Varijable i funkcije: Upotrebljavanje geometrije za istraživanje važnih koncepata u algebri

SCOTT STEKETEE[1]

Mnogo se godina ozbiljno raspravljalo o tome kako bi trebalo poučavati algebru i koje bi elemente trebalo istaknuti.

Statički pristup algebri

U SAD-u je tradicionalan pristup algebri stavljao naglasak na varijable kao na konkretne brojeve čija je vrijednost nepoznata, te na izračunavanje izraza i rješavanje jednadžbi. Takvo isticanje još uvijek prevladava u mnogim srednjoškolskim udžbenicima u SAD-u.

Izračunaj $2x^2 - 3x + 1$ for $x = 2$

Riješi $2x^2 - 3x + 1 = 10$

Primjer 1.

U ovom pristupu na varijable se isprva gleda kao na statične „*držače mjesta*", kao što se vidi iz problema u primjeru 1. (u drugom problemu x već predstavlja dva broja, a ne samo jedan, no još nema naznake varijacije). Kako napreduju, učenici uče da ti „*držači mjesta*" mogu preuzimati različite vrijednosti te razvijaju koncepte varijabilnosti proširujući statički pogled tako da uključuje mnoge vrijednosti – isprva mnoge diskretne vrijednosti te, naposljetku, mnoge kontinuirane vrijednosti.

Slično, funkcije se isprva prikazuju kao statična pravila koja uzimaju jedan konkretan broj kao ulaznu vrijednost i proizvode drugi konkretni broj kao izlaznu vrijednost. Barem ispočetka, ne postoji nikakav osjećaj o *ponašanju* funkcija; one samo uzimaju jedan broj i daju drugi.

1. $A = LW$
2. $40 = 5x$
3. $\sin x = \cos x \cdot \tan x$
4. $1 = n \cdot 1/n$
5. $y = kx$

Primjer 2.

Mnoge jednadžbe koje pišemo su statične, bez ikakvog osjećaja varijacije ili ponašanja. Zalman Isiskin (1988.) daje primjere prikazane u primjeru 2. On opaža da je prvi formula ili pravilo, drugi je jednadžba koju treba riješiti, treći je identitet, a četvrti svojstvo. Tek nam peti daje naznaku x-a kao varijable, dinamičke vrijednosti koja se mijenja.

[1]Scott Steketee, KCP Technology, SAD

Dinamički pristup algebri

Chazan (2000.) i drugi zalažu se za drugačiji pristup: naglašavanje uloge varijabli kao promjenjivih vrijednosti, te za koncept funkcija i njihova ponašanja kao ujedinjujućih tema algebre. Dinamički elementi ovdje su najvažniji: varijable su *promjenjive vrijednosti* i funkcije se *ponašaju* na određen način.

Ovaj pristup naglašava ponašanje funkcija kao način karakteriziranja odnosa između vrijednosti koje variraju. Učenici razmišljaju o funkciji kao o odnosu između promjenjivih vrijednosti i istražuju njezino ponašanje mijenjajući vrijednost nezavisnih varijabli.

Naglasak je na razlici

Ovo nisu apsolutne kategorije. Učenici u tradicionalnoj nastavi proučavaju funkcije i mijenjaju varijable, dok učenici u nastavi s dinamičkim pristupom uče izračunavati izraze i rješavati jednadžbe. Razlika je u naglasku: što prenosimo učenicima kao temeljni objekt proučavanja u algebri? Naše su mogućnosti donekle ograničene dostupnim medijima.

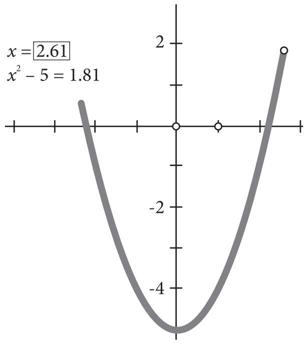
Statični medij

Jedna od poteškoća pri prelasku na dinamički pristup poučavanja algebre je činjenica da je učenicima teško omogućiti da steknu iskustvo mijenjanja varijabli, a isto im je tako teško omogućiti da istražuju i promatraju ponašanje funkcija dok im se mijenjaju neovisne varijable. Donedavno su skoro sva nastavna sredstva i pomagala (udžbenici, školske ploče, projektori) bila statična. Teško je i neuvjerljivo prikazivati varijacije pomoću statičnih medija, a još je teže učenicima dati direktnu kontrolu nad varijacijama. Kad bi učenici mogli kontrolirati neovisnu varijablu, te kad bi jednostavno mogli mijenjati njezine vrijednosti kako god žele, dobili bi dinamičku sposobnost da istražuju ponašanje funkcija.

Dinamički medij

Posljednjih 20 godina svjedoci smo razvoja dinamičkih matematičkih softvera (poput *Sketchpada*) koji korisnicima omogućuju dinamičku kontrolu nad matematikom koju stvaraju. *Sketchpad* je isprva bio program dinamičke geometrije koji je učenicima pružao mogućnost manipuliranja geometrijom pomicanjem točaka i drugih geometrijskih objekata po ekranu. Nedavno su *Sketchpadu* pridodane važne algebarske karakteristike koje omogućavaju stvaranje numeričkih vrijednosti koje se lako mogu mijenjati i animirati, te podržavaju stvaranje i crtanje grafova funkcija.

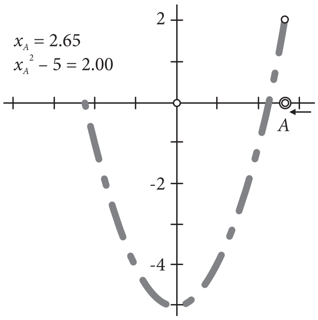
No, i dalje je učenička sposobnost varijacije geometrijskih objekata bolja od njihove sposobnosti varijacije numeričkih objekata. Učenicima je jednostavno pomicati točku po ekranu i gledati kako se konstrukcija mijenja. Pomičući točku mišem, učenik ima neposrednu kontrolu nad njom. On je može pomicati u bilo kojem smjeru, brzo ili polako, te čak i oprezno, promatrajući za to vrijeme ponašanje konstrukcije da bi ostvario određeni cilj.



Primjer 3.

Numeričke vrijable u *Sketchpadu*

Brojeve je lako stvoriti, mijenjati i animirati. Učenik može stvoriti broj, lako ga promijeniti, mijenjati ga upotrebljavajući + i – tipke (diskretne vrijednosti) ili ga kontinuirano varirati njegovom animacijom. Koristeći broj u računu poput $x^2 - 5$, može stvoriti (ovisnu) varijablu koja ovisi o njemu, može ucrtati te dvije vrijednosti u pravokutni koordinatni sustav u ravnini te vidjeti kako se graf razvija promjenom neovisne varijable (primjer 3.). No, učenik još uvijek nema isti osjećaj kontrole koji ima kada pomiče točku koja određuju geometrijsku konstrukciju.



Primjer 4.

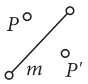
Nešto je bolji učinak kada učenik postavi točku na os *x*, izmjeri joj apscisu, te je koristi kao neovisnu varijablu. Kao što se vidi u primjeru 4., sada učenik može pomicati neovisnu varijablu i gledati ponašanje funkcije. Učenik može vidjeti kako se vrijednost zavisne varijable mijenja numerički, te kako se ona mijenja na grafu (pomicanjem točke). Iako je postizanje dinamičke kontrole nad varijablom nešto teže nego postizanje dinamičke kontrole nad točkom, učenik ima direktnu kontrolu nad varijablom putem miša. Učenik pomicanjem miša može promijeniti vrijednost broja, čineći ga tako pravom varijablom. U tom procesu učenik promatra kako variranje definira funkciju i stvara grafičku prikaz ponašanja funkcije.

Nedostatci numeričkih varijabli i funkcija

Čak i s tim moćnim načinima variranja brojeva, učenici ne dobivaju osjećaj potpune kontrole i kontinuirane varijacije u numeričkom području kao što dobivaju s točkama u geometričkom području. To ostaje važna briga; konkretna iskustva s dinamičkom, kontinuiranom prirodom varijabli napravit će veliki pomak u razvoju učenikovih sposobnosti za istraživanje ponašanja funkcija. Sadašnji načini manipuliranja brojeva ne daju isto taktilno iskustvo, isti osjećaj kontrole, isti osjećaj zadovoljstva i moći kao pomicanje točaka.

Geometrijske varijable i funkcije

Većina definicija *funkcije* ne precizira da moramo koristiti brojeve kao ulazne i izlazne vrijednosti, odnosno kao neovisne i ovisne varijable. Ustvari, ima mnogo presedana za ideju geometrijskih varijabli i geometrijskih funkcija. U numeričkom području varijabla jedinstven promjenjivi objekt je broj; u geometrijskom je području točka. Učenici već uče funkcije točaka, iako ih ne nazivaju funkcijama. Većinu vremena nazivaju ih transformacijama. Zapravo, oba naziva imaju isto matematičko značenje. Možemo reći da funkcija transformira ulaznu varijablu u izlaznu, te da transformacija uzima originalnu sliku i proizvodi njenu presliku. Ulazni podatak (originalna slika) i izlazni podatak (preslika) možda su brojevi, a možda točke. Nije važno koji naziv upotrebljavamo. Operacija pretvaranja ulaznog podatka u jedinstveni izlazni podatak ono je što karakterizira funkciju.

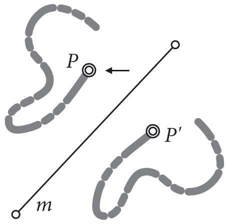
Varijabla	Primjer funkcije	Ulazni podatak (originalna slika)	Izlazni podatak (preslika)	Notacija
Broj	$f(x) = 2x - 3$	5	7	$f(5) = 7$
Točka	Zrcaljenje preko *m* 	P	P'	$r_m(P) = P'$

Prednosti geometrijskih funkcija

Geometrijske funkcije imaju neke značajne prednosti u istraživanju važnih koncepata. Učenici mogu lako napraviti mnogo važnih aktivnosti i istraživanja:

- stvoriti novu funkciju,
- njenim pomicanjem manipulirati neovisnu varijablu,
- promatrati ponašanje funkcije tijekom manipulacije neovisne varijable,
- zabilježiti ponašanje funkcije,
- ograničiti nezavisnu varijablu u određenu domenu,
- promatrati rezultirajuću kodomenu funkcije,
- promatrati kompoziciju dviju funkcija,
- istražiti kako ograničena domena utječe na kompoziciju funkcija,
- eksperimentirati da se pronađe inverzna funkcija,
- istražiti funkcije definirane konstrukcijama lokusa,
- upotrijebiti korisničke transformacije za stvaranje velike raznovrsnosti drugih funkcija.

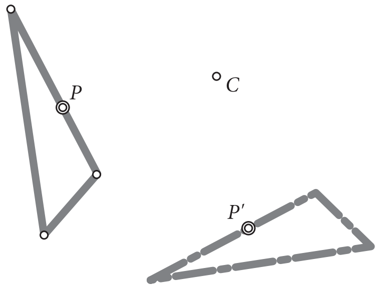
Promatranje i bilježenje ponašanja funkcije



Primjer 5.

U radu s numeričkim funkcijama učenici promatraju i bilježe njihova ponašanja stvaranjem tablica vrijednosti. Proučavanjem tablice brojeva ne dobiva se dobra predodžba o tome kako se funkcija ponaša, pa učenici često crtaju grafove funkcija prema podatcima iz tablice. U radu s geometrijskim funkcijama učenici mogu pratiti i ulaznu i izlaznu točku, pomicati ulaznu vrijednost i dobiti trenutačnu sliku ponašanja funkcije. Tragovi zabilježeni na ekranu za geometrijsku funkciju, kao što je vidljivo u primjeru 5., daju iste vrijednosti kao i brojevna funkcija, ali i puno bolju ideju o ponašanju funkcije.

Ograničavanje domene

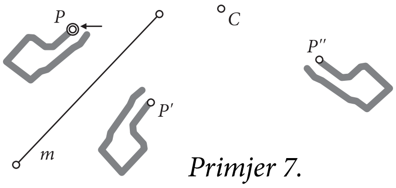


Primjer 6.

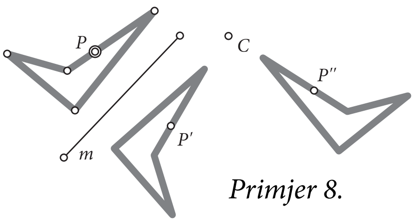
Učenici često imaju problema u razumijevanju što to znači ograničiti domenu numeričke funkcije, te zbog čega bi se to željelo učiniti. S geometrijskom funkcijom to je jednostavno i logično. Ograničavanje domene funkcije daje nam dobru sliku odnosa između varijabli, omogućavajući nam da vidimo raspon (kodomenu) koji odgovara nekoj domeni. U primjeru 6. učenik je stvorio funkciju koja rotira ulaznu varijablu za 90°oko središnje točke *C*. Ograničio je domenu spajanjem nezavisne varijable *P* s trokutom i pomaknuo nezavisnu varijablu da vidi kojim rasponom rezultira.

Kompozicija funkcija

Pri kompoziciji funkcija učenici se često zbune oko toga koja se funkcija primjenjuje prva, djelomično zbog toga što su funkcije izražene u simboličkom obliku. Taj simbolički zapis donekle je apstraktan, barem za početnika, zato što gledanje u simbole ne daje jasan osjećaj o ponašanju funkcije. Geometrijske funkcije mnogo su konkretnije, s daleko očitijim ponašanjima. U primjeru 7. učenik je preslikao nezavisnu varijablu osnom simetrijom s obzirom na *m,* rotirao oko središnje točke *C* za 90° te potom pomaknuo ulaznu vrijednost. Da bi dobio još bolju sliku ponašanja kompozicije funkcija, učenik može ograničiti domenu kako je prikazano u primjeru 8.

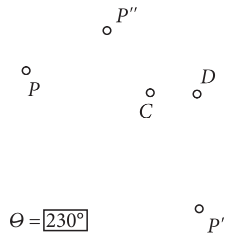


Primjer 7.



Primjer 8.

Pronalaženje inverzne funkcije

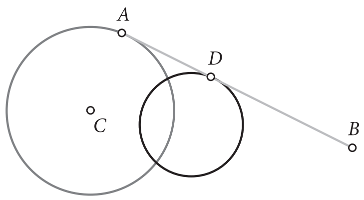


Primjer 9.

Učenici često imaju problema sa shvaćanjem inverznih funkcija. Konkretni primjeri s geometrijskim funkcijama mogu biti od pomoći. U primjeru 9. učenik pokušava naći inverziju od rotacije točke *C* za 120°. Učenik je napravio kompoziciju ove funkcije s drugom rotacijom oko točke *D* po promjenjivom kutu. Prepozntaljiva odlika inverzne geometrijske funkcije vrlo je konkretna: mora postaviti točku *P*" točno na mjesto točke *P*. Istražujući položaj točke *D* i promjenjivog kuta, učenik približava točku *P*" sve bliže točki P i pronalazi da može namjestiti da se dvije točke podudaraju pomičući *D* na isto mjesto gdje je i *C*, te s kutom druge rotacije od 240°. Zatim učenik provjerava rezultat pomičući neovisnu varijablu *P* i potvrđuje da je inverzija od rotacije za 120°oko *C* rotacija za 240°oko *C*.

Slično, učenik može započeti s dilatacijom s faktorom ½ te onda napraviti istraživanje da potvrdi da je njezina inverzija dilatacija s faktorom 2.

Konstrukcije lokusa kao funkcije

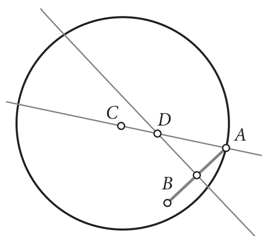


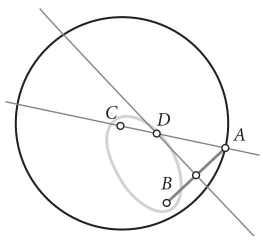
Primjer 10.

Pri konstrukciji lokusa učenik definira točku na stazi kao „*vozača*" i drugu točku kao „*putujući objekt*" koji kreira lokus. U primjeru 10. učenik je nacrtao dužinu $\overline{AB}$, pri čemu točka *A* pripada kružnici, te je istaknuo točku *D* koja pripada dužini $\overline{AB}$. Možemo promatrati točku *A* kao neovisnu varijablu (ograničenu na kružnicu kao njezinu domenu) i točku *D* kao zavisnu varijablu. Učenik može pomicati točku *A* po kružnici da vidi raspon ili može upotrijebiti naredbu **Locus** da napravi putanju koja odgovara rasponu ove funkcije.

Slično, u primjeru 11. učenik je pridružio točku *A* kružnici, konstruirao je simetralu dužine $\overline{AB}$ i točku *D* koja se nalazi na sjecištu simetrale dužine $\overline{AB}$ s pravcem kojemu pripada polumjer te kružnice koji prolazi kroz točku *A*. Nezavisna varijabla (točka *A*) ograničena je kružnicom kao svojom domenom. Konstrukcijom lokusa vidimo odgovarajući raspon u primjeru 12. (Uočite da se ovaj raspon sastoji od svih točaka jednako udaljenih od točke *B* i kružnice, mjereći udaljenost od kružnice duž polumjera.)

Primjer 11.





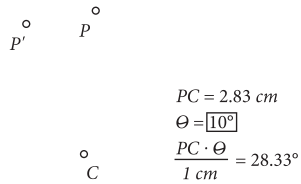
Primjer 12.

Zbog toga što konstrukcija lokusa stvara čitav raspon funkcije kao objekta, moguće je izmijeniti definiciju funkcije (na primjer, promjenom veličine kružnice ili pomičući točku *B*) da bi se vidio efekt na raspon. Učenici smatraju posebno zanimljivim pomicanje točke *B* izvan kružnice!

Pri konstrukciji lokusa poput ove, učenike se potiče na važan pojmovni skok, od pogleda na funkciju kao na operaciju koja uzima jednu ulaznu točku i daje jednu izlaznu točku, do kolektivnog, globalnog pogleda prema kojemu funkcija preslikava cijelu domenu na cijelu kodomenu. Takav pojmovni skok puno je teži učenicima koji rade s numeričkim funkcijama, no to je prirodni prijelaz u području geometrije.

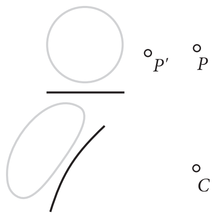
Korisničke transformacije

Naši raniji primjeri uključivali su transformacije ugrađene u *Sketchpad*, odnosno izometrije i sličnosti. No, *Sketchpad* također dopušta učenicima da stvore korisničke transformacije koje se mogu koristiti za stvaranje bilo koje transformacije u kojoj položaj jedne točke utječe na položaj druge. Time se omogućava velika fleksibilnost i kreativnost, pa učenici, u ovom dobu računalne grafike, rezultate smatraju veoma uzbudljivima.



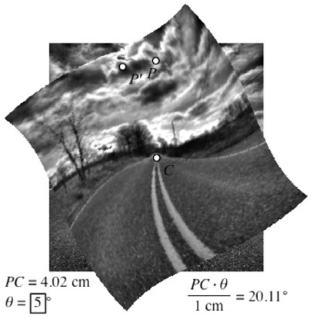
Primjer 13.

U primjeru 13. prikazano je polazište jednostavnog primjera: učenik želi rotirati točku *P* oko središta *C* za kut koji ovisi o udaljenosti *PC*. Učenik koristi parametar θ za određivanje kuta rotacije: 10° po centimetru udaljenosti. Da bi definirao transformaciju, učenik množi udaljenost s θ i zatim dijeli s 1 cm da bi mjerne jedinice ostale stupnjevi. Učenik rotira točku *P* za izračunati kut da bi dobio točku *P*', zavisnu varijablu. Pomicanjem nezavisne varijable *P* učenik ustanovljuje da se funkcija ponaša kao što je očekivao, a potom odabire obje varijable i koristi ih za definiranje korisničke transformacije. U primjeru 14. učenik je primijenio korisničku transformaciju na dužinu i na kružnicu da bi vidio kako transformacija utječe na oba objekta.

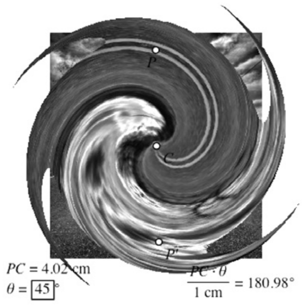


Primjer 14.

Sada je došao do zabavnoga dijela. Zalijepio je sliku s interneta u svoju skicu i primijenio korisničku transformaciju na cijelu sliku, s rezultatom prikazanim u primjeru 15. (s $\theta = 5°$) i u primjeru 16. (s $\theta = 45°$).



Primjer 15.



Primjer 16.

Zaključak

Prikazane geometrijske funkcije imaju ogroman potencijal za razvijanje učeničkog razumijevanja funkcija, domene, raspona (kodomena), kompozicija funkcija i inverznih funkcija. One proširuju učenička iskustva uklanjajući krivu predodžbu o tome da se funkcije primjenjuju samo na brojeve. One pružaju konkretne, geometrijske prilike za mijenjanje neovisne varijable, za stvaranje vizualne „tablice vrijednosti”, za ograničavanje domene na određen oblik i opažanja raspona, za kompozicije dviju funkcija, za razumijevanje inverzije funkcije u terminima kompozicije, za razumijevanje funkcije kao ocrtavanja čitavog skupa točaka (domene) na/po drugom čitavom skupu točaka (raspon), te za stvaranje i promatranje funkcije koja preslikavaju jedno cijelo područje ravnine na drugo.

Ako se koristimo aktivnostima kao što su ove , koje učenicima daju čvrsti temelj za rad s geometrijskim funkcijama, učenici će biti puno pripremljeniji za razumijevanje funkcija u području algebre. Od velike će im koristi u njihovoj daljnjoj matematičkoj naobrazbi biti njihova konkretna iskustva pomicanja varijabli i promatranja ponašanja funkcija, te njihove vidljive slike domena, kodomena, kompozicija funkcija i inverznih funkcija.

Literatura:

1. Chazan, Daniel (2000). *Beyond Formulas in Mathematics and Teaching.* Teachers College Press.
2. Usiskin, Zalman (1998). Conceptions of school algebra and uses of variables. in A. F. Coxford& A. P. Schulte (Eds.), *The ideas of algebra* (1988 Yearbook, pp. 8-19). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
3. Chazan, Daniel and Michal Yerushalmy (2003). On Appreciating the Cognitive Complexity of School Algebra, in *Research Companion to the Principles and Standards for School Mathematics,* National Council of Teachers of Mathematics.

S engleskog prevela: Jelena Grbavec, Zagreb