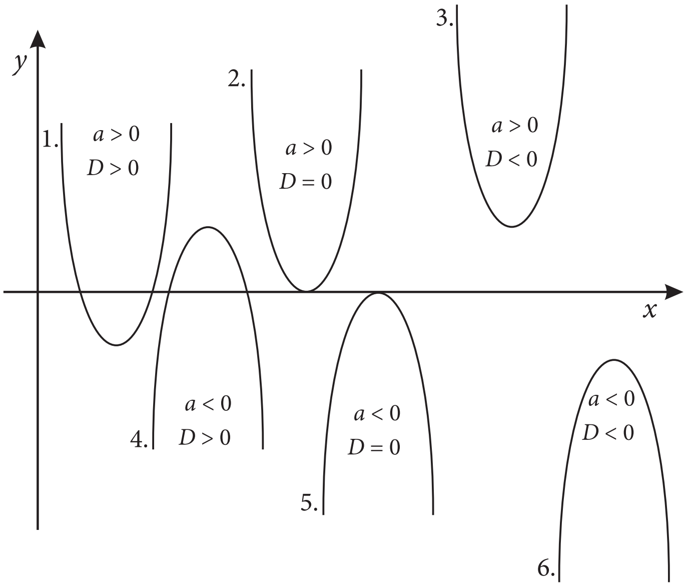
Kompleksne nultočke na vidljivom grafu elementarne funkcije

IZET KALABA[1]

1. Uvod

Za kvadratnu funkciju $f(x) = ax^2 + bx + c$, čija pripadna kvadratna jednadžba ima kompleksna rješenja, kažemo da nema realnih nultočaka, odnosno da njezin graf nema zajedničkih točaka s x-osi. To su na sl. 1. grafovi pod 3. i 6.:



Slika 1.

Cilj ovog članka je, između ostalog, odgovoriti na pitanje kakve veze imaju ti kompleksni brojevi s grafom funkcije, odnosno pokazati da se i ti kompleksni brojevi nalaze na grafu, bar u jednoj ekstenziji, a ne da vise u zraku i ne odnose se ni na što.

1 Izet Kalaba, Srednja škola fra A. Kačića Miošića, Ploče

2. Graf kvadratne funkcije

Uzmimo za primjer funkciju $f(x) = x^2 - 4x + 13$. Ako je izjednačimo s nulom, dobit ćemo $x_{1,2} = 2 \pm 3i$, dakle, brojeve $2 \pm 3i$ funkcija preslikava u realan broj 0. Potražimo li koji se još kompleksni brojevi preslikavaju u realne, dobit ćemo brojeve oblika $x = 2 + vi$. Zaista:

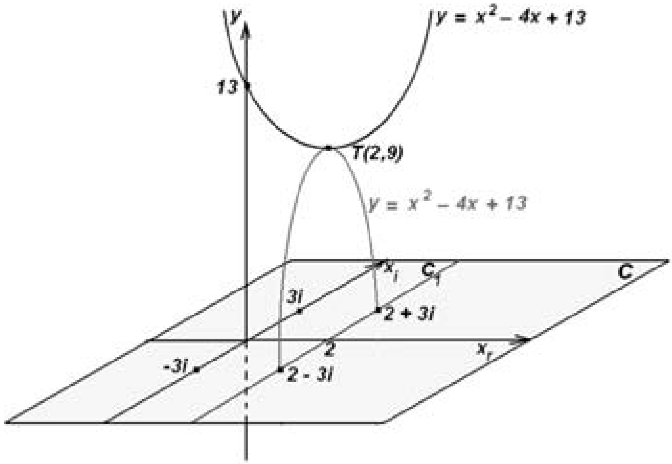
$$f(u + i\,v) = (u + vi)^2 - 4(u + vi) + 13 = u^2 - v^2 - 4u + 13 + i(2uv - 4v).$$

Ako je $f(u+i\,v) \in R$, tada je $2uv - 4v = 0$, odnosno $u = 2$, jer je $v \neq 0$.

Ako za domenu uzmemo skup

$$D = R \cup C_1,\ gdje\ je\ C_1 = \{\, 2 + vi \,/\, v \in R \,\},$$

a za kodomenu skup R, onda je graf funkcije prikazan na sl. 2.:



Slika 2.

Graf funkcije u 3D sastoji se iz dviju parabola; jedne realne iznad x-osi (naš uobičajeni graf), i jedne „imaginarne" parabole čija je ortogonalna projekcija pravac C_1 koji siječe u izračunatim nultočkama $2 \pm 3i$. Element domene x je oblika $u + vi$, gdje je u element osi x_r, a v element osi x_i na sl. 2.

Graf je vidljiv jer su mu koordinate točaka uređene trojke $(u, 0, y)$ i $(2, vi, y)$. Zaključujemo da funkcija $f(x) = x^2 - 4x + 13$ ima dvije kompleksne nultočke, dva probodišta s ravninom C. Poslije ćemo to generalizirati za polinom n-tog stupnja, odnosno „vidjeti" svih n-probodišta, n nultočaka, što realnih, što kompleksnih, računajući i njihovu kratnost, i time dati geometrijsku interpretaciju posljedice Gaussovog osnovnog teorema algebre.

Ako parabola dira x-os, onda ga dira i „imaginarna" parabola, te dvostruku nultočku možemo i tako interpretirati. Primijetimo da se te dvije parabole nalaze u ravninama koje su međusobno okomite te imaju zajedničko tjeme. Tjeme je uvijek realno, bez obzira jesu li nultočke kompleksne ili realne.

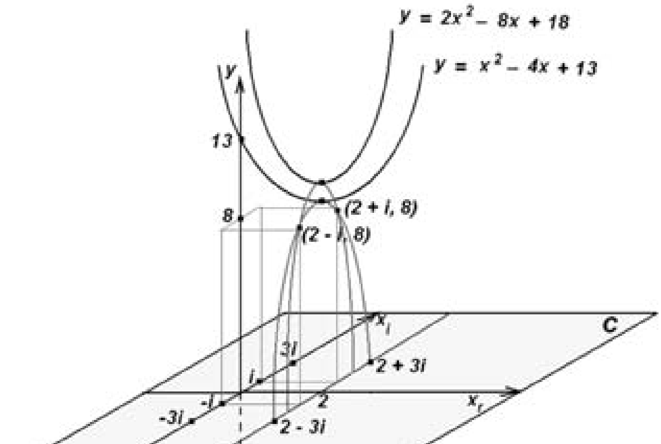
Podsjetimo se, ako su rješenja kvadratne jednadžbe s realnim koeficijentima kompleksni brojevi, onda su oni međusobno konjugirani. Inače, ako su rješenja kvadratne jednadžbe kompleksni brojevi koji nisu konjugirani (ne mislimo na realne brojeve), onda je jednadžba s kompleksnim koeficijentima.

Uzmemo li za domenu skup C, onda je graf objekt u 4D, no time se nećemo baviti u ovom članku. Naime, bavit ćemo se vidljivim grafom u 3D kao svojevrsnim proširenjem (ekstenzijom) iz uobičajenog 2D grafa.

3. Presjek dviju parabola

Trebamo li, pak, riješiti sustav jednadžbi: $y = 2x^2 - 8x + 18$
$y = x^2 - 4x + 13$

grafičkom metodom, ona nam tu neće pomoći, jer ćemo dobiti dvije parabole koje nemaju zajedničkih točaka. Riješimo li sustav računski, dobit ćemo rješenja $(2 + i, 8)$ i $(2 - i, 8)$. Nacrtamo li i pripadne „imaginarne” parabole, vidjet ćemo navedena rješenja u njihovu presjeku, sl. 3.:



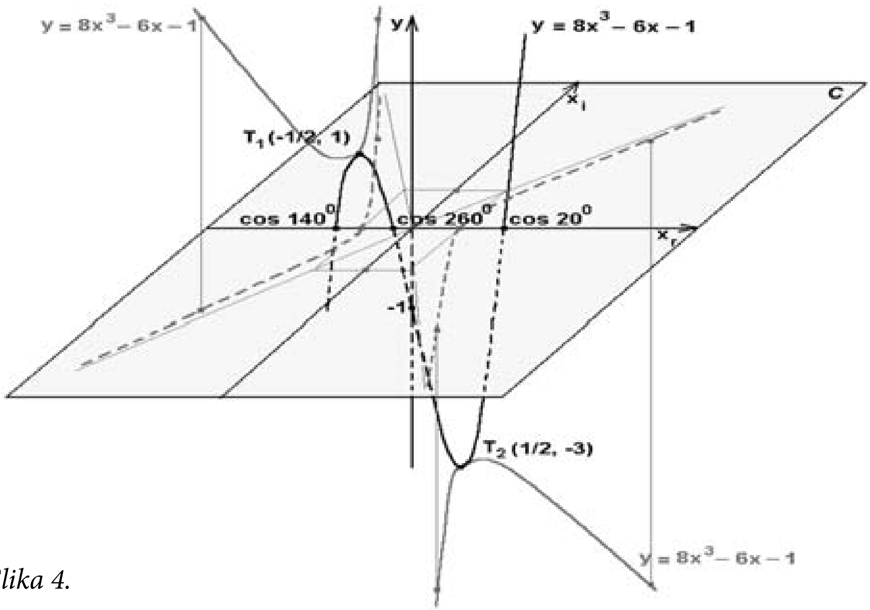
Slika 3.

Inače, ovakva je interpretacija moguća ako je $y = ax^2 + bx + c$ i $y = a'x^2 + b'x + c'$, uz uvjet da je $a'/a = b'/b \neq c'/c$.

Općenito, presjek dviju parabola su dvije uređene četvorke, no taj presjek je u 4D, a već smo rekli da se time nećemo baviti. Ako bismo pokušali navedeno nacrtati na listu papira (koji je 2D), onda bi se previše toga u toj projekciji izgubilo ili preklapalo. No, ipak, izvucimo pouku, u svemu što nas okružuje postoji stvarnost koja nadilazi stvarnost. Ona prva spomenuta svarnost je matematička. Matematičar zna kako se problem rješava, ali to ponekad ne može izvesti (npr. riješiti sustav od stotinu nezavisnih linearnih jednadžbi sa stotinu nepoznanica).

4. Kubna parabola

U srednjoj školi, ponekad se susretnemo s polinomom trećeg stupnja koji treba rastaviti na faktore. Kubna parabola ili graf polinoma trećeg stupnja (uvijek mislimo na polinome s realnim koeficijentima) može presijecati x-os ili u jednoj ili u tri točke. U interpretaciji koju obrađuje ovaj članak ta će parabola uvijek imati tri vidljiva probodišta s ravninom C, ako se broji kratnost nultočaka, sl. 4. Uzet ćemo za primjer $f(x) = 8x^3 - 6x - 1$.



Slika 4.

Vidljivi graf sastoji se iz jednog realnog dijela i dva imaginarna dijela. Realni dio je uobičajeni graf, dok su imaginarni dijelovi prostorne krivulje čije su projekcije na ravninu C dvije grane jedne hiperbole, prikazane isprekidano. Slijedi izvod te tvrdnje:

$$F(u+iv) = 8(u + vi)^3 - 6(u + vi) - 1 =$$

$$= 8u^3 - 24uv^2 - 6u - 1 + i(-24u^2v + 8v^3 + 6v)$$

Ako je $f(u+iv) \in R$, tada je $-24u^2v + 8v^3 + 6v = 0$.

Kako je $v \neq 0$, to je $12u^2 - 4v^2 = 3$, što je jednadžba hiperbole nacrtane isprekidano na sl. 4.

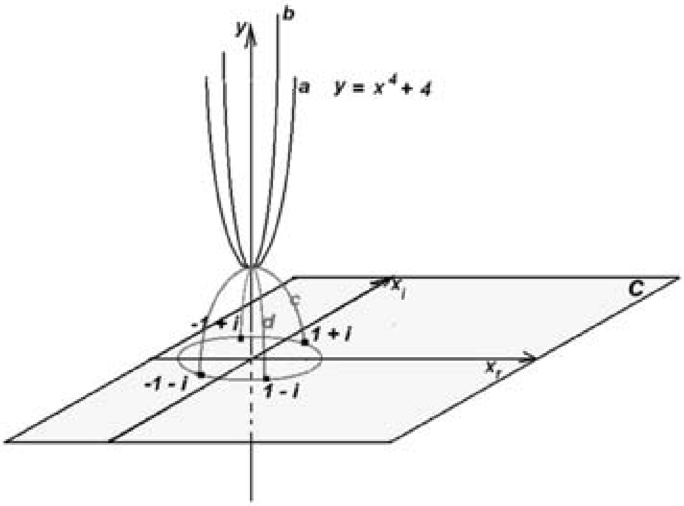
Opredijelio sam se za polinom $f(x) = 8x^3 - 6x - 1$ koji ipak ima tri realne nultočke, zbog rjeđeg pojavljivanja takvih nultočaka u nastavnoj praksi. Naime, nultočke su $x_1 = \cos 20°$, $x_2 = \cos 140°$ i $x_3 = \cos 260°$. Obično algebarske brojeve zamišljamo kao neku kombinaciju korijena (npr. $\sqrt{2+\sqrt[3]{5}}$), dok transcendentne brojeve obično vidimo poput ln 20, tako da bismo na prvi pogled pomislili da je i cos 20° nealgebarski broj, pogotovo zato što se kut od 20° ne može konstruirati ravnalom i šestarom. No, nije tako, oba su beskonačno decimalni neperiodični brojevi, ali jedan je algebarski, a drugi transcendentan. Dakle, algebra i trigonometrija nisu tako odvojene, ispreplIću se i ovdje su se susrele, a najmanje smo ih tu očekivali.

Da smo kubnu parabolu translatirali duž y-osi za npr. 5 mjernih jedinica, dobili bismo parabolu $y = 8x^3 - 6x + 4$ koja bi imala tri probodišta s C-ravninom, jedno realno, te dva konjugirano kompleksna na isprekidanoj hiperboli.

Jednom sam na satu u prvom razredu spomenuo podjelu realnih brojeva na algebarske i transcendentne, dajući samo njihove definicije i poneki primjer (u nastavnom je programu bila podjela na racionalne i iracionalne brojeve, i to smo radili dulje, a mnogo smo toga ponavljali iz osnovne škole). Tu sam podjelu, dakle, samo spomenuo i uskoro je zaboravio. Ali, jedan učenik nije. Nakon tri godine upitao me je li ta podjela realnih brojeva bitna kao ona na racionalne i iracionalne ili je ta podjela tek „onako". Uvijek mi je drago kada učenik postavi pitanje, a ako je to pitanje izvan programa, onda ga doživljavam kao dar zbog veće slobode u odgovoru, mada taj odgovor mora biti sukladan s onim koji bi učenik mogao susresti u svom kasnijem školovanju. Odgovorio sam mu kako je skup algebarskih brojeva prebrojiv, odnosno da se može uspostaviti jednoznačno preslikavanjem sa skupom N, kako ih ima „manje" od transcendentnih, kako je dokazivanje transcendentnosti nekih brojeva doprinijelo razvoju matematike... Igrao sam se s poznatim mislima kao što se sunčeva zraka, koja prolazi kroz prozor, igra s bijelim zrncima prašine od krede, a tražio sam u sebi jednostavniji odgovor. Ne znam je li učenik bio zadovoljan objašnjenjem (mada bi to dobar nastavnik uvijek trebao znati; usput, učenik je redovito išao na natjecanja iz fizike), no znam da sam poslije nastavnog sata dugo razmišljao o Dedekindovoj definiciji iracionalnog broja i o Peanovoj aksiomatici prirodnih brojeva - zbog učenika, ne zbog sebe, jer u posve matematičkim prostorima možemo uživati u apsolutnoj točnosti, dok je fizikalni svijet uvijek pomalo zamagljen pa se naš kontinuum realnih brojeva nikako nije uklapao u njegovo viđenje kvantne fizike u kojoj postoji diskontinuitet.

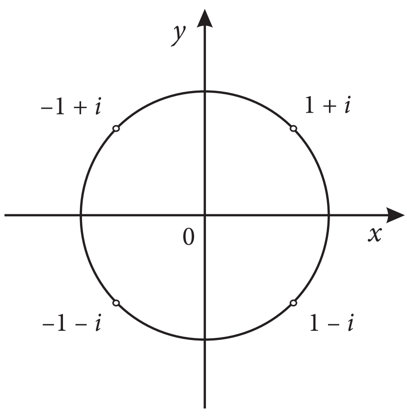
5. Geometrijska interpretacija posljedice osnovnog teorema algebre

Čitatelj je vjerojatno na prethodnoj slici očekivao polinom što većeg parnog stupnja, bez realnih nultočaka, kako bi ideja članka došla do punog izražaja, jer bi tu imaginarni dijelovi grafa imali u domeni ili, bolje reći, u dijelu C ravnine onoliko probodišta koliki je stupanj polinoma, pod uvjetom da su nultočke jednostruke. Inače, pojednostavljeno rečeno, osnovni teorem algebre kaže da polinom n-tog stupnja ima bar jednu nultočku, realnu ili kompleksnu, dok je njegova posljedica kako ih ima onoliko koliki je stupanj polinoma, opet računajući njihovu kratnost, ako je ona neparna onda imamo probodište s C ravninom, a ako je parna imamo dodir, sl. 5.



Slika 5. Sva probodišta ili sve kompleksne nultočke polinoma
$f(x) = x^4 + 4$ koji nema realnih nultočaka

Do sada je u nastavnoj praksi samo parabola a bila njegov graf. Vidimo da u prostoru postoje još tri parabole: b iznad x_i -osi, te c i d iznad (ispod) simetrala prvog i trećeg kvadranta C ravnine. Učenik bi u četvrtom razredu srednje škole, u programu u kojemu se obrađuje n-ti korijen iz realnog broja, pa čak i u drugom razredu, umjesto prethodne slike vidio sljedeće, sl. 6.



Slika 6. Sva četiri četvrta korijena iz broja −4.

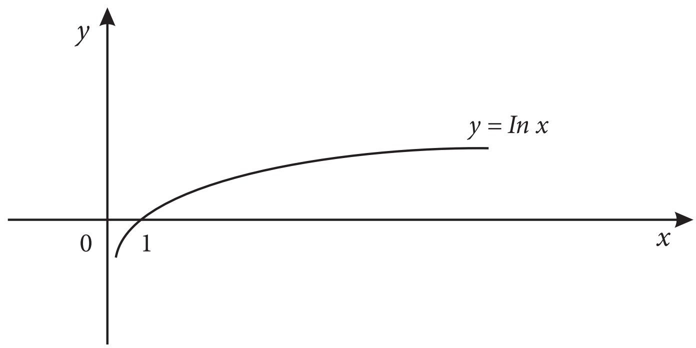
Slika je siromašnija od prethodne sl. 5. ne samo zbog dimenzije manje.

Ako prethodnu parabolu translatiramo duž y-osi za −4, tada joj tjeme pada u ishodište, te četverostruku nultočku $x = 0$ možemo interpretirati i kao dodir četiriju parabola *a, b, c* i *d* u ishodištu.

Za prethodni primjer mogli smo uzeti i općenitiji polinom sa svim članovima, npr. $f(x) = 6x^6 + 4x^5 - 3x^4 + 2x^3 - 5x^2 + 5x + 7$. Tada bi njegov graf u prostoru izgledao kao da je netko vješto razbacao krivulje, što realnu, što imaginarne, ostavljajući negdje jednu jedinu, a negdje ih zbijajući u skupine, stvarajući tako matematiku koja sliči na igru i igru koja sliči na prirodu. Ta ljepota grafa, prema kojoj je sl. 4. tek mali dio, djeluje kao čudo, možda zbog pomisli da je cijeli ovaj članak stvoren samo zbog toga kako bi se jedan pogled matematičara odmarao na glatkim krivuljama grana tih grafova. U nekom programskom paketu to bi se moglo i predočiti bez metoda numeričke analize.

6. Vratimo realnu domenu

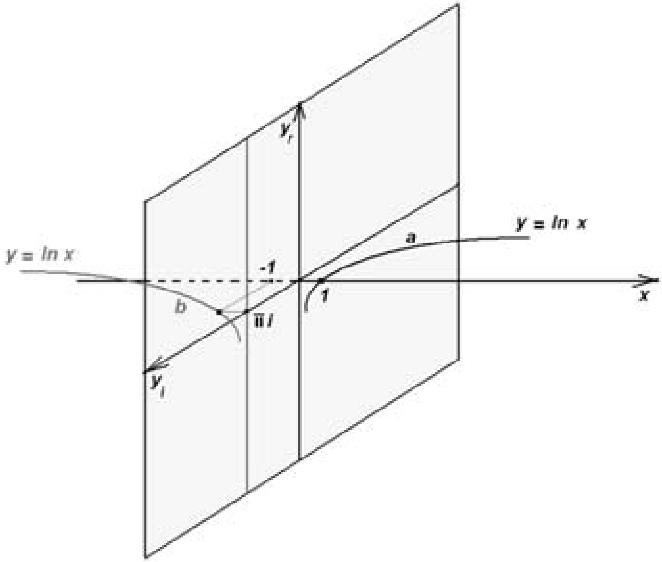
Ako zamijenimo domenu i kodomenu, ali ne u smislu inverzne funkcije, već da skup R preslikavamo u skup C, onda možemo „vidjeti" i logaritme negativnih brojeva. Naime, nastavnik u drugom razredu srednje škole obično kaže učenicima kako je logaritamska funkcija definirana samo za pozitivne brojeve ili, nespretno, kako logaritmi negativnih brojeva ne postoje, sl. 7. (iako je s učenicima na početku drugoga razreda obradio kompleksne brojeve, što nespretnost čini većom). Bilo bi bolje reći kako su logaritmi negativnih brojeva kompleksni brojevi koje će (kompleksne funkcije) možda susresti u kasnijem školovanju, ovisno koji studij odaberu.



Slika 7. I pored ljepote (glatkoće) krivulje, graf se, ipak, doima otužno

Ako se čitatelju prethodna sugestija čini neutemeljenom, usporedimo je s izlaganjem nastavnika u osmom razredu, koji, radeći drugi korijen, potpuno drugačije kaže učenicima: *„Mi ćemo računati drugi korijen samo iz pozitivnih realnih brojeva i nule, dok ćete drugi korijen iz negativnog broja raditi u srednjoj školi"*. Bravo, nastavniče!

Dakle, slijedi graf prethodne funkcije, sl. 8., gdje je domena $R \setminus \{0\}$, a kodomena $R \cup C_1$, gdje je $C_1 = \{a + \pi i \,/\, a \in R\}$:



Slika 8.

Slijedi i tablični prikaz funkcije $f_{(x)} = ln\ x$ za $x < 0$:

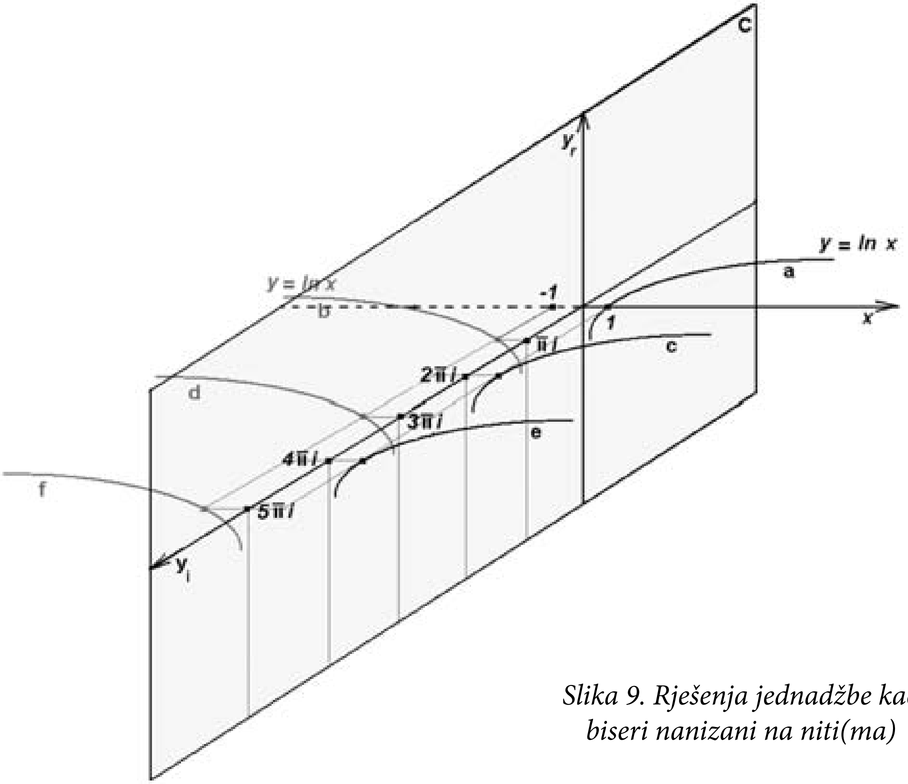
x	$-1/e$	-1	-2	$-e$	-3
$f_{(x)}$	$-1 + \pi i$	πi	$\ln 2 + \pi i$	$1 + \pi i$	$\ln 3 + \pi i$

U popunjavanju drugog reda tablice koristili smo formulu

$$e^{u+vi} = e^u e^{vi} = e^u(\cos v + i \sin v),\ v \in R.$$

Ako umjesto funkcije $f(x) = ln\ x$ promatramo jednadžbu $y = ln\ x$, tada su sva rješenja te jednadžbe, gdje je $x \in R \setminus \{0\}$, a $y \in C$, prikazana na sl. 9. Razlika je što je funkcija jednoznačno preslikavanje, te jednom elementu x iz domene odgovara samo jedan y iz kodomene, dok kod jednadžbe to nije slučaj. Tako kod funkcije $f_{(x)} = \ln x$ vrijedi $f_{(1)} = 0$, dok kod jednadžbe $y = \ln x$ vrijedi $\ln 1 = 2k\pi i,\ k \in Z$. Dakle, beskonačno mnogo uređenih parova oblika $(1,\ 2k\pi i)$ predstavlja rješenje jednadžbe $y = \ln x$, dok je samo jedna točka s apscisom 1, (1, 0), na grafu funkcije $f(x) = \ln x$.

Rješenja jednadžbe predočena su točkama na granama *a, b, c*..., a grane se nalaze u paralelnim ravninama s jednakim razmacima od π mjernih jedinica. Grane u 3D nisu spojene, a u 4D? (Neka to ostane mala tajna autora, mada je čitatelj uz određeni trud može otkriti.)



Slika 9. Rješenja jednadžbe kao biseri nanizani na niti(ma)

Mogli smo dati i primjere s jednadžbama krivulja drugog reda, te vidjeti kako se, recimo, dvije kružnice sijeku u dvjema točkama, iako su jedna izvan druge, nešto slično sl. 3. Naravno, ovdje pod kružnicom mislimo na njezin analitički izraz, a ne na sintetički.

7. Zaključak

Ovaj bi članak trebao potaknuti nastavnika da, gdje god je to moguće i metodički opravdano, spomene kompleksne brojeve. Učenici koji tjedno imaju tri ili četiri sata matematike dobro prihvaćaju kompleksne brojeve. Kod onih drugih, s jednim ili dva sata, to ide teže, pa nekim učenicima imaginarni brojevi zaista ostanu imaginarni, a stavljanje točke na imaginarnu jedinicu (i) predstavlja zadovoljstvo samo nastavniku, dok učenici, npr. u zanimanju *kuhar*, ostaju potpuno ravnodušni.

Literatura:

1. B. Šantić, *Zbirka +, jednadžbe, nejednadžbe, sustavi*, Školska knjiga, Zagreb, 2006.
2. S. Kurepa, *Matematička analiza 2, funkcije jedne varijable*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1987.