IZ INFORMATIKE

PRIBLIŽNO RJEŠAVANJE NELINEARNIH SUSTAVA

Newton-Raphsonova metoda

MARIJAN ČANČAREVIĆ[1]

Uvod

Elementarni problem rješavanja sustava nelinearnih jednadžbi, bilo u srednjoj školi (npr. presjek krivulja 2. reda,...) ili na fakultetima (npr. ekstremi funkcija više varijabli, ovojnice,...), često se ne može eksplicite riješiti. Zato je nužno uvesti metode numeričke matematike kojima će učenik ili student moći odrediti približna rješenja.

Nakon što se u srednjoj školi obrade krivulje 2. reda, većina nastavnika sigurno postavi pitanje nalaženja sjecišta krivulja. Problemi nastaju (očekivano) kada se računski treba odrediti, recimo, presjek kružnice $(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2$ i elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$. Grafički to uglavnom učenici bez problema riješe. Umjesto mukotrpnog, najčešće uzaludnog rješavanja sustava elementarnom matematikom, jednostavnije je iskoristiti grafički pronađeno približno rješenje i poboljšati ga primjenom neke jednostavne metode približnog rješavanja jednadžbi.

U slučaju da se jedna od jednadžbi sustava $f(x, y) = 0$, $g(x, y) = 0$ može eksplicitno riješiti po jednoj od varijabli u okolini lociranog rješenja, npr. $y = F(x)$ ili $x = G(y)$, onda uvrštavanjem u drugu jednadžbu sustav svodimo na rješavanje jedne nelinearne jednadžbe s jednom nepoznanicom. U srednjim školama (tehničke škole, gimnazije) tada se za rješavanje može primijeniti dobro poznata **metoda bisekcije** (**polovljenja intervala**). Primjerenost ove metode učenicima srednjih škola ogleda se u ne previše zahtjevnom računu i jednostavnoj grafičkoj interpretaciji. Naglasimo da uporaba grafičkog kalkulatora ili računala i nekog od matematičkih softwarea bitno olakšava postupak.

U općem slučaju, pogotovo kad ne možemo problem svesti na jednu jednadžbu s jednom nepoznanicom, sustav nelinearnih jednadžbi možemo riješiti **Newton-Raphsonovovom metodom** koja se, uz pomoć programa **Matlab**, u mome višegodišnjem radu sa studentima pokazala jednostavnom i uspješnom. U nastavku je ukratko izložena metoda, a pokazana je i njezina implementacija u programu Matlab.

[1]Marijan Čančarević, Srednja gospodarska škola, Križevci

Newton-Raphsonova metoda

Neka je zadan sustav od n nelinearnih jednadžbi s n nepoznanica:

$$f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \dots f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \tag{1}$$

gdje su f_i: $R^n \to R$, $i = 1, 2, \dots, n$ i $x^{(k)} = (x_1^{(k)}, \dots x_n^{(k)})$ približno rješenje sustava (1). Linearizirajmo sustav u okolini približnog rješenja $x^{(k)} = (x_1^{(k)}, \dots x_n^{(k)})$. Ako je $c = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ točno rješenje sustava, funkcije f_i klase C^2 u okolini točke $x^{(k)} = (x_1^{(k)}, \dots x_n^{(k)})$, tada prema Taylorovoj formuli za funkcije f_i vrijedi:

$$\begin{aligned} f_i(c_1, c_2, \dots, c_n) &= f_i\left(x_1^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}\right) + \frac{\partial f_i}{\partial x_1}\left(x_1^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}\right)\left(c_1 - x_1^{(k)}\right) + \cdots \\ &\cdots + \frac{\partial f_i}{\partial x_n}\left(x_1^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}\right)\left(c_n - x_n^{(k)}\right) + R_i, \; i = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \tag{2}$$

gdje je $R_i\ (x_1^{(k)}, \dots x_n^{(k)})$ odgovarajući ostatak u Taylorovoj formuli.

Prema pretpostavci je $f_i(c_1, c_2, \dots, c_n) = 0$, pa, upotrijebimo li matrični zapis, sustav (2) poprima sljedeći oblik:

$$0 = F(x^{(k)}) + J(x^{(k)})(\mathrm{c} - x^{(k)}) + R^{(k)}, \tag{3}$$

gdje su:

$$0 = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \; F\left(x^{(k)}\right) = \begin{bmatrix} f_1\left(x_1^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}\right) \\ \vdots \\ f_n\left(x_1^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}\right) \end{bmatrix}, \; x^{(k)} = \begin{bmatrix} x_1^{(k)} \\ \vdots \\ x_n^{(k)} \end{bmatrix}, \; c = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}, \; R^{(k)} = \begin{bmatrix} R_1^{(k)} \\ \vdots \\ R_n^{(k)} \end{bmatrix},$$

a $J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$ Jacobieva matrica funkcija f_i, $i = 1, 2, \dots, n$.

Ako je matrica J regularna ($\det J \neq 0$), tada množenjem slijeva matricom J^{-1} jednadžbe (3) dobivamo:

$$0 = J^{-1}(x^{(k)})\, F(x^{(k)}) + \mathrm{c} - x^{(k)} + J^{-1}(x^{(k)})\, R^{(k)}$$

odnosno

$$c = x^{(k)} - J^{-1}(x^{(k)})\, F(x^{(k)}) - J^{-1}(x^{(k)})\, R^{(k)}. \tag{4}$$

Izostavimo li zadnji član u jednadžbi (4), umjesto točnog rješenja $c = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ dobivamo njegovu aproksimaciju koju ćemo označiti s $x^{(k+1)}$. Prema tome, formulom

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - J^{-1}(x^{(k)})\, F(x^{(k)}), \; k = 0, 1, 2, \dots \tag{5}$$

zadan je niz iteracija kojima se nalazi približno rješenje nelinearnog sustava (1). Formula (5) najčešće se naziva **Newton-Raphsonova** iteracijska formula.

Za definiranu normu u prostoru R^n:

$$||x|| = ||x||_\infty = \max_i |x_i|,$$

uvjete konvergencije niza ($x^{(n)}$) u okolini točke ($x_1^{(0)}, \ldots, x_1^{(n)}$) daje sljedeći teorem koji navodimo bez dokaza:

Teorem 1. Ako su funkcije f_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ klase $C^2(S)$, S kugla $K(x^{(0)}, R)$, ($x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}$) približno rješenje, a $c = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$ rješenje sustava (1) i vrijedi:

$$(i) \quad a_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \left| \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j \partial x_k} \right| \leq M,\ i, j = 1, 2, \ldots, n$$

$$(ii) \quad \left\| F\left(x^{(0)}\right) \right\| \leq n,$$

$$(iii) \quad \det(J^{-1}) \neq 0,\ \left\| J^{-1}\left(x^{(0)}\right) \right\| \leq b,$$

$$(iv) \quad p = nMNb^2 \leq \frac{1}{2}, r = \frac{1 - \sqrt{1 - 2p}}{p} Nb \leq R.$$

Tada niz iteracija dobiven Newton-Raphsonovom formulom konvergira rješenju $c = (c_1, c_2, \ldots, c_n) \in K(x^{(0)}, r)$.

Umjesto ispitivanja uvjeta teorema možemo jednostavno i s velikom pouzdanošću „eksperimentalno" ispitati konvergenciju tako da u postupku iteracije pratimo da li se znamenke iteracijskog niza stabiliziraju. Tako možemo, kad u nekom koraku stanemo, i ocijeniti grešku: greška je po apsolutnoj vrijednosti manja od mjesne vrijednosti zadnje stabilizirane znamenke.

Napomena 1. Newton-Raphsonova metoda se može pojednostavniti tako da se $J^{-1}(x^{(k)})$ izračuna samo u prvom koraku i njezina vrijednost zadrži za sve sljedeće. Iterativni niz tada je zadan formulom:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - J^{-1}(x^{(0)})\, F(x^{(k)}),\ k = 0, 1, 2, \ldots \tag{6}$$

Ovime smo dobili manje računanja u svakom koraku, ali smo smanjili brzinu konvergencije.

Napomena 2. Uočimo da Newtonov-Raphsonova metoda (formula (5)) za $n = 1$ (jednodimenzionalni slučaj) prelazi u **Newtonovu metodu (metodu tangente)** za rješavanje jednadžbi oblika $f(x) = 0$:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{1}{f'(x_k)} \cdot f(x_k),\ k = 0, 1, 2, \ldots$$

Dobra strana Newton-Raphsonove metode je što je greška svake nepoznanice u jednom koraku proporcionalna kvadratu greške u prethodnom, a to znači brzu konvergenciju niza aproksimacija. Međutim, problem predstavlja računanje parcijalnih derivacija u Jacobievoj matrici funkcija f_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ i odabir početne aproksimacije $x^{(0)}$ koja osigurava konvergenciju niza $(x^{(n)})$.

Postoji način za rješavanje oba navedena problema modificiranjem Newton-Raphsonove metode, kojim se u ovom članku nećemo baviti. Riješimo dva primjera.

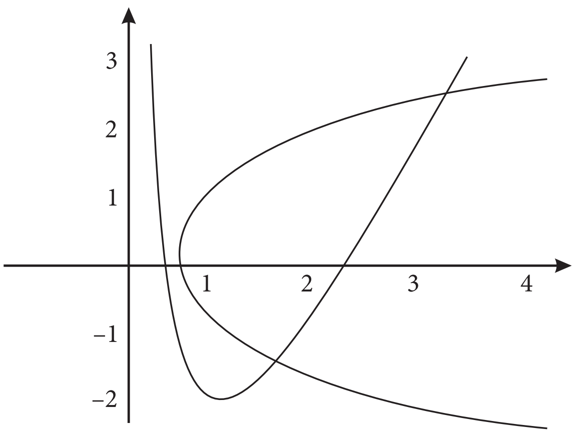
Primjer 1. Newton-Raphsonovom metodom odredimo prvu aproksimaciju rješenja sustava:

$$2x^2 - xy - 5x + 1 = 0, x + 3 \log x - y^2 = 0.$$

Rješenje: Kako početna aproksimacija nije zadana, odredimo je skiciranjem krivulja koje predstavljaju svaka od jednadžbi sustava. Očito mora biti $x > 0$ pa iz prve jednadžbe nalazimo $y = 2x + \frac{1}{x} - 5$, a iz druge $y^2 = x + 3 \log x$. Izračunajmo neke vrijednosti y za zadane x i prikažimo tablicom (računamo na 4 decimale):

x	0.2	0.6	1.0	1.4	1.8	2.2	2.6	3.0	3.4	3.8
y	0.4000	−2.1333	−2.000	−1.4857	−0.8444	−0.1455	0.5846	1.3333	2.0941	2.8632
y		±0.6149	±1.0000	±1.2434	±1.4336	±1.5945	±1.7364	±1.8647	±1.9828	±2.0928

Iz tablice nalazimo točke obaju grafova, intervale u kojima su sjecišta grafova s x-osi, a iz analitičkog zapisa ponašanje funkcija u rubnim točkama domena. Imamo sljedeću skicu:



Pomoću slike lociramo rješenja sustava: $(x_1, y_1) \in \langle 1, 2 \rangle \times \langle -1, -2 \rangle$ i $(x_2, y_2) \in \langle 3, 4 \rangle \times \langle 2, 3 \rangle$. Preostaje nam za svako od navedenih rješenja odabrati početnu aproksimaciju i provesti odgovarajući račun prema Newton-Raphsonovoj metodi. Tako za prvo rješenje možemo uzeti da je $(x^{(0)}, y^{(0)}) = r^{(0)} = (1.5, -1.5)$. Nadalje je:

$$F=\begin{bmatrix} 2x^2-xy-5x+1 \\ x+3\log x-y^2 \end{bmatrix},\ J=\begin{bmatrix} 4x-y-5 & -x \\ 1+\dfrac{3}{x\ln 10} & -2y \end{bmatrix} \text{ odnosno}$$

$$F\left(r^{(0)}\right)=\begin{bmatrix} 0.2500 \\ -0.2217 \end{bmatrix},\ J\left(r^{(0)}\right)=\begin{bmatrix} 2.5 & -1.5 \\ 1.8686 & 3 \end{bmatrix},\ \det J=10.3029 \text{ i inverzna matrica}$$

$$J^{-1}\left(r^{(0)}\right)=\begin{bmatrix} 0.2912 & 0.1456 \\ -0.1814 & 0.2427 \end{bmatrix}.$$

Uvrstimo li to u formulu (4), dobivamo:

$$r^{(1)}=\begin{bmatrix} 1.5 \\ -1.5 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 0.2912 & 0.1456 \\ -0.1814 & 0.2427 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0.2500 \\ -0.2217 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1.5 \\ -1.5 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 0.0405 \\ -0.0991 \end{bmatrix},\ \text{tj.}$$

$$r^{(1)}=\begin{bmatrix} 1.4595 \\ -1.4009 \end{bmatrix}.$$

Dakle, prva aproksimacija rješenja je (1.4595, −1.4009). Analogno nalazimo drugo, treće,... približno rješenje zadanog sustava.

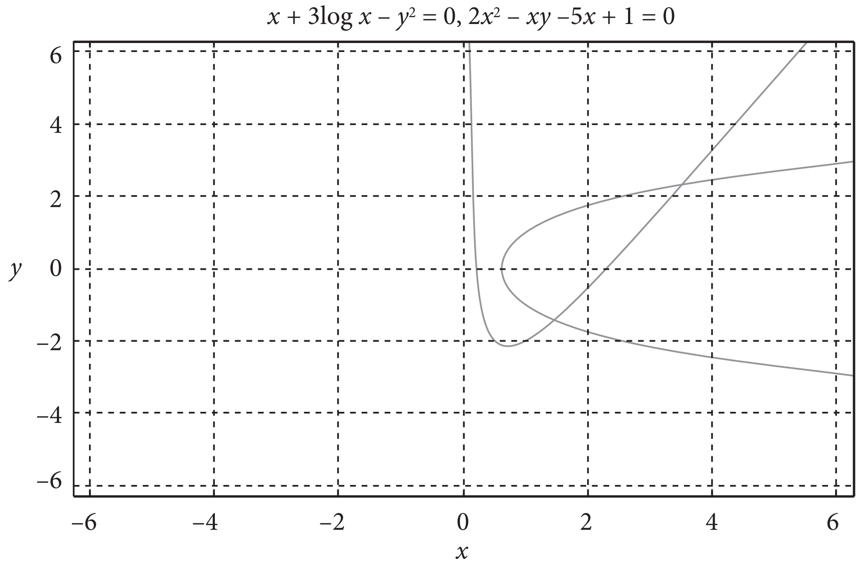
Prvu aproksimaciju za drugo rješenje sustava dobivamo iz sljedeće matrične jednadžbe:

$$r^{(1)}=\begin{bmatrix} 3.5 \\ 2.5 \end{bmatrix}-J^{-1}(3.5,\ 2.5)F(3.5,\ 2.5).$$

Nakon provedenog računa, prva je aproksimacija uređeni par (3.4941,2.2748). Ukoliko nam je «pri ruci" računalo i neki od mnogih matematičkih softwarea, onda možemo bez puno muke riješiti naš zadatak. Pokažimo kako bismo korištenjem **Matlaba** došli do prve tri aproksimacije.

Prvo slika za lociranje rješenja:

```
>> syms x y
>> f1=2*x^2-x*y-5*x+1;
>> f2=x+3*log10(x)-y^2;
>> ezplot(f1)
>> hold on
>> ezplot(f2)
>> grid
```



i račun:

```
>> x0=1.5;y0=-1.5;
for k=1:3
F=[f1;f2];J=[diff(F,x) diff(F,y)];
r=[x0,y0]' ;
F=subs(F,{x,y},{x0,y0})
J=subs(J,{x,y},{x0,y0});
r=r-inv(J)*F
x0=r(1,1);y0=r(2,1);
end

F = 0.2500
-0.2217
r = 1.4595
-1.4009
F = 0.0073
-0.0103
r =1.4589
-1.3968
F = 1.0e-004 * 0.0315
-0.1679
r = 1.4589
-1.3968
```

Vidimo da se druga i treća aproksimacija podudaraju u sva četiri decimalna mjesta i vrijednosti funkcija $f_1(x, y) = 2x^2 - xy - 5x + 1$ i $f_2(x, y) = x + 3 \log x - y^2$ u (1.4589, −1.3968) su 0.00000315 i −0.00001679, dakle blizu nule, što potvrđuje brzu konvergenciju niza aproksimacija u Newton-Raphsonovoj metodi.

Primjer 2. Uporabom Matlaba nađimo rješenje sustava:

$$4x^2 - y^2 + z^2 = 0,\ 3xy - y^2 - 3z - 5 = 0,\ 3x - 2y^2 + z^2 - 4 = 0,$$

ako je početna aproksimacija (1.5, 0.5, 0.1).

Rješenje: Riješimo sustav bez posebnih objašnjenja koristeći algoritam i Matlab:

```
>>format rat
>>syms x y z
>>f1=4*x^2-y^2-15+z^2;f2=3*x*y-y^2-5-3*z;f3=3*x-2*y^2+z^2-4;
>>u=[f1;f2;f3];A=[diff(u,x),diff(u,y),diff(u,z)];x0=1.5;
   y0=0.5;z0=0.1;
>>for k=1:9
r=[x0,y0,z0]';F=subs(u,{x,y,z},{x0,y0,z0})
r=r-inv(subs(A,{x,y,z},{x0,y0,z0}))*F
x0=r(1,1);y0=r(2,1);z0=r(3,1);
end
F = -156/25
-33/10
1/100
r = 2519/1204
757/533
281/760
F = 496/789
606/769
-1219/752
r = 433/216
630/599
268/3117
F = -207/8410
-14/359
-2057/10765
```

```
r =  7787/3893
3598/3599
16/28515
F =  55/11788
-55/27168
70/37193
r =  2
1
1/9830701
F = 1/1994544
-1/3433620
1/6236099
r =  2
1
-1/605703055316516
F = 1/93824992236885
-1/790934674809250
1/93824992236885
r =  2
1
1/1341825916374068
F = 1/180049678985310640000000000000
-1/2176739819895594
-1/1125899906842624
r =  2
1
1/4258838778056886
F =  1/181377077374810650000000000000
-1/1419612926018962
0
r =  2
1
-1/202824096036516700000000000000
F = 1/411376139330301510000000000000000000000000000000000000000000
1/676080320121722310000000000000
0
```

```
r =  2
1
0
```

Upravo dobiveni brojevi točno su rješenje sustava.

Zaključak

Izložena metoda zahtijeva poznavanje linearne algebre (matrični račun) i matematičke analize (diferencijabilnost funkcija više varijabli). Budući da se u većini osnovnih predmeta matematike na tehničkim fakultetima upravo u prvoj godini studija obrađuju spomenuti sadržaji, nalaženje rješenja **Newton-Raphsonovom metodom** uz pomoć programa **Matlab** pokazalo se za studente jednostavnim i uspješnim.

Također je bitno istaknuti da suvremene tehnologije i matematički software, uz znanje algoritama, omogućuju studentima svladavanje složenijih i zahtjevnijih sadržaja. Štoviše, može se očekivati da će se tako ostvariti povećani interes i motivacija samih studenata za podizanjem razine znanja i kompetencija vezanih uz matematičke sadržaje.

Literatura

1. A. Ostrovski: *Solution of equations and system equations*, New York, 1966.
2. J. M. Ortega, W. C. Rheinboldt: *Iterative solution of nonlinear equations in several variables*, New York, 1970.
3. K. Rivier, B. Čulina, M. Čančarević: *Matematika 1*, Zagreb 2010.
4. Brian R. Hunt Ronald L. Lipsman Jonathan M. Rosenberg: *A Guide to MATLAB for Beginers and Experienced Users*, Cambridge University Press, 2001.