Još jedanaest raznih dokaza Nesbitove nejednakosti i jedno njezino poboljšanje

Šefket Arslanagić[1] i Alija Muminagić[2]

U [2] je dano deset raznih dokaza jedne algebarske nejednakosti koja se pojavila u matematičkoj literaturi 1903. godine autora A. M. Nesbitta pa se ona otada često naziva i **Nesbitova nejednakost**, a glasi:

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2};\ (a,b,c>0). \qquad (1)$$

Za dokaz ove nejednakosti koristili smo nejednakost između aritmetičke i geometrijske sredine, nejednakost između aritmetičke i harmonijske sredine, uvođenje novih promjenljivih, nejednakost Koši-Bunjakovski-Švarca, Myurhedovu nejednakost itd.

U ovom ćemo radu, da bismo dokazali nejednakost (1), koristiti nejednakost Čebiševa, nejednakost između aritmetičke i geometrijske sredine, nejednakost Jensena i činjenicu da je ova nejednakost homogena. Dakle, dat ćemo još jedanaest raznih dokaza ove nejednakosti kao i jedno njezino poboljšanje.

Dokaz 1. Imamo redom:

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}-\frac{3}{2}=\frac{ac+a^2+b^2+bc}{(b+c)(c+a)}+\frac{2c-3a-3b}{2(a+b)}=$$

$$=2\frac{(a+b)(ac+a^2+b^2+bc)+(bc+ab+c^2+ac)(2c-3a-3b)}{2(a+b)(b+c)(c+a)}. \qquad (2)$$

Ako brojnik izraza (2) obilježimo s M, imamo:

$$M=2(a^3+b^3+c^3)-a^2c-ab^2-a^2b-b^2c-ac^2-bc^2=$$

[1]Šefket Arslanagić, PMF, Sarajevo, Bosna i Hercegovina
[2]Alija Muminagić, Danska

$$=\left(a^3+b^3-ab^2-a^2b\right)+\left(a^3+c^3-a^2c-ac^2\right)+\left(b^3+c^3-b^2c-bc^2\right)=$$
$$=(a-b)\left(a^2-b^2\right)+(a-c)\left(a^2-c^2\right)+(b-c)\left(b^2-c^2\right)=$$
$$=(a-b)^2(a+b)+(a-c)^2(a+c)+(b-c)^2(b+c)\geq 0,$$

s jednakošću ako i samo ako je $a = b = c$.

Kako je $M \geq 0$ i $(a + b)(b + c)(c + a) > 0$ iz (2) slijedi:

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}-\frac{3}{2}\geq 0\text{, tj.}$$
$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2}.$$

Dokaz 2. Kako je dana nejednakost (1) homogena, možemo uzeti da je $a+b+c=1$, gdje je $0 < a, b, c < 1$. Sada je naš zadatak da dokažemo nejednakost:

$$\sum_{cyclic}\frac{a}{b+c}=\sum_{cyclic}f(a)\geq\frac{3}{2}\text{, gdje je } f(x)=\frac{x}{1-x}.$$

Funkcija f je zbog $f''(x)=\dfrac{2}{(1-x)^3}>0$; $x\in(0,1)$ konveksna pa na osnovi Jensenove nejednakosti, imamo:

$$\frac{1}{3}\sum_{cyclic}f(a)\geq f\left(\frac{a+b+c}{3}\right)=f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{2},$$

a odavde

$$\sum_{cyclic}f(a)\geq\frac{3}{2}.$$

Dokaz 3. Prvo ćemo uzeti da je $a + b + c = 1$, $0 < a, b, c < 1$ budući da je nejednakost (1) homogena. Sada treba dokazati nejednakost

$$\sum_{cyclic}f(a)\geq\frac{3}{2}$$

ili

$$\frac{f(a)+f(b)+f(c)}{3}\geq f\left(\frac{1}{3}\right),\tag{3}$$

gdje je $f(x)=\dfrac{x}{1-x}$, $x\in(0,1)$. Kako je $f'(x)=\dfrac{1}{(1-x)^2}$, a $f\left(\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{1}{2}$, to je jednakost tangente krivulje f u točki $M\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{2}\right)$:

$$t\colon\ y=\frac{9}{4}x-\frac{1}{4}.$$

Kako je $f''(x)=\dfrac{2}{(1-x)^3}>0,\, x\in(0,1)$, to je funkcija f konveksna u intervalu (0, 1), pa se njezin grafikon u ovom intervalu nalazi iznad tangente ove krivulje u točki $M\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{2}\right)$, te je:

$$f(x)\geq\frac{9x-1}{4};\quad x\in(0,1) \tag{4}$$

Ova tvrdnja vrijedi jer je:

$$f(x)-\frac{9x-1}{4}=\frac{(3x-1)^2}{4(1-x)}\geq 0;\ x\in(0,1).$$

Sada iz (4) dobivamo:

$$\sum_{cyclic}\frac{a}{1-a}\geq\sum_{cyclic}\frac{9a-1}{4}=\frac{9}{4}\left(\sum_{cyclic}a\right)-\frac{3}{4}=\frac{3}{2}.$$

Dakle, nejednakost (3) je točna pa je time dokazana i dana nejednakost (1).

Dokaz 4. Kako je zbog a, b, $c>0$:

$$\left(\frac{a}{b+c}-\frac{1}{2}\right)^2\geq 0\Leftrightarrow\left[\frac{2a-b-c}{2(b+c)}\right]^2\geq 0$$

$$\Leftrightarrow 4a^2+b^2+c^2-4ab-4ac+2bc\geq 0. \tag{$*$}$$

Tada imamo:

$$\frac{a}{b+c}-\frac{8a-b-c}{4(a+b+c)}\geq 0$$

$$\Leftrightarrow\frac{4a(a+b+c)-(b+c)(8a-b-c)}{4(b+c)(a+b+c)}\geq 0$$

$$\Leftrightarrow 4a^2+4ab+4ac-8ab-8ac+b^2+bc+bc+c^2\geq 0$$

$$\Leftrightarrow 4a^2+b^2+c^2-4ab-4ac+2bc\geq 0,$$

to dobivamo da je zbog $(*)$: $\dfrac{a}{b+c}\geq\dfrac{8a-b-c}{4(a+b+c)}$,

a odavde

$$\sum_{cyclic}\frac{a}{b+c}\geq\sum_{cyclic}\frac{8a-b-c}{4(a+b+c)}=$$

$$=\frac{8a-b-c+8b-a-c+8c-a-b}{4(a+b+c)}=\frac{6(a+b+c)}{4(a+b+c)}=\frac{3}{2},$$

odnosno

$$\sum_{cyclic}\frac{a}{b+c}\geq\frac{3}{2}.$$

Dokaz 5. Koristeći nejednakost između aritmetičke i geometrijske sredine tri pozitivna broja imamo:

$$\frac{a^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{3}{2}}}{3}\geq\sqrt[3]{a^{\frac{3}{2}}\cdot b^{\frac{3}{2}}\cdot b^{\frac{3}{2}}}\text{, te}$$

$$\frac{a^{\frac{3}{2}}+c^{\frac{3}{2}}+c^{\frac{3}{2}}}{3}\geq\sqrt[3]{a^{\frac{3}{2}}\cdot c^{\frac{3}{2}}\cdot c^{\frac{3}{2}}}\text{,}$$

odnosno

$$a^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{3}{2}}\geq 3a^{\frac{1}{2}}b,$$

$$a^{\frac{3}{2}}+c^{\frac{3}{2}}+c^{\frac{3}{2}}\geq 3a^{\frac{1}{2}}c.$$

Nakon zbrajanja ovih dviju nejednakosti, dobivamo:

$$2\left(a^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{3}{2}}+c^{\frac{3}{2}}\right)\geq 3a^{\frac{1}{2}}(b+c),$$

odnosno

$$2a\left(a^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{3}{2}}+c^{\frac{3}{2}}\right)\geq 3a^{\frac{3}{2}}(b+c),$$

a odavde

$$\frac{a}{b+c}\geq\frac{3a^{\frac{3}{2}}}{2\left(a^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{3}{2}}+c^{\frac{3}{2}}\right)}.$$

Sada imamo

$$\sum_{cyclic}\frac{a}{b+c}\geq\frac{3}{2}\sum_{cyclic}\frac{a^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{3}{2}}+c^{\frac{3}{2}}}=\frac{3}{2}.$$

Dokaz 6. Uvodeći zamjenu $x = b + c$, $y = b + c$, $z = a + b$ dobivamo da je:

$$y + z - x = 2a,\ x + z - y = 2b \text{ i } x + y - z = 2c.$$

Sada imamo

$$\sum_{cyclic}\frac{a}{b+c}=\sum_{cyclic}\frac{y+z-x}{2x}=\frac{1}{2}\left(\sum_{cyclic}\frac{y+z}{x}-3\right). \tag{5}$$

Na osnovi nejednakosti između aritmetičke i geometrijske sredine šest pozitivnih brojeva imamo:

$$\sum_{cyclic}\frac{y+z}{x}=\frac{y}{x}+\frac{z}{x}+\frac{z}{y}+\frac{x}{y}+\frac{x}{z}+\frac{y}{z}\geq$$

$$\geq 6\sqrt[6]{\frac{y}{x}\cdot\frac{z}{x}\cdot\frac{z}{y}\cdot\frac{x}{y}\cdot\frac{x}{z}\cdot\frac{y}{z}}=6. \tag{6}$$

Sada dobivamo iz (5) i (6):

$$\sum_{cyclic} \frac{a}{b+c} \geq \frac{1}{2}(6-3) = \frac{3}{2}.$$

Dokaz 7. Uzet ćemo zamjenu $x = \frac{a}{b+c}, y = \frac{b}{c+a}, z = \frac{c}{a+b}$. Sada slijedi da je

$$\sum_{cyclic} f(x) = \sum_{cyclic} \frac{a}{a+b+c} = 1,$$

gdje je $f(t) = \frac{t}{1+t}$. Kako je $f''(t) = \frac{-2}{(1+t)^3} < 0; t \in (0,+\infty)$, to je funkcija f konkavna na $(0,+\infty)$.

Sada na osnovi Jensenove nejednakosti dobivamo:

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3} = \frac{1}{3}\sum_{cyclic} f(x) \leq f\left(\frac{x+y+z}{3}\right). \tag{7}$$

Funkcija f je zbog $f'(t) = \frac{1}{(1+t)^2} > 0$ monotono rastuća na $(0,+\infty)$ pa iz (7) slijedi:

$$\frac{1}{2} \leq \frac{x+y+z}{3}. \tag{8}$$

Sada iz (8) i zamjene imamo:

$$\sum_{cyclic} \frac{a}{b+c} = x+y+z \geq \frac{3}{2}.$$

Dokaz 8. Kao i u prethodnom dokazu dovoljno je dokazati da je

$$T = \frac{x+y+z}{3} \geq \frac{1}{2},$$

ako je $\sum_{cyclic} \frac{x}{1+x} = 1$; $\left(x = \frac{a}{b+c}, y = \frac{b}{a+c}, z = \frac{c}{a+b}\right)$.

Imamo da je

$$\sum_{cyclic} \frac{x}{1+x} = 1 \Leftrightarrow 1 = 2xyz + xy + yz + zx,$$

a odavde, koristeći nejednakost između aritmetičke i geometrijske sredine kao i poznatu nejednakost

$$\frac{1}{3}(x+y+z+)^2 \geq xy+yz+zx\left(\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2 \geq xy+yz+zx\right),$$

dobivamo: $1 = 2xyz + xy + yz + zx \leq 2T^3 + 3T^2$.

Odavde slijedi

$$2T^3+3T^2-1\ge 0 \Leftrightarrow (2T-1)(T+1)^2\ge 0$$

ili

$$2T-1\ge 0\text{, tj.}$$

$$T\ge\frac{1}{2}.$$

Dokaz 9. Označimo s L lijevu stranu nejednakosti (1). Nejednakost je simetrična te ne narušavajući općenitost možemo pretpostaviti da je $a\ge b\ge c$, a odavde $\frac{1}{b+c}\ge\frac{1}{c+a}\ge\frac{1}{a+b}$.

Sada na osnovi nejednakosti Čebiševa imamo:

$$\begin{aligned}L&\ge\frac{1}{3}(a+b+c)\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right)\\&=\frac{1}{3}\left(\frac{a+b+c}{b+c}+\frac{a+b+c}{c+a}+\frac{a+b+c}{a+b}\right)\\&=\frac{1}{3}\left(1+\frac{a}{b+c}+1+\frac{b}{c+a}+1+\frac{c}{a+b}\right)\\&=\frac{1}{3}(3+L)\ \Rightarrow\frac{2}{3}L\ge 1\Rightarrow L\ge\frac{3}{2}.\end{aligned}$$

Dokaz 10. Nejednakost je simetrična te ne narušavajući općenitost možemo uzeti da je $a\ge b\ge c$. Nakon uvođenja zamjene $x=\frac{a}{c}$, $y=\frac{b}{c}$ imamo da je $x\ge y\ge 1$. Sada dobivamo da je dana nejednakost (1) ekvivalentna s nejednakošću

$$\frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}+1}+\frac{\frac{b}{c}}{\frac{a}{c}+1}+\frac{1}{\frac{a}{c}+\frac{b}{c}}\ge\frac{3}{2}\tag{9}$$

ili

$$\frac{x}{y+1}+\frac{y}{x+1}\ge\frac{3}{2}-\frac{1}{x+y}.\tag{10}$$

Na osnovi nejednakosti između aritmetičke i geometrijske sredine dva pozitivna broja imamo:

$$\frac{x+1}{y+1}+\frac{y+1}{x+1}\ge 2$$

ili

$$\frac{x}{y+1}+\frac{y}{x+1}\geq 2-\frac{1}{y+1}-\frac{1}{x+1}. \tag{11}$$

Sada ćemo dokazati da vrijedi nejednakost:

$$2-\frac{1}{y+1}-\frac{1}{x+1}\geq \frac{3}{2}-\frac{1}{x+y} \tag{12}$$

ili

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{y+1}\geq \frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+y} \quad \text{ili} \quad \frac{y-1}{2(1+y)}\geq \frac{y-1}{(x+1)(x+y)}.$$

Očigledno, ova je nejednakost točna zbog činjenice da je $x \geq y \geq 1$, te $x + y \geq 2$ pa vrijedi (12). Sada iz (11) i (12) slijedi nejednakost (10), odnosno (9). Dakle, dana je nejednakost (1) dokazana.

Dokaz 11. Ovaj je dokaz potpuno neuobičajen i donekle složen, ali isto tako zanimljiv i poučan.

Nakon množenja (1) s $2(a+b)(b+c)(c+a)>0$ i sređivanja novodobivene nejednakosti, dobivamo nejednakost koja je ekvivalentna nejednakosti (1) koja glasi:

$$2a^3+2b^3+2c^3-a^2b-ab^2-b^2c-bc^2-a^2c-ac^2\geq 0. \tag{13}$$

Podijelimo li nejednakost (13) s $c^3 > 0$, dobivamo nejednakost:

$$\frac{2a^3}{c^3}+\frac{2b^3}{c^3}+2-\frac{a^2b}{c^3}-\frac{ab^2}{c^3}-\frac{b^2}{c^2}-\frac{b}{c}-\frac{a^2}{c^2}-\frac{a}{c}\geq 0. \tag{14}$$

Stavimo li da je $p=\frac{a}{c}$ i $r=\frac{b}{c}$ u prethodnu nejednakost (14), imamo:

$$2p^3+2r^3+2-p^2r-r^2p-p^2-r^2-p-r\geq 0,$$

odakle je

$$2\left[(p+r)^3-3pr(p+r)+1\right]-pr(p+r)-(p+r)^2+2pr-(p+r)\geq 0 \tag{15}$$

Označimo li ovdje $x = p + r$, te $y = pr$, dobivamo:

$$2(x^3-3xy+1)-xy-x^2+2y-x\geq 0,$$

odnosno

$$y(2-7x)+2x^3-x^2-x+2\geq 0. \tag{16}$$

(Uočimo da je $x^2 \geq 4y$ jer je

$$x^2 - 4y = (p+r)^2 - 4pr = p^2 + r^2 + 2pr - 4pr = (p-r)^2 \geq 0 \text{ }).$$

Graf funkcije f: $\left[0, \frac{x^2}{4}\right] \to \mathbb{R}$ zadane formulom

$$f(y) = y(2-7x) + 2x^3 - x^2 - x + 2$$

je pravac, što znači da funkcija f postiže ekstremne vrijednosti u krajnjim točkama intervala $\left[0, \frac{x^2}{4}\right]$. Za svaki $x > 0$ vrijede sljedeće dvije nejednakosti:

$$f(0) = 2(x+1)\left(x^2 - \frac{3}{2}x + 1\right) = 2(x+1)\left[\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{7}{16}\right] \geq 0,$$

$$f\left(\frac{x^2}{4}\right) = \frac{1}{4}(x-2)^2(x+2) \geq 0,$$

odakle slijedi da je:

$$y(2-7x) + 2x^3 - x^2 - x + 2 \geq 0,$$

što znači da je nejednakost (16) točna.

Dakle, točne su i njoj ekvivalentne nejednakosti (15), (14) i (13), tj. nejednakost (1) je točna.

Na kraju ćemo dati jedno poboljšanje nejednakosti (1), tj. dokazat ćemo da vrijedi nejednakost

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq 3 - \frac{9}{2}(ab + bc + ca). \tag{17}$$

Dokaz: Zbog homogenosti nejednakosti (1), možemo pretpostaviti da je $a + b + c = 1$. Tada iz poznate nejednakosti $ab + bc + ca \leq \frac{1}{3}(a+b+c)^2$ dobivamo da je $ab + bc + ca \leq \frac{1}{3}$. Dokazat ćemo sada da vrijedi nejednakost (17). Ona je ekvivalentna s nejednakosšću:

$$\left(\frac{a}{b+c} + \frac{9a(b+c)}{4}\right) + \left(\frac{b}{c+a} + \frac{9b(c+a)}{4}\right) + \left(\frac{c}{a+b} + \frac{9c(a+b)}{4}\right) \geq 3. \tag{18}$$

Iz nejednakosti između aritmetičke i geometrijske sredine slijedi:

$$\sum_{cyclic} \frac{a}{b+c} + \frac{9a(b+c)}{4} \geq \sum_{cyclic} 2\sqrt{\frac{a}{b+c} \cdot \frac{9a(b+c)}{4}} = \sum_{cyclic} 3a = 3.$$

Ovime je nejednakost (18), odnosno (17) dokazana. Nejednakost (17) je bolja (jača) od nejednakosti (1) jer zbog nejednakosti $ab+bc+ca\le\frac{1}{3}$, tj. $-\frac{9}{2}(ab+bc+ca)\ge-\frac{3}{2}$ vrijedi $3-\frac{9}{2}(ab+bc+ca)\ge\frac{3}{2}$.

Literatura

1. **Arslanagić, Š.**, *Matematika za nadarene*, Bosanska riječ, Sarajevo, 2004.
2. **Arslanagić, Š.**, *Matematička čitanka*, Grafičar promet d.o.o., Sarajevo, 2008.
3. **Carstensen, J., Muminagić, A.**, *Dobro poznati zadaci s manje poznatim rješenjima*, Osječki matematički list, Vol. 6(2006), br.1, Osijek, 2006.
4. **Mitrinović, D.**, *Analitičke nejednakosti*, Građevinska knjiga, Beograd, 1970.
5. **Nesbitt, A.M.**, *Problem 15114*, Educational Times, 3 (1903), 37-38.
6. **Arslanagić, Š.**, **Muminagić, A.**, *Više dokaza jedne poznate algebarske nejednakosti,* Zbornik radova 4. kongresa nastavnika matematike RH, 19-30, Zagreb 2010.