Pojam vjerojatnosti i vjerojatnosnog prostora u srednjoškolskoj nastavi matematike

Ivana Fundurulić[1]
Tomislav Šikić[2]

1. Uvod

Ovaj rad nastao je na osnovi diplomskog rada „Problem uvođenja vjerojatnosti i vjerojatnosnog prostora u nastavi matematike prirodoslovno-matematičkih gimnazija" [4] obranjenog u travnju 2009. godine.

Većina ljudi ima neku predodžbu o značenju vjerojatnosti, stečenu putem igara „na sreću" kao što su, primjerice, loto, rulet, kockanje, itd. Također, većina će znati zaključiti da je prilikom bacanja novčića vjerojatnost da se pojavi pismo 50%, no već prilikom samo malo kompliciranijeg primjera to neće biti slučaj. Tako, na primjer, odrediti s kojom će se vjerojatnošću izvući dvije bijele kuglice (bez vraćanja) iz šešira u kojemu su bile 4 bijele i 2 crne kuglice jest zadatak koji će teško riješiti netko tko nije prošao neki vid nastave iz područja diskretne vjerojatnosti. Uzevši u obzir da je preduvjet za rješavanje takvih zadataka poznavanje osnova kombinatorike, očito je da se upravo takvim zadatcima njeguju matematički procesi koji su nužni za stvaranje matematičkih kompetencija i kompetencija koje se razvijaju matematikom. Sama teorija vjerojatnosti danas je sveprisutna, relevantna, ali također i teško razumljiva učenicima, pa je bitno razmisliti o tome kako je uvesti i obraditi u nastavi na što prihvatljiviji način.

Osnovna znanja iz područja kombinatorike i vjerojatnosti prenose se učenicima relativno rano, već od 7. razreda osnovne škole. Detaljnije proučavanje vjerojatnosti predviđeno je za 4. razred srednje škole i fakultet. Međutim, danas se jezik vjerojatnosti sustavno uvodi samo u nastavi prirodoslovno-matematičkih gimnazija. Budući da je u NOK-u [vidi http://www.matematika.hr/kurikulum], pod poglavljem „Podatci", u svim obrazovnim ciklusima - od najmlađe dobi, pa do završnog ciklusa (uključujući i srednje strukovne škole) - neprekidno zastupljena vjerojatnost, jasno je da se u budućim vremenima može očekivati puno veća zastupljenost vjerojatnosti u nastavnim programima.

[1]Ivana Fundurulić, Zagrebačka umjetnička gimnazija s pravom javnosti, Zagreb
[2]Tomislav Šikić, FER, Zagreb

U današnje su vrijeme učenici (izuzevši maturante matematičkih gimnazija) upoznati s više-manje intuitivnim poznavanjem vjerojatnosti, što je u dobroj mjeri ostavljeno savjesti samih nastavnika, pa nažalost o tom segmentu ne možemo ništa podrobnije reći. Prilikom uvođenja osnovnog jezika teorije vjerojatnosti, koje se, kao što smo već napomenuli, provodi još jedino matematičkim gimnazijama, kreće se od osnovnog pojma elementarnog događaja. Nakon toga se na prostoru elementarnih događaja definira vjerojatnosni prostor i vjerojatnost, uvodi se geometrijska vjerojatnost, uvjetna i potpuna vjerojatnost, te se prelazi na ponavljanje pokusa i zakon velikih brojeva. Dakle, zapravo se obrađuje većinom diskretna teorija vjerojatnosti.

U sveukupnom gradivu iz vjerojatnosti koje se predaje učenicima matematičkih gimnazija, s obzirom na udžbenike, najizraženije razlike u pristupu pojedinim pojmovima pojavljuju se prilikom definiranja vjerojatnosti i vjerojatnosnog prostora. Poglavlja koja slijede u udžbenicima (kao što su *uvjetna i potpuna vjerojatnost, nezavisnost i Bayesova formula*) prilično su ujednačeno obrađena, to jest, nisu uočene veće razlike između pristupa pojedinih autora tim područjima. Zbog toga je kao tema rada [4], a zatim i ovoga članka, odabrana usporedba pojedinih pristupa u tri udžbenika, s posebnim osvrtom na uvođenje pojma vjerojatnosti i vjerojatnosnog prostora. Odabrana su tri sljedeća udžbenika, poredana po godini izdanja:

- S. Kurepa, N. Sarapa, A. Kurepa, J. Hrnčević, **Matematika 4 za četvrti razred prirodoslovno matematičke gimnazije**, udžbenik i zbirka zadataka s rješenjima, Školska knjiga, Zagreb, 2001. (str. 186-377)
- N. Elezović, B. Dakić, **Matematika 4 – Brojevi, kombinatorika, vjerojatnost, nizovi**, Udžbenik i zbirka zadataka za 4. razred prirodoslovnih gimnazija, ELEMENT, Zagreb, 2003. (str. 91-167)
- S. Antoliš, A. Copić, **Matematika 4**, I. polugodište, udžbenik sa zbirkom zadataka za 4. razred prirodoslovno-matematičke gimnazije, Školska knjiga, Zagreb, 2006. (str. 129-228).

Sva tri spomenuta udžbenika nedvojbeno nude interesantne i kvalitetne pristupe spomenutoj tematici. No, upravo su razlike u njihovim konceptima predmet ovog članka i upravo one mogu biti interesantne nastavnicima s obzirom da nude mogućnost izbora u različitim situacijama. Već danas je moguće da dva susjedna razreda u istoj matematičkoj gimnaziji na različite načine prihvaćaju uvođenje pojmova teorije vjerojatnosti, a još veće razlike bit će vidljive kada se jezik vjerojatnosti vrati i u strukovne škole. Stoga autori ovoga članka vjeruju da je ovo zapravo početak rasprave o tome u kojem obliku vjerojatnost vratiti u sve učeničke klupe.

Udžbenici [1], [2], [3] (ili [6]) odabrani su kao reprezentativni, pa se na njima temelji spomenuti diplomski rad, a zatim i ovaj članak. Oni se kroz rad prate, uspoređuju, isprepliću i međusobno nadopunjuju. Stoga se i ostali udžbenici po konceptu mogu smjestiti u okruženje odabrana tri udžbenika.

Iako udžbenik [1] ima više različitih autora, u daljnjem tekstu navodit ćemo ga kao koncept ili udžbenik profesora Sarape, iz praktičnih razloga, te zbog toga što je jasno da je upravo prof. dr. sc. N. Sarapa bio zadužen za dio udžbenika posvećen vjerojatnosti.

1.1. Raznovrsnost pristupa

Prve prepreke pri objašnjavanju gradiva vjerojatnosti javljaju se već na samom početku. Uvođenje samog pojma vjerojatnosti i vjerojatnosnog prostora osnova je na kojoj se zasniva razumijevanje teorije vjerojatnosti, kako u srednjoj školi, tako i kasnije.

Definicija vjerojatnosnog prostora prema fakultetskom udžbeniku profesora Sarape (vidi [5], str.13) glasi:

„***Definicija***. *Uređena trojka* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, *gdje je* $\mathcal{F}$ $\sigma-$algebra *na* Ω *i P vjerojatnost na* $\mathcal{F}$, *zove se* ***vjerojatnosni prostor***."

Jasno je da je takva definicija prezahtjevna za srednjoškolsku razinu znanja. Za njezino je razumijevanje, naime, potrebno poznavanje mnogih pojmova kojih se učenici srednjih škola samo dotiču ili im se oni uopće ne spominju (primjerice $\sigma-$algebra skupova, izmjerivost prostora, prebrojivost, neprekidnost), te su im nepredočivi ili teško razumljivi (primjer: pojam višedimenzionalnog vektorskog prostora). Svakome od ovih pojmova pojedinačno, radi pravilnog shvaćanja navedene definicije, potrebno je posvetiti pažnju i vrijeme, što je teško ili nemoguće uskladiti s brojem sati predviđenim za obradu ovog dijela gradiva, te s učeničkom razinom znanja.

Nadalje, na ovu se definiciju veže niz propozicija koje u sebi sadrže još novih i učenicima djelomično razumljivih ili nerazumljivih pojmova (kao što su limes superior (i inferior), potpunost vjerojatnosnog prostora i vjerojatnosna mjera, n-dimenzionalnost i slično). Zbog svega navedenog nedvojbeno je da je „stroga" definicija vjerojatnosnog prostora neprimjerena za srednjoškolski uzrast. Tako smo suočeni s izazovom: kako matematički zahtjevnu definiciju približiti učenicima a da ne izgubimo previše od njezine egzaktnosti ili da ne promijenimo njezin smisao?

Kroz različite udžbenike predložena je nekolicina načina na koje možemo riješiti ili izbjeći ovu poteškoću.

Razmatranja možemo započeti proučavanjem srednjoškolskih udžbenika profesora Sarape [3], [6] kao najboljim primjerom primjene strogog matematičkog koncepta iz ove literature. Kroz intuitivno utemeljen uvod, potkrijepljen pokusima, učenici se upoznaju s pojmom prostora elementarnih događaja, te njegovim elementima. Ovakav početak jasan je i prirodan sa stajališta teorije vjerojatnosti, jer su elementarni događaji, te prostor elementarnih događaja, elementi koji se smatraju zadanima, odnosno osnovni pojmovi koji se ne definiraju (kao na primjer točka i pravac u planimetriji).

Nakon uvodnog dijela, profesor Sarapa aksiomatski zasniva vjerojatnost (pomoću aksioma Kolmogorova), a zatim definira uređenu trojku $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ odnosno sam vjerojatnosni prostor.

Razlika između fakultetskog udžbenika [5] i udžbenika za srednje škole [3], [6] odnosi se na ustupak da se zamijeni $\sigma-$algebra $\mathcal{F}$ s partitivnim skupom skupa Ω, $\mathcal{P}(\Omega)$. Na taj način izbjegnuto je definiranje algebre skupova, $\sigma-$algebra i izmjerivog prostora. Umjesto toga, u srednjoškolskoj definiciji pojavljuje se dodatan uvjet konačnosti skupa Ω.

Udžbenik profesorica Antoliš i Copić [1] uglavnom vjerno slijedi poredak i način definiranja profesora Sarape. Dakle, i na ovom mjestu možemo naći sve prilično jasno definirano i aksiomatski zasnovano. Gradivo koje nalazimo u ovom udžbeniku suženo je u usporedbi s gradivom udžbenika profesora Sarape, u skladu sa zahtjevima novog srednjoškolskog programa. Unatoč tome, smanjivanjem opsega iznesenih informacija, profesorice nisu izgubile na egzaktnosti ili preciznosti matematičke strukturizacije.

Što se tiče udžbenika profesora Dakića i Elezovića [2], njihov je pristup ovom problemu najpraktičniji. U njihovom je udžbeniku definicija vjerojatnosnog prostora u potpunosti izostavljena. Prisutna je, ipak, neka vrst definicije konačnog vjerojatnosnog prostora iz koje je vidljivo da ovi autori uređenu trojku $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ izjednačuju s prostorom elementarnih događaja Ω. Tom simplifikacijom učenici su pošteđeni učenja niza novih pojmova, čije je razumijevanje nužno za shvaćanje definicije vjerojatnosnog prostora, pa se obrađivanje ovog dijela gradiva vremenski znatno skraćuje, a učenicima se bitno olakšava njegovo shvaćanje. Značenje takvog, drugačije uvedenog vjerojatnosnog prostora (sada ekvivalentnog prostoru elementarnih događaja), u ovom je udžbeniku objašnjeno isključivo pomoću većeg broja primjera i zadataka.

Možemo zaključiti da posljednji pristup, iako ima svojih prednosti, znatno umanjuje preciznost oblikovanja same teorije, dajući prednost lakoći učeničkog razumijevanja i vremenskoj ograničenosti nad matematičkom aksiomatizacijom, što može dovesti do problema prilikom eventualnog produbljivanja i nadograđivanja gradiva tog područja u kasnijem obrazovanju. Odluku o tome koji od navedenih triju pristupa primijeniti u razredu i u kojoj mjeri istaknuti jedan na uštrb drugog - treba prepustiti samim srednjoškolskim nastavnicima. Nastavnik će se prilagoditi situaciji u razredu, pa nije nemoguće da čak u jednom razredu koristi parcijalno sva tri udžbenika (naravno da to nikako ne znači da bi učenici trebali kupiti sva tri udžbenika).

Sama struktura spomenutog diplomskog rada, pa i ovog članka, temelji se na udžbenicima profesora Sarape [3] (ili [6]) zato što oni najdosljednije prate [5]. Naravno, kroz cijeli se tekst provlače pristupi preostala dva udžbenika. To rezultira komparacijom, ali i interferencijom, odnosno nadogradnjom bazičnom pristupu.

U nastavku teksta dan je izbor i sažetak pojedinih poglavlja diplomskog rada koje su autori smatrali najinteresantnijima za čitatelja.

2. Slučajni pokusi

Prije samog aksiomatskog zasnivanja vjerojatnosti prilikom objašnjavanja gradiva u razredu, učenike se nastoji navesti (u skladu s pristupom u [3] , [6]) da neke vlastite spoznaje stave u okvire teorije vjerojatnosti. Zato se, prije svega, navode razmatranja utemeljena na intuitivnim predodžbama o vjerojatnosti u realnom svijetu koji nas okružuje. Također, učenike se nastoji podsjetiti na znanja stečena iz teorije skupova, a upoznaje ih se i s dvije klasične definicije vjerojatnosti. One im pomažu da steknu dojam o vjerojatnosti kao o matematičkom pojmu, te olakšavaju prijelaz na aksiomatsko zasnivanje vjerojatnosti.

U udžbeniku [1] na sličan način autorice uvode učenike u osnove teorije vjerojatnosti, također prilično vjerno slijedeći pristup profesora Sarape, iako u ponešto skraćenom obliku.

Autori udžbenika [2] , kao što je već spomenuto u uvodu, vjerojatnosni prostor uvode nešto slobodnije, pa je u njihovom udžbeniku prikazana svojevrsna sinteza intuitivnog i aksiomatskog pristupa.

2.1. Slučajni događaji. Prostor elementarnih događaja.

Pojam događaja

Prije definiranja pojma same vjerojatnosti potrebno je uvesti neke pomoćne pojmove kao što su *slučajan pokus, elementaran događaj, frekvencija događaja* i slično. Pojam elementarnog događaja u nastavi matematike najjednostavnije je uvesti nakon motivacije **pokusom**.

pismo	glava
卌 卌 卌	卌 卌 |||
15	13

Najčešće se uzima pokus bacanja simetričnog novčića (svima poznata igra „pismo-glava") ili pokus bacanja kocke. Navedeni pokusi ubrajaju se među stohastičke ili slučajne pokuse kod kojih ishod nije jednoznačno određen. Pretpostavka je ipak da će se rezultat takvog pokusa, ponavljanog dovoljno mnogo puta, podvrgavati određenim zakonitostima. Teorija vjerojatnosti bavi se upravo tim zakonitostima, odnosno određivanjem matematičkih modela takvih, slučajnih, pokusa (vidi [6] str. 7.).

Svaki ishod slučajnog pokusa nazivamo **elementarnim događajem** i označavamo ga sa ω. Tako su pri bacanju novčića elementarni događaji $\omega_1 = P$ i $\omega_2 = G$, gdje

P označava pismo, a G glavu. Pri bacanju kocke imamo 6 elementarnih događaja (pala je jedinica, pala je dvojka...), a svi elementarni događaji čine **prostor elementarnih događaja** (oznaka: Ω). Tako u pokusu bacanja kocke imamo $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Od elementarnih događaja, tj. od članova prostora elementarnih događaja, zatim možemo njihovim grupiranjem slagati nove, složene događaje, kao što bi na primjeru s kockom bio događaj A = {pao je paran broj} (definiranje prema [2]).

Ove je pojmove moguće objasniti i na drugi način (vidi [1], [3], [5]). Naime, možemo prvo uvesti prostor elementarnih događaja slučajnog pokusa Ω kao skup sa svojstvom da svakom ishodu pokusa odgovara točno jedan element tog skupa. Skup Ω, prema tome, prostor je elementarnih događaja samo ako postoji bijekcija svih ishoda pokusa na skup Ω. Elementarne događaje tada definiramo kao elemente odnosno točke skupa Ω. Tada možemo definirati događaj A kao podskup prostora elementarnih događaja $(A \subseteq \Omega)$, te konačno povoljan elementarni događaj ω skupa A kao svaki elementarni događaj koji pripada tom skupu $\left(A = \bigcup_{\omega \in A} \{\omega\}, \forall A \subseteq \Omega\right)$.

Napomenimo da poredak po kojemu definiramo ove osnovne pojmove nije posebno bitan; nije važno krećemo li od prostora elementarnih događaja Ω ili prvo definiramo njegove elemente. Naime, prilikom pravog, aksiomatskog zasnivanja teorije vjerojatnosti, neprazan skup Ω te njegovi elementi (točke) osnovni su pojmovi koji se smatraju zadanima, pa se prema tome uopće ne definiraju (vidi [3] strana 205.).

Ovo gradivo također možemo započeti relevantnijim i manje uvriježenim primjerom kao što je primjer „police životnog osiguranja" (vidi [1] strana 156.). Prilikom sklapanja ugovora s nekim osiguravajućim društvom osiguranik uplaćuje određenu svotu. U slučaju smrti osiguranika osiguravajuće društvo isplaćuje određenu premiju. Svota isplaćenog novca varira ovisno o dobi i spolu osigurane osobe, budući da je moguće izračunati vjerojatnost da osiguranik doživi određenu dob.

2.2 Operacije s događajima

U teoriji vjerojatnosti prostor elementarnih događaja Ω vezan uz neki slučajan pokus interpretiramo kao neprazan skup. Svaki ishod pokusa, odnosno svaki događaj, predstavljen je jednim ili više elemenata skupa Ω. Svaki događaj vezan uz promatrani pokus prema tome je također skup, te podskup skupa elementarnih događaja. Iz tog razloga odnose (operacije) među događajima prirodno je definirati pomoću operacija među podskupovima skupa Ω, pa u tu svrhu koristimo osnovna znanja teorije skupova. Prema tome, na ovom je mjestu nužno podsjetiti učenike na prethodno stečena znanja teorije skupova, te „prevesti" učenicima jezik teorije skupova na jezik teorije vjerojatnosti. U tu svrhu možemo promotriti tablicu koju u svojem udžbeniku prikazuje profesor Sarapa.

Oznaka	Jezik teorije skupova	Jezik teorije vjerojatnosti
Ω	Univerzalan skup	Prostor elementarnih događaja pokusa
	Skup svih ω	Siguran događaj
ω	Element $\omega \in \Omega$	Elementaran događaj
A	Podskup od Ω	Događaj A
$\varnothing$	Prazan skup	Nemoguć događaj
$A \subseteq B\ (A \subset B)$	A je (pravi) podskup skupa B	Događaj A povlači događaj B
$A \cup B$	Unija skupova A i B	Unija događaja A i B
$A \cap B$	Presjek skupova A i B	Presjek događaja A i B
$A \setminus B$	Razlika skupova A i B	Razlika događaja A i B
$A^C = \Omega \setminus A$	Komplement skupa A	Suprotan događaj
$A \cap B = \varnothing$	Skupovi A i B su disjunktni	Događaji A i B se uzajamno isključuju

Tablica 1. (vidi [3] str. 194. ili [6] str. 18.)

Iako je ovakva tablica najkraći i najprecizniji način prikaza interpretacije pojmova ovog područja, ona sama po sebi nije dovoljna. Naime, ovakav prikaz učeniku srednje škole on ne predstavlja mnogo. Zbog toga ga je potrebno popratiti primjerima i slikovitim zapisom (pomoću **Euler-Vennovih dijagrama**[3]), a u krajnosti i u potpunosti ispustiti. U tome se slažu autori svih proučavanih udžbenika; njihovi se pristupi ovom poglavlju u malo čemu razlikuju, pa se njima nije bilo potrebno detaljnije baviti.

3. Vjerojatnost kao relativna frekvencija. Klasične definicije vjerojatnosti

Frekvencija pokusa bitan je pojam vezan uz slučajan pokus koji smo ponavljali više puta (n puta), pri tome brojeći pozitivne ishode, tj. sve ishode u kojima se ostvario događaj A (čiji broj označavamo s n_A). Broj n_A nazivamo **frekvencija** događaja A, a broj $\frac{n_A}{n}$ **relativna frekvencija** događaja A. Treba razlikovati dva ekstremna slučaja: **siguran događaj** i **nemoguć događaj**.

[3]Euler-Vennovi dijagrami (vidi [2]) ili kraće Vennovi dijagrami (vidi [1], [3] ili [6]) način su slikovitog prikaza odnosa između skupova u sklopu teorije skupova, te odnosa među događajima u teoriji vjerojatnosti, u svrhu lakšeg razumijevanja učenika srednjih škola i fakulteta.

Siguran se događaj (Ω) ostvaruje pri svakom ishodu pokusa i relativna frekvencija mu je 1, a nemoguć se događaj ($\emptyset$) nikada ne može ostvariti, pa mu je prema tome relativna frekvencija 0. Tako prema definiciji relativne frekvencije možemo zaključiti da je promatramo na intervalu između 0 i 1: $0 \leq \frac{n_A}{n} \leq 1$. Prilikom velikog broja ponavljanja pokusa možemo uočiti da se relativne frekvencije grupiraju oko nekog fiksnog broja. To svojstvo nazivamo svojstvo **statističke stabilnosti relativnih frekvencija**.

Učenicima u razredu pojam frekvencije najlakše je uvesti pokusom. Uz pojam frekvencije vežu se i dvije klasične definicije vjerojatnosti, koje se razlikuju po načinu određivanja vjerojatnosti. Prvi način određivanja vjerojatnosti je račun koji se provodi **nakon** proučavanja rezultata nekog eksperimenta, odnosno predviđanja **iz iskustva**. Drugi način temelji se na pravilnosti koju uočavamo iz uvjeta pokusa **prije** njegovog izvođenja.

Definicija 1. Ako slučajni pokus ima svojstvo statističke stabilnosti relativnih frekvencija, tada se **vjerojatnost a posteriori** proizvoljnog događaja A vezanog uz taj pokus definira kao realan broj P(A) oko kojega se grupiraju relativne frekvencije $\frac{n_A}{n}$ tog događaja.

Dakle, za proizvoljan događaj A vrijedi: $0 \leq P(A) \leq 1$. Takvu vjerojatnost možemo nazvati i **eksperimentalnom vjerojatnosti**. Promotrimo primjer vezan uz navedenu definiciju.

Primjer 3.1. Kolika je vjerojatnost da će pri bacanju novčića ishod biti pismo, a koja da će to biti glava? Zašto? (primjer iz [1] str. 158)

Rješenje. Prema vlastitom iskustvu i bez puno razmišljanja većina će odgovoriti da je vjerojatnost ista i da ona iznosi 50%. Nudeći trenutan odgovor na pitanje pretpostavili smo odmah da je novčić simetričan, te da za pojavu pisma postoje isti uvjeti kao i za pojavu glave. No, je li to stvarno tako možemo provjeriti isključivo eksperimentom. Prema tome, tek nakon što pokus izvedemo n puta, te zabilježimo broj pojavljivanja pisma (ili glave) n_P (odnosno n_G), možemo stvarno odgovoriti na početno pitanje i to računanjem eksperimentalne vjerojatnosti događaja kao relativne frekvencije $\frac{n_P}{n}$ $\left(\text{tj. } \frac{n_G}{n}\right)$.

Definicija 2. Ako imamo slučajan pokus s konačno mnogo elementarnih događaja $\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n$ (tj. $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\}$) u kojem iz prirode uvjeta pokusa slijedi da su svi elementarni događaji jednako mogući, tada se **vjerojatnost a priori** nekog povoljnog događaja A vezanog uz taj pokus $(A \subseteq \Omega)$ definira sa[4]:

$$P(A) = \frac{k(A)}{k(\Omega)} = \frac{k(A)}{n} = \frac{\text{broj povoljnih elementarnih događaja za A}}{\text{broj svih mogućih elementarnih događaja}}.$$

[4] umjesto k (A) možemo pisati i card (A)→ vidi [2]

Budući da ova definicija u sebi sadrži pojam jednako moguć, odnosno jednako vjerojatan, ona je kružna, pa prema tome nije matematički u potpunosti korektna. Unatoč tome često se upotrebljava jer se zapravo većina srednjoškolskih zadataka rješava na osnovi gornje formule. *Vjerojatnost a posteriori* nazivamo još i **teorijskom vjerojatnošću**.

U ovome dijelu nije bitno inzistirati na nazivlju, nego se valja usredotočiti na razumijevanje samih pojmova i njihovo ispravno primjenjivanje u budućnosti.

Promotrimo zato primjenu definicije *vjerojatnosti a priori* na poznatom primjeru bacanja kocke.

Primjer 3.2. ([3] str. 195, [6] str. 11) Bacamo simetričnu kocku. Prostor elementarnih događaja ovog pokusa je Ω = {1, 2, 3, 4, 5, 6} i vrijedi $k(\Omega)=6$. Budući da smo pretpostavili da je kocka simetrična, iz toga možemo zaključiti da je vjerojatnost svakog pojedinog elementarnog događaja (pao je broj 1, pao je broj 2...) ista i iznosi $\underset{i=1..6}{P(\omega_i)}=\frac{1}{k(\Omega)}=\frac{1}{6}$. Ako želimo izračunati vjerojatnost događaja A = {na kocki je pao paran broj}, jasno nam je da je to događaj A = {2, 4, 6} za koji vrijedi da je k(A) = 3. Iz toga slijedi: $P(A)=\frac{k(A)}{k(\Omega)}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$.

Nazivlje iz gore navedenih definicija vjerojatnosti varira od udžbenika do udžbenika. Prema [3] , [6] govorimo o *vjerojatnosti a priori* odnosno *vjerojatnosti a posteriori*, dok u [1] autorice uvode paralelno nazivlje *eksperimentalna i teorijska vjerojatnost*. U [2] ovakav način uvođenja pojma vjerojatnosti u potpunosti je ispušten. Takav pristup također je prihvatljiv, što će biti razjašnjeno u idućem poglavlju ovog teksta. No, spominjanje ovih intuitivno jasnih definicija učenicima će olakšati razumijevanje i pojednostaviti kasnije aksiomatsko zasnivanje teorije vjerojatnosti.

4. Vjerojatnosni prostor

Nakon intuitivnog uvođenja nekih pojmova iz područja vjerojatnosti (sa ili bez spomenutih definicija) svaki se nastavnik u razredu treba pozabaviti uvođenjem pojma vjerojatnosnog prostora, te aksiomatski utemeljiti vjerojatnost. U svrhu odabira adekvatnog pristupa danoj situaciji u razredu za rješavanje te zadaće potrebno je osvrnuti se na sva tri udžbenika.

Na ovome mjestu možemo krenuti od udžbenika [2] u kojem je vjerojatnost definirana kao *„funkcija koja svakom događaju pridružuje realan broj"* (vidi str. 133.). Ta je definicija prilično općenita, pa je u ovom udžbeniku ona nadopunjena pomoću svojstava koja za nju vrijede (spominju se svojstva normiranosti, monotonosti i aditivnosti, te vjerojatnost komplementa i unije). Za razliku od udžbenika [1], [3], [6], ovdje nije istaknuta razlika između svojstava vjerojatnosti i aksioma koji je definiraju. Nisu izdvojeni aksiomi Kolmogorova, nego se i oni navode u obliku svojstava vjerojatnosti. Kolmogorovljev aksiom nenegativnosti zamijenjen je ograničavanjem kodomene funkcije vjerojatnosti, pa tako nadopuna definicije vjerojatnosti u ovom udžbeniku (str. 133.) glasi:

„Vjerojatnost je preslikavanje $P:\mathcal{F}\to[0,1]$ *definirano na algebri događaja* $\mathcal{F}$*, koje ima svojstva:*

1) $P(\Omega)=1, P(\varnothing)=0$ ***(normiranost)***

2) ako je $A\subset B$*, onda vrijedi* $P(A)\leq P(B)$ ***(monotonost)***

3) ako su A i B disjunktni događaji, onda je $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$ ***(aditivnost)***

Broj P(A) nazivamo ***vjerojatnost događaja A****."...*

...„Za svaki događaj A vrijedi $P(\overline{A})=1-P(A)$ ***(vjerojatnost komplementa)****"...*

...„Za bilo koja dva događaja A i B vrijedi $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$ ***(vjerojatnost unije)****"*

Može se, dakle, primijetiti da je, umjesto cijelog skupa ***R***, kodomena funkcije vjerojatnosti ovdje ograničena na segment [0, 1]. Nadalje, usporedbom s drugim udžbenicima - svojstva 1) i 3) - ove definicije možemo prepoznati kao dva preostala aksioma Kolmogorova, dok su svojstva monotonosti, te vjerojatnosti komplementa i unije u drugim udžbenicima obrađena na vrlo sličan način.

Što se tiče vjerojatnosnog prostora, autori udžbenika [2] taj pojam spominju tek u definiciji konačnog vjerojatnosnog prostora. Na tome mjestu (str. 134) oni navode:

„Vjerojatnosni prostor Ω*, koji posjeduje konačno mnogo elementarnih događaja, nazivamo konačni vjerojatnosni prostor. Označimo njegove elemente* $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,...,\omega_n\}$*. Događaj u ovakvom prostoru je svaki podskup od* Ω *"*

Iz rečenice citirane iz udžbenika, kao i popratnih primjera, može se iščitati interpretacija: $(\Omega,\mathcal{P}(\Omega),P)\cong\Omega$. Jasno je da ova jednakost formalno ne vrijedi, odnosno da ovakvo izjednačavanje nije matematički precizno. Kako se ono ne bi pojavilo u definiciji samog vjerojatnosnog prostora, ta je definicija u ovom udžbeniku elegantno preskočena.

Ovakav pristup opravdavaju zahtjevi praktičnosti i ekonomičnosti nastave. Njime se izbjegava uvođenje dodatnih pojmova; jednostavnije je količinu gradiva prilagoditi broju sati predviđenom nastavnim programom, a učenici gradivo lakše i brže shvaćaju, te objašnjenu teoriju gotovo trenutno mogu početi primjenjivati u zadatcima.

Ipak, s matematičke točke gledišta, ovakav pristup ima određenih propusta, od kojih je najveći stvaranje ozbiljnih poteškoća prilikom eventualnog daljnjeg nadograđivanja, produbljivanja i proširivanja gradiva. Stoga ćemo u idućem poglavlju pokazati kako je egzaktno definiran vektorski prostor u udžbenicima [1] i [3].

5. Aksiomi Kolmogorova

Budući da je u udžbeniku [2] izbjegnuto egzaktno definiranje vjerojatnosti i vjerojatnosnog prostora, jasno je da u tom udžbeniku pojmovi nisu aksiomatski definirani. Aksiomi Kolmogovora interpretirani su na razini važnih svojstava, pa u ovom poglavlju pratimo udžbenike [1] i [3].

Nakon što smo se upoznali s najelementarnijim pojmovima područja vjerojatnosti, te stekli neke intuitivne predodžbe o pojavama koje nas okružuju a vezane su uz vjerojatnost, ove zaključke treba matematički strukturirati, odnosno pridružiti im određene matematičke modele, te ih aksiomatski zasnovati.

Vjerojatnost aksiomatski zasnivamo pomoću aksioma Kolmogorova. Tim su aksiomima, na precizan način i strogo matematički, sažete spoznaje o funkciji vjerojatnosti do kojih smo i sami došli kroz prethodna poglavlja, promatrajući primjere u svijetu koji nas okružuje. Kolmogorovljevi aksiomi i danas su jedna od najvažnijih stavki zasnivanja teorije vjerojatnosti, pa ih je bitno ne samo navesti nego i posebno istaknuti njihovu važnost. Pomoću njih napokon možemo precizno definirati pojam vjerojatnosti kao funkcije *P*.

Definicija 3. Neka je Ω konačan neprazan skup, a $\mathcal{P}(\Omega)$ njegov partitivni skup. Funkcija $P:\mathcal{P}(\Omega)\to$ ¡ je vjerojatnost na Ω ako zadovoljava sljedeće aksiome:

A1. P je **nenegativna** funkcija, odnosno:
$P(A)\geq 0,\ \forall A\in\mathcal{P}(\Omega)$

A2. P je **aditivna** funkcija, tj. za bilo koja dva disjunktna podskupa A i B vrijedi:
$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$
$\big(\text{tj. } \forall A,B\in\mathcal{P}(\Omega), A\cap B=\varnothing \Rightarrow P(A\cup B)=P(A)+P(B)\big)$

A3. P je **normirana** funkcija, odnosno:
$P(\Omega)=1$.

Naravno, koristeći se gornjom definicijom možemo egzaktno uvesti pojam vjerojatnosnog prostora u srednjoj školi. Važno je primijetiti da je definicija dana za konačan skup Ω. Ako izuzmemo zadatke s geometrijskom vjerojatnošću, takva je definicija dovoljna za učenike srednje škole.

Definicija 4. Uređena trojka $(\Omega,\mathcal{P}(\Omega),P)$, gdje je Ω konačan neprazan skup, $\mathcal{P}(\Omega)$ njegov partitivni skup, a *P* vjerojatnost na Ω - zove se **vjerojatnosni prostor**.

Skup Ω naziva se **prostor elementarnih događaja**. **Elementaran događaj** je svaki jednočlani podskup skupa Ω, a svaki podskup A od Ω $(A\subseteq\Omega)$ zovemo **događajem**. Broj *P*(A) zovemo vjerojatnost događaja A za svaki A koji je podskup skupa Ω $(\forall A\subseteq\Omega)$.[5]

[5] Kao što je već spomenuto na više mjesta, elementi prostora elementarnih događaja, te sam prostor elementarnih događaja osnovni su objekti u teoriji vjerojatnosti, odnosno pojmovi koje smatramo zadanima, pa ih ne definiramo (kao primjerice točku i pravac u planimetriji).

Sada je moguće za proizvoljne događaje A i B u vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ koristiti pojmove *jednako vjerojatni i vjerojatniji*. Kažemo:

- da su oni jednako vjerojatni ako vrijedi $P(\mathrm{A}) = P(\mathrm{B})$
- da je događaj A vjerojatniji od događaja B ako vrijedi $P(\mathrm{A}) \geq P(\mathrm{B})$.

Naravno, u ovom se trenu definitivno mora gornje definicije potkrijepiti primjerima kako bi učenici shvatili značenje i važnost navedenih aksioma prilikom modeliranja nekog stvarnog problema iz života.

Primjer 5.1. ([3] str. 197, [6] str. 24) Imamo sanduk u kojemu se nalazi 500 jabuka, od kojih je 30 prezrelo. Zanima nas kolika je vjerojatnost da slučajnim izvlačenjem jedne jabuke iz sanduka izvučemo prezrelu jabuku.

Rješenje. Neka je Ω = {skup svih jabuka u sanduku} i A = {skup svih prezrelih jabuka u sanduku}. Tada je $k(\mathrm{A}) = 30$, a $k(\Omega) = 500$. Vjerojatnost izvlačenja prezrele jabuke iz sanduka omjer je ovih dvaju brojeva, pa ona iznosi: $P(A) = \frac{k(A)}{k(\Omega)} = \frac{30}{500}$.

Sada nas zanima skup nezrelih jabuka u sanduku. Označimo ga s B. Recimo da u sanduku ima 20 nezrelih jabuka, odnosno $k(B) = 20$. Sada možemo izračunati vjerojatnost događaja B = {skup svih nezrelih jabuka u sanduku}: $P(B) = \frac{k(B)}{k(\Omega)} = \frac{20}{500}$.

Nadalje, zanima nas vjerojatnost da izvučemo prezrelu ili zelenu jabuku iz sanduka. Događaj koji tražimo možemo matematički izraziti kao $A \cup B$. Budući da jabuka ne može istovremeno biti i prezrela i nezrela, zaključujemo da vrijedi: $A \cap B = \emptyset$.

Skupovi A i B su disjunktni, pa prema aksiomu aditivnosti A2. vrijedi: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{30}{500} + \frac{20}{500} = \frac{50}{500} = \frac{1}{10}$.

Na ovome primjeru lako je provjeriti i ostala 2 aksioma. Jasno je vidljivo da su brojevi $P(\mathrm{A})$, $P(\mathrm{B})$ i $P(A \cup B)$ nenegativni, dakle vrijedi A1, a izračunamo li $P(\Omega) = \frac{k(\Omega)}{k(\Omega)} = \frac{500}{500} = 1$, vidimo da vrijedi i aksiom normiranosti A3.

Osnovna svojstva vjerojatnosti javljaju se kao posljedica aksioma Kolmogorova u definiciji vjerojatnosti. Učenicima u razredu treba ih navesti, a zatim, ako je to vremenski izvedivo, i dokazati.

Dokaz svojstava (vidi [3], [6] ili [5]) provodimo pomoću aksioma Kolmogorova, te pomoću znanja stečenih iz teorije skupova. U udžbeniku [1] navedeni su aksiomi Kolmogorova, ali su prilikom nabrajanja izostavljena neka od svojstava vjerojatnosti. Unatoč tome, sva navedena svojstva su i dokazana. U udžbeniku [2] autori su se najmanje pozabavili ovom tematikom.

Budući da je u [2] vjerojatnost uvedena na temelju svojstava autori samo usput spominju nazive nekih svojstava (spominje se svojstvo normiranosti, monotonosti i aditivnosti). Također kao svojstva autori navode i vjerojatnost komplementa i vjerojatnost unije, te su izostavljeni aksiom nenegativnosti i neka svojstva kao i u [1].

Stav autora ovoga članka je da učenike nije potrebno zamarati dokazivanjem svih svojstava. Ipak, važno je istaknuti sva svojstva (te ih po potrebi objasniti i pomoću primjera, te slikovito) jer se ona često koriste prilikom temeljnih računanja vjerojatnosti.

6. Konstrukcija vjerojatnosnog prostora. Razni načini zadavanja vjerojatnosti

Želimo li riješiti problem vezan uz neki slučajan pokus matematičkim metodama, prvo što trebamo napraviti je pridružiti mu adekvatan matematički model vjerojatnosnog prostora $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ (aksiomatski uvedenog u poglavlju 4.). Zatim dotični pokus rješavamo unutar tog vjerojatnosnog prostora, koristeći se raznim svojstvima vjerojatnosti koja slijede iz aksioma Kolmogorova (poglavlje 4.) (vidi [3] str. 209 ili [6] str. 39).

Najvažniji problem s kojim se suočavamo u samoj teoriji vjerojatnosti upravo je konstrukcija vjerojatnosnog prostora, o čemu je bilo dosta govora i u prethodnom dijelu ovog članka. No, prije razmišljanja o adekvatnosti vjerojatnosnog prostora kao matematičkog modela slučajnog pokusa treba razjasniti strukturu same vjerojatnosti na Ω. Ovo je važna stavka pri proučavanju teorije vjerojatnosti, pa se njome u većoj ili manjoj mjeri bave autori svih promatranih udžbenika, a najdetaljniji prikaz nalazi se u udžbenicima [3] i [6].

TEOREM 1. Neka je $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\}$ prostor elementarnih događaja $(k(\Omega) = n)$. Svakoj vjerojatnosti na Ω pridružen je niz $p_1, p_2, \dots p_n$ nenegativnih realnih brojeva sa svojstvom $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$. Obratno, svakom nizu $p_1, p_2, \dots p_n$ nenegativnih realnih brojeva, čiji je zbroj jednak 1, pridružena je vjerojatnost na Ω.

Iako je u nekim udžbenicima naveden i dokaz ovog teorema [3], [6], mišljenja smo da u srednjim školama, prilikom obrađivanja ovog dijela gradiva, nije potrebno ići u tolike detalje. Za bolje shvaćanje ovog teorema prikladnije se, umjesto toga, poslužiti primjerima.

Primjer 6.1. (prema [3] str. 211, [6] str. 42) Vratimo se sada pokusu bacanja novčića. Prostor elementarnih događaja u ovom slučaju je: $\Omega = \{P, G\}$, gdje je: P = {palo je pismo}, a G = {pala je glava}.

a) Uzmimo npr. $P(P) = P(G) = \frac{1}{2}$. Tako definirana vjerojatnost zadovoljava aksiome Kolmogorova, a opisuje situaciju kada se radi o simetričnom novčiću.

b) Definirajmo sada drugu vjerojatnost na istom prostoru elementarnih događaja: $P_1(P)=\frac{1}{4}, P_1(G)=\frac{3}{4}$. Ovdje se radi o slučaju kada novčić nije simetričan, pa se glava pojavljuje tri puta češće od pisma.

Tako se javlja dilema: Kojem od ovih modela dati prednost? S aksiomatske strane, vjerojatnosti P i P_1 su ravnopravne. Provjeru možemo izvršiti tek na temelju promatranja. Ukoliko je novčić simetričan, bolji će model biti vjerojatnosni prostor pod a). Ako novčić nije simetričan, možda će drugi model biti prikladniji. Po tome pitanju profesor Sarapa u svojem udžbeniku zaključuje:

„*...da se teorija vjerojatnosti* ***ne bavi*** *razjašnjavanjem pitanja o adekvatnosti konstrukcije vjerojatnosnog prostora koji modelira slučajni pokus. Njezina je zadaća da u okviru* ***gotovog modela****, koji obično predlaže eksperimentator****, primijeni matematičke metode*** *za računanje vjerojatnosti raznih događaja. Matematička statistika je nauka koja se bavi problemima u vezi s tim da li modeli koje predlažu eksperimentatori adekvatno opisuju slučajne pokuse.*" ([3] str. 212, [6] str. 42)

7. Zaključak

Gradivo teorije vjerojatnosti nije jednostavno, te predstavlja problem i učenicima i profesorima. Svaki na svoj način, autori promatranih udžbenika nastoje olakšati razumijevanje ove tematike. Profesor Sarapa kroz svoje je udžbenike [3] i [6] našao rješenje u preciznoj matematičkoj fundaciji, dok su profesori Dakić i Elezović veću važnost pridali praktičnoj primjeni, pa se njihov udžbenik [2] odlikuje mnoštvom primjera i zadataka. Dakle, koncept profesora Sarape temelji se na strogoj aksiomatizaciji, dok profesori Dakić i Elezović prednost daju intuitivnom razumijevanju. Udžbenik profesorica Antoliš i Copić [1] svojevrsna je sinteza ova dva pristupa. Naime, profesorice preuzimaju poredak i način definiranja profesora Sarape. U njihovom udžbeniku zato je također sve prilično jasno definirano i aksiomatski zasnovano, iako malo suženo, u skladu sa zahtjevima novog srednjoškolskog programa. Smanjivanjem opsega iznesenih informacija profesorice nisu izgubile na egzaktnosti ili preciznosti matematičke aksiomatizacije. Ispuštenu teoriju zamijenile su većim brojem dobro osmišljenih i relevantnih primjera i zadataka.

Osnovna poteškoća s kojom se susrećemo je pitanje adekvatnosti vjerojatnosnog prostora koji modelira slučajan pokus. Određivanje pravilnog modela često se temelji na individualnom pristupu učeniku. Zato je, osim upoznavanja učenika s teorijom, važno kroz velik broj primjera i zadataka razviti način gledanja (modeliranja) kojim ćemo povećati kvalitetu nastave. Ključ pravilnog razumijevanja gradiva teorije vjerojatnosti u odgovarajućem je omjeru količine zadataka i teorije, a od promatranih udžbenika, prema tome kriteriju, posebno se ističe udžbenik [1] koji je zapravo prirodna rezultanta dvaju vektora [2] i [6].

8. Literatura

1. Sanja Antoliš, Aneta Copić, *Matematika 4*, I. polugodište, udžbenik sa zbirkom zadataka za 4. razred prirodoslovno-matematičke gimnazije, Školska knjiga, Zagreb, 2006. (str. 129-228)
2. Neven Elezović, Branimir Dakić, *Matematika 4 – Brojevi, kombinatorika, vjerojatnost, nizovi*, Udžbenik i zbirka zadataka za 4. razred prirodoslovnih gimnazija, ELEMENT, Zagreb, 2003. (str. 91-167)
3. Svetozar Kurepa, Nikola Sarapa, Aleksandra Kurepa, Juraj Hrnčević, *Matematika 4 za četvrti razred prirodoslovno matematičke gimnazije*, udžbenik i zbirka zadataka s rješenjima, Školska knjiga, Zagreb, 2001. (str. 186-377)
4. Ivana Fundurulić, *Diplomski rad: Problem uvođenja vjerojatnosti i vjerojatnosnog prostora u nastavi matematike prirodoslovno-matematičkih gimnazija*, PMF-MO, mentor: doc. dr. sc. T. Šikić, Zagreb, 2009.
5. Nikola Sarapa, *Teorija vjerojatnosti*, Školska knjiga, Zagreb, 2002.
6. Nikola Sarapa, *Vjerojatnost i statistika I dio, Osnove vjerojatnosti, kombinatorika*, Školska knjiga, Zagreb, 1993.
7. Nikola Sarapa, *Vjerojatnost i statistika II. dio, Osnove statistike, slučajne varijable*, Školska knjiga, Zagreb, 1996.