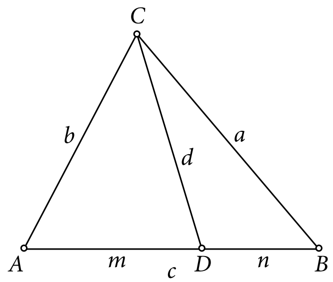
STEWARTOV TEOREM

Željko Hanjš, Zagreb

Često se u raznim zadatcima u školi spominju težišnice, simetrale kutova i visine trokuta. Može li se reći nešto o svakoj dužini koja spaja vrh trokuta sa suprotnom stranicom? Odgovor na to pitanje prvi je dao škotski astronom i matematičar **Stewart Matthew** (1717. - 1785.) koji se bavio i geometrijom. U jednom radu iz 1745. godine izveo je vezu između duljine dužine od vrha do neke točke na suprotnoj stranici, duljina dužina na koje ona dijeli tu stranicu i duljina dužina stranica trokuta.

Uz oznake kao na slici vrijedi sljedeća tvrdnja: $a^2m + b^2n = c(d^2 + mn)$.

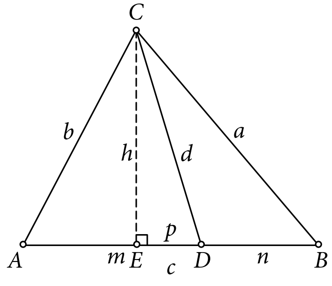


Da bismo dokazali tu tvrdnju, dovoljno je nekoliko puta primijeniti Pitagorin poučak.

Uvedimo uobičajene oznake u trokutu ABC, $|BC| = a$, $|CA| = b$, $|AB| = c$, $\overline{AA_1}$. Točka D dijeli dužinu $\overline{AB}$ na dva dijela, pri čemu je $|AD| = m$ i $|DB| = n$. Ne smanjujući općenitost, možemo staviti $m \geq n$. Nadalje, stavimo da je duljina visine na stranicu $\overline{AB}$ jednaka $|CE| = h$ i $|ED| = p$.

Da bismo dokazali gornju tvrdnju, izvest ćemo dvije pomoćne relacije. Promatrajmo najprije trokut CAD. Primjenom Pitagorinog poučka na trokut CAE dobivamo

$$|CA|^2 = |CE|^2 + |AE|^2 .$$



Kako je $|AE| = m - p$,

$$b^2 = h^2 + (m-p)^2. \qquad (1)$$

Analogno, primjenom Pitagorinog poučka na trokut CED dobivamo $|CD|^2 = |CE|^2 + |ED|^2$, tj. $h^2 = d^2 - p^2$.

Iz dviju posljednjih relacija je

$$b^2 = d^2 - p^2 + (m-p)^2, \text{ tj.}$$

$$b^2 = d^2 + m^2 - 2mp^2. \qquad (2)$$

Sada slično zaključivanje primijenimo na trokut CDB:

$$|BC|^2 = |CE|^2 + |EB|^2,$$

a kako je $|EB| = n + p$, slijedi

$$a^2 = h^2 + (n+p)^2. \qquad (3)$$

Uvrštavanjem ponovo $h^2 = d^2 - p^2$, iz (3) se dobiva

$$a^2 = d^2 - p^2 + (n+p)^2,$$

i napokon

$$a^2 = d^2 + n^2 + 2np. \qquad (4)$$

Sada ćemo iz (2) i (4) izvesti traženu tvrdnju.

Pomnožimo li relaciju (2) s n i (4) s m, dobit ćemo:

$$b^2n = d^2n + m^2n - 2mnp,$$

$$a^2m = d^2m + n^2m + 2mnp.$$

Zbrajanjem ovih jednakosti dobivamo

$$a^2m + b^2n = d^2(m+n) + nm(m+n).$$

Kako je $m + n = c$, imamo traženu jednakost $a^2m + b^2n = c(d^2 + mn)$.

Sada ćemo na nekoliko primjera pokazati kako se ova tvrdnja koristi u konkretnim situacijama.

Primjer 1. Ako su *a, b, c* duljine stranica trokuta, odredimo duljine njegovih težišnica.

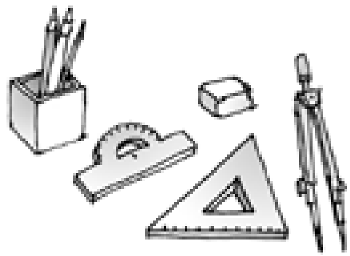
Rješenje: Označimo s $\overline{AA_1}$ težišnicu trokuta ABC, a s $t_a = |AA_1|$ njezinu duljinu.

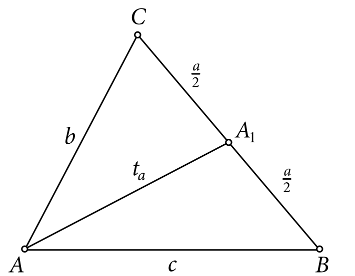
Prema Stewartovom teoremu, za vrh A, stranicu $\overline{BC}$ i njezino polovište A_1 vrijedi

$$|AB|^2 \cdot |A_1C| + |CA|^2 \cdot |BA_1| = |BC|(|AA_1|^2 + |BA_1| \cdot |A_1C|).$$

Kako je A_1 polovište stranice $\overline{BC}$, vrijedi $|BA_1| = |A_1C| = \frac{a}{2}$. Sada dobivamo

$$c^2 \cdot \frac{a}{2} + b^2 \cdot \frac{a}{2} = a\left(t_a^2 + \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2}\right).$$





Nakon sređivanja dobivamo

$$t_a^2 = \frac{b^2}{2} + \frac{c^2}{2} - \frac{a^2}{4} = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4}$$

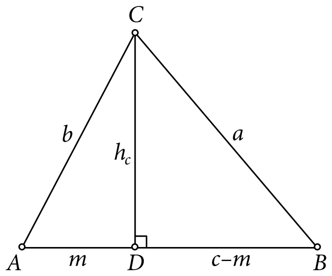
ili

$$t_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}.$$

Primjer 2. Duljine stranica trokuta ABC su *a, b, c*. Odredimo duljine njegovih visina.

Rješenje: Odredit ćemo duljinu visine v_c iz vrha *C*. Nožište D visine neka dijeli stranicu $\overline{AB}$ na dva dijela, duljinu m i $c - m$. Prema slici, po Pitagorinom poučku za trokute ADC i BDC imamo

$$h_c^2 = b^2 - m^2 = a^2 - (c - m)^2.$$



Odavde, sređivanjem, dobivamo

$$m = \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2c},$$

Uvrštavanjem u polazni izraz dobivamo

$$h_c^2 = b^2 - \left(\frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2c} \right)^2 = \frac{2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 - a^4 - b^4 - c^4}{4c^2},$$

i konačno

$$h_c = \frac{1}{2c}\sqrt{2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 - a^4 - b^4 - c^4}.$$

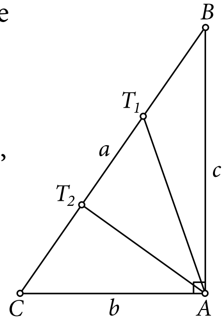
Analogno se dobivaju visine h_a i h_b.

Možete li jednostavnije dobiti ove formule pomoću Heronove formule za površinu trokuta?

Primjer 3. Dan je pravokutan trokut ABC s pravim kutom uz vrh A. Točke T_1 i T_2 dijele hipotenuzu $\overline{BC}$ na tri jednaka dijela. Dokaži da vrijedi jednakost

$$|AT_1|^2 + |AT_2| = \frac{5a^2}{9}.$$

Rješenje: Primjenom Stewartovog teorema na trokute BT_2A i T_1CA, kao na slici, dobivamo



$$|AB|^2 \cdot |T_1T_2| + |AT_2|^2 \cdot |BT_1| = |BT_2|(|AT_1|^2 + |BT_1| \cdot |T_1T_2|),$$

$$|AT_1|^2 \cdot |T_2C| + |AC|^2 \cdot |T_1T_2| = |T_1C|(|AT_2|^2 + |T_1T_2| \cdot |T_2C|).$$

Kako je ABC pravokutan trokut, vrijedi $a^2 = b^2 + c^2$. Uvrštavanjem imamo

$$c^2 \cdot \frac{a}{3} + |AT_2|^2 \cdot \frac{a}{3} = \frac{2a}{3}\left(|AT_1|^2 + \frac{a}{3}\cdot\frac{a}{3}\right) /\cdot \frac{3}{a}$$

$$|AT_1|^2 \cdot \frac{a}{3} + b^2 \cdot \frac{a}{3} = \frac{2a}{3}\left(|AT_2|^2 + \frac{a}{3}\cdot\frac{a}{3}\right) /\cdot \frac{3}{a},$$

$$c^2 + |AT_2|^2 = 2\left(|AT_1|^2 + \frac{a^2}{9}\right)$$

$$|AT_1|^2 + b^2 = 2\left(|AT_2|^2 + \frac{a^2}{9}\right).$$

Zbrajanjem ovih jednakosti dobivamo

$$\left(|AT_1|^2 + |AT_2|^2\right) + b^2 + c^2 = 2\left(|AT_1|^2 + |AT_2|^2\right) + \frac{4a^2}{9}, \text{ tj.}$$

$$|AT_1|^2 + |AT_2|^2 = \frac{5a^2}{9}.$$

Zadatci za vježbu

1. Znajući da simetrala kuta trokuta dijeli nasuprotnu stranicu na dvije dužine čiji je omjer duljina jednak omjeru duljina drugih odgovarajućih stranica, odredi duljine simetrala kutova unutar trokuta.
2. Duljine stranica trokuta su a, b, c, a nasuprotni kutovi α, β, γ. Poznato je da je $a = 4$ cm, $b = 5$ cm i $\gamma = 2\alpha$. Izračunaj duljinu stranice c.
3. Dokaži da je kvadrat duljine simetrale kuta trokuta jednak produktu duljina stranica koje zatvaraju taj kut, umanjenom za produkt duljina dužina na koje simetrala dijeli nasuprotnu stranicu.