Research and Industrial Engineering, Cornell University, 1993
- [12] H. Robinson, *Graph Theory Techniques in Model-Based Testing*. Proc. of Int. Conf. and Exposition on Testing Computer Software (TCS '99), Washington (US), 1999
- [13] M. Sipser, *Introduction to the Theory of Computation*, 2nd Edition, Course Technology, 2006
- [14] *Theory of Graphs and Its Applications*, Proc. of the Simp. in Smolenice, Prague, 1964
- [15] H. Thimbleby, *The directed Chinese Postman Problem*, Software Practice & Exp., 33(11)(2003), 1081-1096
- [16] D. Veljan, *Kombinatorna i diskretna matematika*, Algoritam, Zagreb, 2001.

¹Leonhard Euler, švicarski matematičar (1707. – 1783.)

²Dénes Koenig, mađarski matematičar sa Sveučilišta u Budimpešti (1884. – 1944.)



ISSN 1334-6083
© 2009 **HMD**