Jednadžba *x* + *yi* = *u* + *vi*

IVICA GUSIĆ[1], LUKA LASIĆ[2]

Razmotrimo jednadžbu

$$x + yi = u + vi. \tag{1}$$

Ako su x, y, u, v realni brojevi, dobijemo $u = x$, $v = y$. Naime, prema definiciji jednakosti kompleksnih brojeva, dva su kompleksna broja jednaka ako su im jednaki realni dijelovi i jednaki imaginarni dijelovi. Općenito, tj. ako su x, y, u, v kompleksni brojevi, to ne vrijedi. Na primjer,

$$i + 1 \cdot i = 1 + (2 + i) \cdot i.$$

U ovome članku raspravljamo o rješenjima jednadžbe (1) u kompleksnim brojevima x, y, u, v. Problem se pojavljuje kod parametrizacije kompleksne jedinične kružnice, gdje za (u, v) s jedinične kružnice, iz

$$\cos z + i \sin z = u + vi \tag{2}$$

treba zaključiti da je $u = \cos z$, $v = \sin z$. To ćemo obrazložiti poslije.

Ako (1) zapišemo kao $u = x + (y - v)i$, vidimo da x, y, v možemo birati po volji, uz uvjet $v \neq y$, i dobit ćemo rješenje u kojemu nije $u = x$, niti je $v = y$. Postavlja se pitanje koji uvjet treba dodati da bi iz (1) slijedilo $u = x$ i $v = y$. Navedimo nekoliko mogućih uvjeta.

(i) $u = x$,
(ii) $x + y = u + v$,
(iii) $x - y = u - v$,
(iv) $\overline{x} + \overline{y}i = \overline{u} + \overline{v}i$, gdje crtica označava kompleksno konjugiranje,
(v) $x^2 + y^2 = u^2 + v^2$,
(vi) $x^2 - y^2 = u^2 - v^2$,
(vii) $xy = uv$,
(viii) $xv = uy$,
(ix) $x^2 - y^2 + x + 2xyi = u^2 - v^2 + u + 2uvi$,
(x) $\left(x\overline{x} - y\overline{y} + 1 + \left(\overline{x}y - x\overline{y}\right)i\right)x = \left(u\overline{u} - v\overline{v} + 1 + \left(\overline{u}v - u\overline{v}\right)i\right)u.$

[1] Ivica Gusić, Fakultet kemijskog inženjerstva i tehnologije, Zagreb
[2] Luka Lasić, Fakultet kemijskog inženjerstva i tehnologije, Zagreb

Pokušajte sami provjeriti ove uvjete, a nakon toga pogledajte naša obrazloženja.

(i) Ovo je jednostavno, jer nakon uvrštavanja $u = x$ u (1) dobijemo $v = y$.

(ii) $x + y = u + v$ napišemo kao $x - u = v - y$, a jednakost $x + yi = u + vi$ kao $x - u = (v - y)i$. Izjednačavanjem dobijemo $v = y$, a odavde $u = x$.

(iii) $x - y = u - v$ napišemo kao $x - u = y - v$, a jednakost $x + yi = u + vi$ kao $x - u = (v - y)i$. Izjednačavanjem opet dobijemo $v = y$, a odavde $u = x$.

(iv) Konjugiranjem jednakosti $x + yi = u + vi$ dobijemo $\overline{x} - \overline{y}i = \overline{u} - \overline{v}i$. Zbrajanjem s $\overline{x} + \overline{y}i = \overline{u} + \overline{v}i$ dobijemo $2\overline{x} = 2\overline{u}$, a odavde $u = x$ i $v = y$.

(v) Kvadriranjem jednakosti $x + yi = u + vi$ dobijemo $x^2 - y^2 + 2xyi = u^2 - v^2 + 2uvi$, a zbrajanjem s $x^2 + y^2 = u^2 + v^2$ i kraćenjem $x^2 + xyi = u^2 + uvi$, tj. $x(x + yi) = u(u + vi)$. Sad primjenom (1) dobijemo $u = x$ i odatle $v = y$.

(vi) $x^2 - y^2 = u^2 - v^2$ zapišemo kao $x^2 + (-v)^2 = u^2 + (-y)^2$, a $x + yi = u + vi$ kao $x + (-v)i = u + (-y)i$. Sad primijenimo (iii) i dobijemo $u = x$, a odavde $v = y$.

(vii) Kvadriranjem $x + yi = u + vi$ i uvrštavanjem $xy = uv$ dobijemo $x^2 - y^2 = u^2 - v^2$, pa možemo nastaviti kao u (iv).

(viii) $xv = uy$ zapišimo kao $x(-v) = u(-y)$, a $x + yi = u + vi$ kao $x + (-v)i = u + (-y)i$, pa nastavimo kao u (v).

(ix) Ovo možemo zapisati kao $(x + yi)^2 + x = (u + vi)^2 + u$ pa, kombinirajući s (1), dobijemo $u = x$.

(x) Ovo možemo zapisati kao $(|x + yi|^2 + 1)x = (|u + vi|^2 + 1)u$ pa, kombinirajući s (1), nakon dijeljenja dobijemo $u = x$.

Obrazloženja (v) - (viii) su pogrešna. Namjerno smo ih uvrstili kao izazov čitateljima, kako bismo ih potaknuli na raspravu. Naime, u (v) smo neoprezno dijelili s $x + yi$, a u (vi), (vii) i (viii) smo koristili (v). To pokazuje i primjer

$$1 + i \cdot i = i + (-1)i.$$

Tu je $x + yi = u + vi = 0$, $x = 1$, $u = i$, $y = i$, $v = -1$. Slične bismo kontraprimjere mogli naći i za (iv) - (vi).

Loša rješenja mogu se popraviti na sljedeći način.

(v)' Sustav $x + yi = u + vi$, $x^2 + y^2 = u^2 + v^2$ ima rješenje $u = x$, $v = y$ ili $x + yi = 0$.

(vi)' Sustav $x + yi = u + vi$, $x^2 - y^2 = u^2 - v^2$ ima rješenje $u = x$, $v = y$ ili $x - vi = 0$.

(vii)' Sustav $x + yi = u + vi$, $xy = uv$ ima rješenje $u = x$, $v = y$ ili $x - vi = 0$.

(viii)' Sustav $x + yi = u + vi$, $xv = uy$ ima rješenje $u = x$, $v = y$ ili $x + yi = 0$.

Možemo interpretirati i ovako.

Sustav $x + yi = u + vi$, $x^2 + y^2 = u^2 + v^2$, $x + yi \neq 0$ ima rješenje $u = x$, $v = y$. Slično dobivamo za ostale slučajeve.

Navedimo sada još jedno rješenje sustava

$$x + yi = u + vi,$$

$$x^2 + y^2 = u^2 + v^2,$$

$$x + yi \neq 0.$$

$x^2 + y^2 = u^2 + v^2$ napišemo kao $(x + yi)(x - yi) = (u + vi)(u - vi)$, pa zbog $x + yi = u + vi \neq 0$ dobijemo $x - yi = u - vi$. Kombinirajući s $x + yi = u + vi$, dobijemo $u = x$ i $v = y$.

Objasnimo kako u (2) zaključujemo da je $u = \cos z$, $v = \sin z$.

Vrijedi $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$, a jer je (u, v) na kompleksnoj jediničnoj kružnici, vrijedi i $u^2 + v^2 = 1$. Sad još treba uočiti da za kompleksne brojeve x, y iz $x^2 + y^2 \neq 0$ slijedi $x + yi \neq 0$.

Uočimo da smo u (i) - (iv) i (ix) - (x) jednadžbi (1) dodali još jednu, a u (v)' - (viii)' dodali smo po jednu jednadžbu i jednu nejednadžbu. Raznim dosjetkama svaku od tih jednadžba i nejednadžba možemo zapisati kao jednu jednadžbu. Na primjer, sustav

$$x^2 + y^2 = u^2 + v^2,$$

$$x + yi \neq 0$$

možemo zapisati kao

$$|x + yi|^{|x^2+y^2-u^2-v^2|} = 1$$

(uz uobičajenu konvenciju da 0^0 nije definirano). Čak bismo sve mogli zapisati kao jednu jednadžbu.

Na primjer, sustav

$$x + yi = u + vi,$$

$$x^2 + y^2 = u^2 + v^2,$$

$$x + yi \neq 0$$

mogao bi se zapisati kao

$$|x + yi|^{|x^2+y^2-u^2-v^2|^2+|x+yi-u-vi|^2} = 1$$

(a uz pomoć konjugiranja mogu se izbjeći i apsolutne vrijednosti). Također, uvjet (i), (ii) i (iii) mogli bismo zamijeniti općenitijim

$$x + \alpha y = u + \alpha v, \text{ za neki } \alpha \neq i,$$

a uvjet (iv) općenitijim

$$\bar{x} + \alpha \bar{y} = \bar{u} + \alpha \bar{v}, \text{ za neki } \alpha \neq -1.$$

To ne smatramo nekim novim mogućnostima. Uočimo da se svi navedeni primjeri mogu svrstati u ovih šest skupina.

(A) $x + yi = u + vi$, $x + \alpha y = u + \alpha v$, za neki $\alpha \neq i$, u njega idu (i) - (iii),

(B) $x + yi = u + vi$, $\bar{x} + \alpha \bar{y} = \bar{u} + \alpha \bar{v}$, za neki $\alpha \neq -i$, u njega ide (iv)

(C) $x + yi = u + vi$, $x^2 + y^2 = u^2 + v^2$, $x + yi \neq 0$, u njega idu (v)' i (vi)'

(D) $x + yi = u + vi$, $xy = uv$, $x - yi \neq 0$, koji se svodi na (C), u njega idu (vii)' i (viii)'.

(E) $x + yi = u + vi$, $f(x + yi) + g(x) = f(u + vi) + g(u)$, gdje je f neka funkcija, a g neka injektivna funkcija (na primjer $g(z) = z$), u nju spada (ix).

(F) $x + yi = u + vi$, $f(x + yi)g(x) = f(u + vi)g(u)$, gdje je f neka funkcija koja ne postiže vrijednost 0 (na primjer $f(z) = z\bar{z} + 1$, a g neka injektivna funkcija, u nju spada (x).

Postavlja se pitanje ima li, osim ovih, još nekih bitno novih mogućnosti, tj. primjera jednadžbe, sustava jednadžbe i nejednadžbe, ili sustava dviju jednadžba, tako da, kad se dodaju jednadžbi (1), dobijemo $u = x$, $v = y$. Dopušteno je korištenje osnovnih operacija s kompleksnim brojevima: zbrajanje, množenje i konjugiranje (radi kratkoće, i apsolutna vrijednost).

Pokušajte i vi...