math.e

Hrvatski matematički elektronički časopis

Pascalov trokut za t-dizajne

konačna geometrija Pascalov trokut t-dizajni

Anka Golemac, Danijela Šarac i Tanja Vučičić
Prirodoslovno-matematički fakultet Sveučilišta u Splitu
golemac@pmfst.hr

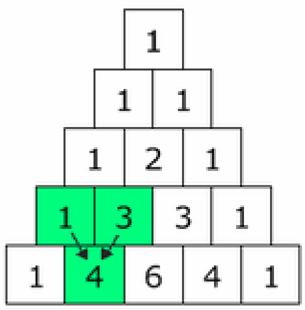
Sažetak

U članku se uvodi pojam presječnih brojeva t-dizajna kao broj blokova dizajna koji sadržavaju jedan zadani skup i disjunktni su s drugim. Dokazana je odgovarajuća rekurzija na temelju koje se presječni brojevi mogu rasporediti u trokutastu formu po analogiji s Pascalovim trokutom za binomne koeficijente.

1 Uvod

U literaturi se mogu pronaći brojni primjeri takozvanih numeričkih trokutova. Riječ je o rasporedu brojeva u trokutastu formu prema određenim zakonitostima. Takvi rasporedi sadržavaju zanimljive pravilnosti i često su povezani s rekreativnom matematikom, ali se mogu pojaviti i u ozbiljnim matematičkim teorijama i njihovim primjenama.

Pascalov trokut za binomne koeficijente vjerojatno je najpoznatija takva shema. Njegova konstrukcija, ilustrirana Slikom 1, temelji se na poznatoj rekurziji $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$, gdje su n i k nenegativni cijeli brojevi. Pascalov trokut za binomne koeficijente ima mnoge zanimljive pravilnosti i primjene. O tome postoje brojni tekstovi, kakvi su primjerice [3], [7] ili [8]. Ovdje govorimo o jednoj njegovoj analogiji vezanoj uz kombinatorne dizajne.



Slika 1: Pascalov trokut

2 $t-$ dizajni

Kombinatorna teorija dizajna, ili kraće teorija dizajna, je grana diskretne matematike. Za njen nastanak povijesno je važan primjer poznat kao Kirkmanov problem 15 učenica iz 1850. godine, a glasi ovako: Učitelj svakog dana šalje u šetnju svojih 15 učenica. One šeću u 5 grupa, u svakoj po 3. Može li se napraviti raspored šetnji za tjedan dana tako da svaka učenica u tih 7 dana bude točno jedanput u grupi sa svakom od preostalih učenica? U rješavanju ovog i niza drugih zanimljivih i praktičnih problema, u kojima postoje određeni prirodni zahtjevi o pravilnom rasporedu u konačnim skupovima, iskristalizirao se pojam blokovnih dizajna. Generalizaciju Kirkmanova problema riješili su neovisno Lu, Ray-Chaduri i Wilson [6], tek oko 110 godina kasnije.

Temeljni pojam teorije dizajna je **konačna incidencijska struktura**. Definiramo je kao trojku $\mathrm{S} = (\mathrm{P}, \mathrm{B}, \mathrm{I})$, koja se sastoji od dva disjunktna konačna skupa P i B, te skupa $\mathrm{I} \subseteq \mathrm{P} \times \mathrm{B}$. Elementi skupa P nazivaju se **točkama** i obično ih označavamo malim latiničnim slovima. Elementi skupa B nazivaju se **blokovima** i označavat ćemo ih velikim latiničnim slovima. Ako se uređeni par (p, B) nalazi u skupu I , kažemo da je točka p **incidentna** s blokom B ili da blok B sadržava točku p ili da se točka p nalazi na bloku B . Od posebnog interesa su incidencijske strukture s određenim stupnjem pravilnosti, koje se tradicionalno nazivaju **blokovnim dizajnima** ili jednostavno **dizajnima.**

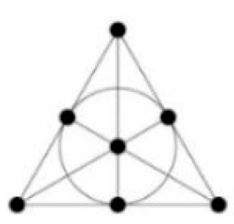
Definicija 1. *Incidencijsku strukturu* $\mathrm{D} = (\mathrm{P}, \mathrm{B}, \mathrm{I})$ *nazivamo* $\mathbf{t-(v,k,\lambda)}$ ***dizajnom*** *ili jednostavno* t***-dizajnom****, gdje su* t*,* v*,* k *i* λ *negativni cijeli brojevi, ako vrijedi:*
(1) $|\mathrm{P}| = v$ *;*
(2) svaki blok $B \in \mathrm{B}$ *incidentan je s točno* k *točaka;*
(3) svakih t *različitih točaka incidentno je s točno* λ *blokova.*

Brojeve t, v, k i λ nazivamo **parametrima** dizajna. Moguće je da različiti blokovi dizajna budu incidentni s istim skupom točaka, pa imamo takozvane **ponovljene blokove**. t-dizajn koji nema ponovljenih blokova nazivamo **jednostavnim**t-dizajnom} (engl. simple t-design). Za jednostavne t-dizajne ponekad je uputno poistovjetiti blok sa skupom točaka s kojima je incidentan. U tom slučaju možemo pisati $p \in B$ ili $B \ni p$ umjesto $(p, B) \in \mathrm{I}$ i skraćujemo oznaku $\mathrm{D} = (\mathrm{P}, \mathrm{B})$. Dizajni koje ovdje razmatramo su jednostavni, pa ćemo to razumijevati u daljnjem tekstu i izostavljati taj atribut. Također ćemo, iako u definiciji nije navedeno, razumijevati da je $0 \le t \le k$.

Uobičajeno je broj blokova dizajna označiti s b. Dizajn nazivamo **trivijalnim** ako je svakih k točaka incidentno s nekim blokom, odnosno ako je $b = \binom{v}{k}$. Netrivijalni 2-dizajn poznat je pod nazivom **uravnoteženi nepotpuni blok dizajn** (engl. balanced incomplete block design) ili kraće **BIBD**. Za 2-dizajn se često koristi i oznaka koja uključuje više parametara. Tada govorimo o $2-(b, v, r, k, \lambda)$ dizajnu. Parametar r označava broj blokova incidentnih jednoj točki dizajna. Parametri koje smo naveli nisu posve neovisni, a to ćemo naknadno i objasniti. Broj $n = r - \lambda$ nazivamo **redom** 2-dizajna. Ako je $t = \lambda = 1$, dizajn je particija skupa točaka u podskupove kardinalnosti k. Stoga su u ovom slučaju parametri ograničeni uvjetom da k mora dijeliti v. Od posebnog su interesa simetrični dizajni, u literaturi poznati pod kraticom SBIBD. **Simetrični dizajn** je $2-(v, k, \lambda)$ dizajn kod kojeg je $b = v$ (iz čega, kako ćemo naknadno vidjeti, slijedi da je $r = k$). Svaki njegov blok sadržava k točaka, a svaka točka sadržana je u točno k blokova.

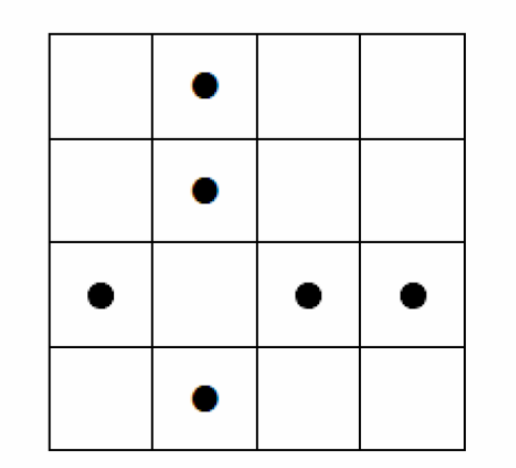
Za $t-(v,k,\lambda)$ dizajn ponekad se koristi oznaka, odnosno naziv, $S_\lambda(t,k,v)$ dizajn. Ako je $t \geq 2$ i $\lambda = 1$, onda se t-dizajn naziva **Steinerovim sustavom** ili Steinerovim t-dizajnom, i umjesto $S_1(t,k,v)$ pišemo $S(t,k,v)$. Kada se radi o $S(2,k,v)$ dizajnu, često se za blok koristi naziv **pravac** zbog geometrij\-ske analogije, jer bilo koje 2 točke određuju jedinstven blok.

Primjer 2. *(a) Neka je* $\mathrm{P} = \{1,2,3,4,5,6,7\}$ *i* $\mathrm{B} = \{\{1,2,3\},\{1,4,5\},\{1,6,7\},\{2,4,7\},\{2,5,6\},\{3,5,7\},\{3,4,6\}\}$ *. Tada* (P,B) *s prirodnom incidencijom čini* $2-(7,3,1)$ *dizajn. Dobro je poznat pod imenom* ***Fanova ravnina****. Očito se radi o Steinerovu sustavu. Obično se prikazuje kao na Slici 2.*



Slika 2: Fanova ravnona

(b) Razmotrimo shemu 4×4 *i neka je* P *skup 16 uređenih parova indeksa* (i,j) *te sheme. Za svaki* (i,j) *blok* B_{ij} *incidentan je sa 6 točaka* (i,k) *za* $k \neq j$ *i* (k,j) *za* $k \neq i$ *. Slika 3 prikazuje jedan blok. Vrijedi* $|\mathrm{B}| = |\mathrm{P}| = 16$ *. Svake dvije točke su incidentne s dva bloka, pa je* (P,B) $2-(16,6,2)$ *dizajn. Poznat je kao* ***dvoravnina*** *(*$\lambda = 2$ *)* ***reda 4****. Primijetimo da analogna konstrukcija* $n \times n$ *sheme za* $n \neq 4$ *rezultira samo* 1*-dizajnom.*



Slika 3: Blok B_{32}

(c) Simetrični dizajni s parametrima $2-(n^2+n+1, n+1, 1), n \geq 2$ *poznati su kao* ***projektivne ravnine reda*** n*. Za* $n = 2$ *imamo Fanovu ravninu.*
(d) Konačna ***afina ravnina reda*** n *je blok dizajn s parametrima* $2-(n^2, n, 1)$ *,* $n \geq 2$ *, a dobije se iz projektivne ravnine uklanjanjem jednog od pravaca i svih točaka tog pravca.*

Teorem 3. *Neka je* $\mathcal{D} = (\mathcal{P}, \mathcal{B})$ $t-(v,k,\lambda)$ *dizajn. Tada je za svaki cijeli broj* s *za koji vrijedi* $0 \le s < t$ *, broj* λ_s *blokova incidentnih s bilo kojih* s *različitih točaka dan formulom*

$$\lambda_s = \lambda \frac{(v-s)(v-s-1)\cdots(v-t+1)}{(k-s)(k-s-1)\cdots(k-t+1)} \,. \tag{1}$$

Posebno, $\mathcal{D}$ *je* $s-(v,k,\lambda_s)$ *dizajn za svaki* s *koji ima svojstvo* $1 \le s \le t$ *.*

\begin{Dokaz} Neka je S skup od s točaka, gdje je $0 \le s < t$, i m broj blokova koji sadržavaju svaku točku iz S. Neka je $\mathcal{T} = \{(T,B) | S \subset T \subseteq B, |T| = t, B \in \mathcal{B}\}$. Prebrojimo $\mathcal{T}$ na dva načina. Označimo s N broj parova (T,B). Skup T može se odabrati na $\binom{v-s}{t-s}$ načina, a svaki T je podskup od točno λ blokova $B \in \mathcal{B}$. Stoga je $N = \lambda\binom{v-s}{t-s}$. S druge strane, neka je m broj blokova koji sadržavaju S. Svaki blok B koji sadržava S sadržava $\binom{k-s}{t-s}$ t-članih skupova T za koje je $S \subset T$, pa je $N = m\binom{k-s}{t-s}$. Stoga dobivamo

$$\lambda\binom{v-s}{t-s} = m\binom{k-s}{t-s}, \text{ tj. } m = \lambda \frac{\binom{v-s}{t-s}}{\binom{k-s}{t-s}} \,, \tag{2}$$

što pokazuje da je m neovisan o S i dan je formulom (1).

\end{Dokaz}

Primijetimo da je $\lambda_0 = b, \lambda_1 = r$. Ako za λ uvedemo oznaku λ_t, pokaže se da brojeve λ_s jednostavno dobijemo koristeći se rekurzijom

$$\lambda_s = \frac{(v-s)}{(k-s)} \lambda_{s+1} \,. \tag{3}$$

Odavde za $s = 0$ dobivamo

$$bk = vr, \tag{4}$$

a za $t = 2$ i $s = 1$

$$r(k-1) = \lambda(v-1), \tag{5}$$

iz čega zbog (4) slijedi

$$\lambda v(v-1) = bk(k-1). \tag{6}$$

Dakle, parametri v, k, λ, b i r nisu neovisni. Specijalno, za simetrični dizajn vrijedi $k = r$ i $v = \frac{k(k-1)}{\lambda} + 1$.

Najmanji netrivijalni blokovni dizajn za $t = 2$ imamo kada je $\lambda = 1$ i $k = 3$. To je sustav trojki, takav da je svaki par točaka sadržan u točno jednoj trojci. Zbog (5) i (6) za $t = 2$ općenito vrijedi

$$\lambda v(v-1) \equiv 0 \pmod{k(k-1)}$$

$$\lambda(v-1) \equiv 0 \pmod{k-1},$$

pa se odmah vidi da za $\lambda = 1$ i $k = 3$ dobivamo $v \equiv 1 \pmod 6$ ili $v \equiv 3 \pmod 6$. Stoga v mora biti iz skupa $\{3, 7, 9, 13, 15, 19, 21, 25, 27, 31, \dots\}$. Da za svaki takav v postoji blokovni dizajn tipa $2-(v, 3, 1)$ dokazao je J. P. Kirkman još 1847. godine. Ovi dizajni poznati su pod nazivom **Steinerovi sustavi trojki.** Naziv se može činiti pomalo nepravednim jer je J. Steiner do Kirkmanova rezultata došao nekoliko godina poslije njega.

Već smo spomenuli Fanovu ravninu, koja je Steinerov sustav trojki za $v = 7$. Kirkmanov problem 15 učenica ekvivalentan je problemu egzistencije Steinerovog sustava trojki za $v = 15$, uz dodatni uvjet 'rastavljivosti' (engl. resolvable), tj. blokovi dizajna trebaju biti rasporedivi u klase tako da svaka točka pripada točno jednom bloku iz svake klase. Kod dizajna s ovim svojstvom v mora biti djeljiv s k, što u slučaju $2-(v, 3, 1)$ dizajna daje $v \equiv 3 \pmod 6$. Naravno, $v = 15$ zadovoljava taj uvjet.

3

Presječni brojevi $t-(v, k, \lambda)$ dizajna

U proučavanju t-dizajna od interesa su neka finija prebrojavanja blokova dizajna s obzirom na incidentnost s točkama zadanog skupa.

Teorem 4. *Neka je* $\mathcal{D} = (\mathcal{P}, \mathcal{B})$ $t-(v, k, \lambda)$ *dizajn i neka su* I *i* J *disjunktni podskupovi od* $\mathcal{P}$ *takvi da vrijedi*

$$|I| + |J| \leq t \ \backslash\backslash \text{ ili } \backslash\backslash \ \lambda = 1 \text{ i } I \cup J \text{ je sadržano u nekom bloku dizajna D.}$$

Tada je broj λ_i^j *blokova* B *koji sadržavaju* I *i disjunktni su s* J *određen kardinalnim brojevima* $i = |I|$ *i* $j = |J|$ *promatranih skupova. Točnije,*

$$\lambda_i^j = \lambda c(i, j, t, k, v) \tag{7}$$

i nenegativni cijeli broj $c(i, j, t, k, v)$ *ovisi samo o* i, j, t, k *i* v. *Štoviše,*

$$c(i, j) = c(i, j-1) - c(i+1, j-1), \tag{8}$$

gdje umjesto $c(i, j, t, k, v)$ *pišemo kraće* $c(i, j)$. *Ako vrijedi* $i + j \leq t$, *onda je*

$$\lambda_i^j = \lambda \frac{\binom{v-i-j}{k-i}}{\binom{v-t}{k-t}} . \tag{9}$$

\begin{Dokaz} Jednakosti (7) i (8) dokazat ćemo indukcijom po j. Provjerimo jednakost za $j = 0$. Ako je $|I| \leq t$, $\lambda_i^0 = \lambda_i$, tada po Teoremu 3 imamo

$$\lambda_i^0 = \lambda \frac{\binom{v-i}{t-i}}{\binom{k-i}{t-i}} . \tag{10}$$

Ako je $\lambda = 1$ i $t < |I| \leq k$, onda je $\lambda_i^0 = 1$. Neka je sada $j \geq 1$ i pretpostavimo da jednakosti vrijede za sve vrijednosti do $j-1$. Odaberimo točku $p \in J$ i neka je B blok koji sadržava I i disjunktan je s $J \backslash \{p\}$. Tada je ili $p \in B$ ili $p \notin B$ i stoga

$$\lambda_i^{j-1} = \lambda_{i+1}^{j-1} + \lambda_i^j. \tag{11}$$

Po pretpostavci indukcije slijedi

$$\lambda_i^j = \lambda c(i, j-1) - \lambda c(i+1, j-1) = \lambda c(i,j).$$

Time smo dokazali jednakosti (7) i (8).
Da bismo dokazali jednakost (9), dovoljno je uočiti da vrijednost $c(i,j)$ ne ovisi ni o zadanom dizajnu ni o vrijednosti λ. Dakle, dovoljno je promotriti trivijalni $t-(v,k,\lambda)$ dizajn čiji su blokovi svi k-podskupovi od P. Tada je očito

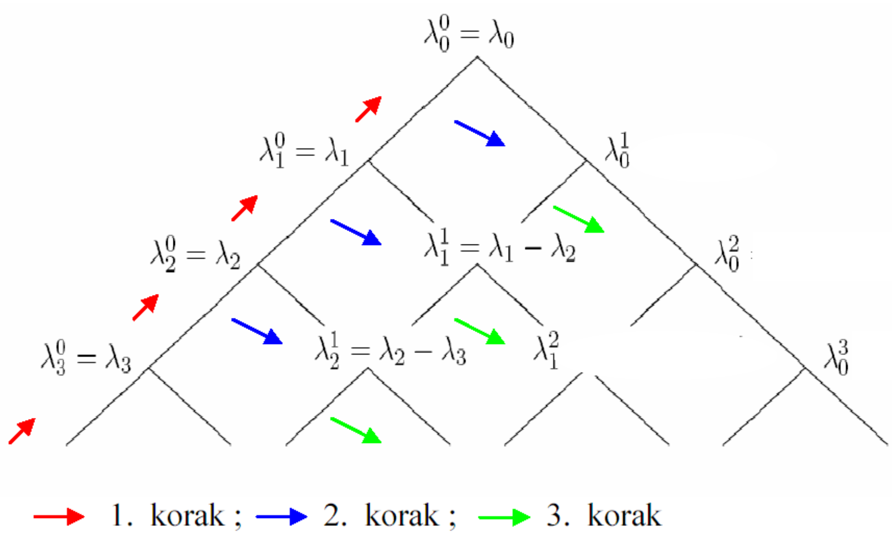
$$\lambda = \binom{v-t}{k-t} \text{ i } \lambda_i^j = \lambda c(i,j) = \binom{v-i-j}{k-i},$$

čime je jednakost dokazana.

\end{Dokaz}
Vrijednosti λ_i^j nazivamo (i,j) **presječni brojevi** $t-(v,k,\lambda)$ dizajna. Naglasimo da je $\lambda_0^0 = b, \lambda_1^0 = r$, $\lambda_s^0 = \lambda_s$, za $0 \leq s \leq t$, i $\lambda_t = \lambda$. U slučaju kada je D Steinerov sustav, dakle $t \geq 2$ i $\lambda_t = \lambda = 1$, vrijedi $\lambda_i^0 = 1$ za $t \leq i \leq k$.

Brojevi λ_i^j, $0 \leq i,j \leq t$ i $i+j \leq t$ mogu se posložiti u Pascalov trokut prikazan na Slici 4. Za Steinerov sustav trokut se može proširiti do $(k+1)$ -og retka. Zadnji redak čine presječni brojevi $\lambda_i^j, i+j=k$, dakle, $\lambda_k^0 = 1, \lambda_{k-1}^1, \lambda_{k-2}^2, \ldots, \lambda_0^k$, i znače broj blokova koji imaju točno i zajedničkih točaka.

Jednostavan način konstrukcije Pascalova trokuta za određeni dizajn započinje od donjeg lijevog vrha trokuta i ide prema gornjem vrhu rekurzijom $\lambda_s^0 = \lambda_s = \lambda_{s+1}(v-s)/(k-s)$. Potom se trokut popuni korištenjem rekurzije (11), tj. $\lambda_i^j = \lambda_i^{j-1} - \lambda_{i+1}^{j-1}$.



Slika 4: Pascalov trokut za dizajne

Primjerice, za Fanovu ravninu, koja jest Steinerov sustav, trokut ima $k+1=4$ retka koje dajemo u sljedećoj shemi.

```
         7
      3     4
   1     2     2
1     0     2     0
```

Za dvoravninu $2\text{-}(16,6,2)$ imamo trokut

```
      16
   6      10
2      4      6,
```

odnosno za bilo koji simetrični dizajn:

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & v & & \\
 & k & & v-k & \\
\lambda & & n & & v-k-n
\end{array}
.
$$

Kao ilustraciju pogledajmo još Pascalov trokut za $5-(24,8,1)$ dizajn, prikazan na Slici 5. Za sada na slici treba zanemariti isprekidanu crtu čije ćemo značenje objasniti poslije, vezano uz derivirani dizajn. Iz zadnjeg retka vidimo da se u bilo kojem dizajnu s parametrima $5-(24,8,1)$ dva bloka sijeku u 0, 2 ili 4 točke.

```
                                759
                            253     506
                        77      176     330
                    21      56      120     210
                5       16      40      80      130
            1       4       12      28      52      78
        1       0       4       8       20      32      46
    1       0       0       4       4       16      16      30
1       0       0       0       4       0       16      0       30
```

Slika 5: Pascalov trokut za $5-(24,8,1)$ dizajn

Za dani t-dizajn postoje s njim prirodno povezane strukture, koje u nekim slučajevima vode novom dizajnu. Spomenut ćemo neke od njih vezano uz presječne brojeve.

Neka je $\mathcal{S} = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, \mathcal{I})$ incidencijska struktura. Tada strukturu $\overline{\mathcal{S}} = (\overline{\mathcal{P}}, \overline{\mathcal{B}}, \overline{\mathcal{I}})$, gdje je $\overline{\mathcal{P}} = \mathcal{P}$, $\overline{\mathcal{B}} = \mathcal{B}$ i $\overline{\mathcal{I}} = \mathcal{P} \times \mathcal{B} \setminus \mathcal{I}$ nazivamo **komplementom** od $\mathcal{S}$. Ako je polazna struktura t-dizajn $\mathcal{D} = (\mathcal{P}, \mathcal{B})$ i incidencija standardna, onda je njegov komplement $\overline{\mathcal{D}} = (\mathcal{P}, \overline{\mathcal{B}})$ gdje je $\overline{\mathcal{B}} = \{\mathcal{P} \setminus B \mid B \in \mathcal{B}\}$.

Teorem 5. *Ako je $\mathcal{D}$ $t-(v,k,\lambda)$ dizajn takav da vrijedi $v-k \geq t$, onda je njegov komplement $\overline{\mathcal{D}}$ $t-(v, v-k, \bar{\lambda})$ dizajn, gdje je*

$$\bar{\lambda} = \lambda \frac{(v-k)(v-k-1)\cdots(v-k-t+1)}{k(k-1)\cdots(k-t+1)}.$$

\begin{Dokaz} Očito za presječne brojeve $\overline{\lambda_i^j}$ dizajna $\overline{\mathcal{D}}$ i presječne brojeve dizajna $\mathcal{D}$ vrijedi $\overline{\lambda_i^j} = \lambda_j^i$. Broj blokova dizajna $\overline{\mathcal{D}}$ koji sadržavaju t-podskup točaka je

$$\bar{\lambda} = \overline{\lambda_t^0} = \lambda_0^t = \lambda \frac{\binom{v-t}{k}}{\binom{v-t}{k-t}} = \lambda \frac{(v-k)(v-k-1)\cdots(v-k-t+1)}{k(k-1)\cdots(k-t+1)} \ \backslash.$$

\end{Dokaz}
Za 2-dizajne imamo $\bar{\lambda} = b - 2r + \lambda$. Komplement Fanove ravnine je simetrični $2-(7,4,2)$ dizajn, dvoravnina reda 2. Općenito, komplement simetričnog dizajna je simetrični dizajn.

Neka je $\mathcal{D} = (\mathcal{P}, \mathcal{B})$ $t-(v,k,\lambda)$ dizajn i $p \in \mathcal{P}$. Njegov **derivirani dizajn** s obzirom na p je struktura $\mathcal{D}_p = (\mathcal{P}_p, \mathcal{B}_p)$, gdje je $\mathcal{P}_p = \mathcal{P} \setminus \{p\}$ i
$\mathcal{B}_p = \{B \setminus \{p\} \mid B \in \mathcal{B},\ B \ni p\}$.

Lako se vidi da je $\mathcal{D}_p$ dizajn s parametrima $(t-1)-(v-1, k-1, \lambda)$. Označimo s μ_i^j presječne brojeve dizajna $\mathcal{D}_p$;$i+j \leq t-1$, odnosno $i+j \leq k-1$ za Steinerove sustave. Iz Teorema 4 slijedi $\mu_i^j = \lambda_{i+1}^j$.

Ova veza presječnih brojeva dizajna $\mathcal{D}$ i $\mathcal{D}_p$ ima za korisnu praktičnu posljedicu lako dobivanje Pascalovog trokuta dizajna $\mathcal{D}_p$ iz onoga za dizajn $\mathcal{D}$. Potrebno je iz trokuta za dizajn $\mathcal{D}$ jednostavno izostaviti brojeve λ_0^j, tj. brisati njegovu "desnu stranicu".

Vratimo se $5-(24,8,1)$ dizajnu $\mathcal{D}$. Derivirani dizajn $\mathcal{D}_p$ ima parametre $4-(23,7,1)$. Na Slici 5 naznačeno je isprekidanom crtom kako se iz Pascalova trokuta dizajna $\mathcal{D}$ dobije Pascalov trokut dizajna $\mathcal{D}_p$. Vidi se, među ostalim, da je broj blokova $4-(23,7,1)$ dizajna $\mu_0^0 = |\mathcal{B}_p| = 253$.
Uočimo li da je $253 = \binom{23}{2}$, možemo zaključiti da $4-(23,7,1)$ dizajn pripada skupini takozvanih gustih (eng. tight) dizajna. Naime, $2l-$ dizajn $(\mathcal{P}, \mathcal{B})$ naziva se $2l-$gustim ako ima svojstvo $|\mathcal{B}| = \binom{v}{l}$.

Koncept presječnih brojeva u teoriji dizajna ima relativno dugu povijest, počevši od ranih radova iz 70-ih godina dvadesetog stoljeća [4], [5]. Pored onih o kojima je ovdje bilo govora, postoje i drugi tipovi presječnih brojeva, odnosno različite modifikacije i generalizacije definicije koju smo naveli.

Ovaj koncept pokazao se korisnim u istraživanju $t-$ dizajna, posebice Steinerovih sustava, ali i srodnih struktura kao što su kodovi i grafovi. Informacije o tome mogu se pronaći u standardnoj literaturi iz ovih područja, primjerice [1] i [2].

Napomena. Članak je nastao pri izradi diplomskog rada D. Šarac na studiju Matematike i informatike PMF-a u Splitu.

Bibliografija

[1] E. F. Assmus Jr., J. D. Key: *Designs and their codes*, Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1992

[2] T. Beth, D. Jungnickel, H. Lenz: *Design theory*, Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1999

[3] T. Davis: *Exploring Pascal's Triangle*, 2010 http://www.geometer.org/mathcircles/pascal.pdf

[4] B. H. Gross: *Intersection triangles and block intersection numbers for Steiner systems*, Math. Z., 139(1974), 87-104

[5] N. S. Mendelsohn: *Intersection numbers of t-designs*, in Studies in Pure Mathematics (presented to Richard Rado), L. Mirsky, ed., Academic Press, London, 1971, 145–150

[6] D. K. Ray-Chaudhuri, R. M. Wilson: *Solution of Kirkman's schoolgirl problem*, Amer. Math. Soc., Providence, 1971

[7] Š. Šuljić: *Pascalov ili kineski trokut* , MiŠ, 21(2003), 26-30.

[8] D. Veljan: *Kombinatorna i diskretna matematika*, Algoritam, Zagreb, 2001.

ISSN 1334-6083