IZ NASTAVNE PRAKSE

Matematičko modeliranje u srednjoj školi[1]

Jelena Gusić*

Razvoj matematike i matematičkog modeliranja povijesno su tekli usporedno. Unatoč tome, matematičko modeliranje tek se nedavno pojavljuje u srednjoškolskim kurikulumima i nastavi matematike, kako u svijetu, tako i kod nas.

U Preporukama o ključnim kompetencijama za cjeloživotno učenje[2] temeljna matematička kompetencija definira se kao „sposobnost osobe za razvoj i primjenu matematičkog mišljenja s ciljem rješavanja niza problema u svakodnevnim situacijama". O matematičkom modeliranju govori se i u *Prijedlogu Okvirnog matematičkog kurikuluma*[3], gdje se među općim matematičkim kompetencijama[4] navodi da učenici trebaju biti osposobljeni za rješavanje matematičkih problema i primjenu matematike u različitim kontekstima, uključujući i svijet rada. U Ispitnom katalogu za državnu maturu[5] među područjima u kojima će se provjeravati dostignuta razina znanja te kompetencija pristupnika navodi se i modeliranje.

Zahtjevi za promjenom dosadašnje nastavne prakse uglavnom dolaze zbog poslovnog i gospodarskog pritiska. Naime, praksa pokazuje da je otežan transfer školskog znanja na stvarne probleme. Uočava se da škola oprema učenika vrlo opsežnim matematičkim oruđem, ali ih ne priprema kako da to oruđe upotrijebe. Stoga se postavljaju zahtjevi da učenici budu rješavači problema kako bi se mogli suočiti s izazovima na radnome mjestu.

Karakteristika zadataka modeliranja je da su to zadatci iz realnog života, a pri njihovom rješavanju pojavljuju se i međusobno isprepliću ovi koraci.

* Jelena Gusić, XV. gimnazija, Zagreb

[1] Predavanje održano na 4. Kongresu nastavnika matematike u Zagrebu, 1. srpnja 2010.

[2] *Preporuke Europskog parlamenta i Vijeća Europe od 18. prosinca 2006. o ključnim kompetencijama za cjeloživotno učenje* (2006/962/EC)

[3] *Prijedlog Okvirnog matematičkog kurikuluma za opće obvezno i srednjoškolsko obrazovanje*, Hrvatsko matematičko društvo, 2009.

[4] Opće matematičke kompetencije su učeničke više kognitivne sposobnosti i vještine čiji razvoj nastava matematike treba omogućiti.

[5] http://www.ncvvo.hr/drzavnamatura/web/public/katalozi09

1. KORAK: realan problem
2. KORAK: postavljanje pretpostavki
3. KORAK: formuliranje matematičkog problema
4. KORAK: rješavanje matematičkog problema
5. KORAK: interpretacija rješenja
6. KORAK: provjeravanje modela
7. KORAK: izvješće, objašnjenje, predviđanje

U našoj se nastavnoj praksi rijetko pojavljuju problemi koje rješavamo na ovaj način. Znači li to da ne radimo zadatke modeliranja? – Ne. U razredu se zadatcima modeliranja može pristupiti vrlo različito - razlika se pokazuje u ciljevima i u izvedbi. Najčešće se govori o tri pristupa zadatcima modeliranja:

- Standardna primjena - učenici nauče model i primjenjuju ga u kontroliranim uvjetima
- Direktno modeliranje - učenici rješavaju realan problem odabirući, uz pomoć i nadzor nastavnika, neki od naučenih modela
- Otvoreno modeliranje - učenici rješavaju realan problem samostalno

Može se uočiti da se u ova tri pristupa zadatcima modeliranja ne pojavljuju svi koraci. Tako se u standardnoj primjeni, koja je kod nas najčešća, pojavljuju samo koraci 4. i 5. - rješavanje i interpretacija. Nastavniku se savjetuje da pri provođenju ovog tipa modeliranja naglasi pretpostavke na kojima se temelji model i na taj način učenike upozna i s drugim korakom u procesu modeliranja. Također, nastavnik bi trebao poticati učenike da pokušavaju promijeniti pretpostavke i dobiti neki drugi model.

Osnovna karakteristika zadataka modeliranja je ta da se temelje na autentičnim kontekstima koji se mogu susresti u stvarnom životnom okruženju. Međutim, to ne isključuje umjetne i izmišljene zadatke koji su zasnovani na stiliziranom prikazu problema. Pogledajmo primjere zadataka koji se pojavljuju u pojedinom pristupu modeliranju.

Standardna primjena

U zadatcima ovog tipa učenici točno znaju koji model trebaju primijeniti. Primjenjujući model u kontroliranim uvjetima oni uče svojstva tog modela i svojstva situacija koje model dobro rješava.

Evo primjera:

Kabelska televizija

Kabelska televizija započela je s radom. Pokazalo se da je prve godine rada veza broja njezinih korisnika K i broja mjeseci t od početka emitiranja dana formulom

$$K = \frac{20000(4t+1)}{t+1}.$$

Koliki je bio broj korisnika u trenutku početka rada ove kabelske televizije?

Nakon koliko je mjeseci broj korisnika bio 70 000?

(DM - viša razina, svibanj 2010., zad. 28.1, 28.2)

Ovo je zadatak u kojemu je učeniku već dan model. On treba prevesti pitanja u matematičke operacije.

Pitanje „*Koliki je bio broj korisnika u trenutku početka rada ove kabelske televizije?*" treba interpretirati kao određivanje odgovarajuće funkcijske vrijednosti. Učenici se tijekom školovanja često susreću s ovakvim tipovima zadataka. Mnogi od njih svjesni su da umjesto određivanja funkcijske vrijednosti onog broja koji im se čini „prirodan" određuju funkcijsku vrijednost broja „za 1 manje" ili „za 1 više", pa su nesigurni što „uvrstiti". U ovakvim situacijama dobro je uvrštavati i pritom pisati/govoriti što to znači u kontekstu zadatka. Takav postupak vidimo u tablici. U prvom je stupcu tekst iz zadatka, pa je jasnije što se određuje.

broj mjeseci od početka emitiranja (*t*)	**broj korisnika (*K*)**
1 mjesec od početka emitiranja	$K = \frac{20000(4\cdot 1+1)}{t+1} = 50000$
2 mjeseca od početka emitiranja	$K = \frac{20000(4\cdot 2+1)}{t+1} = 60000$
3 mjeseca od početka emitiranja	$K = \frac{20000(4\cdot 3+1)}{t+1} = 65000$
4 mjeseca od početka emitiranja	$K = \frac{20000(4\cdot 4+1)}{t+1} = 68000$
5 mjeseci od početka emitiranja	$K = \frac{20000(4\cdot 5+1)}{t+1} = 70000$

Vidimo da u tablici nema odgovora na pitanje koliko je bilo korisnika na početku, jer 1 mjesec od početka emitiranja nije isto kao početak emitiranja. Sada se i neiskusnijim učenicima nameće određivanje funkcijske vrijednosti za $t = 0$.

0 mjeseci od početka emitiranja	$K = \frac{20000(4 \cdot 0 + 1)}{t+1} = 20000$

To da su ovakvi zadatci učenicima bliski vidi se i iz analize riješenosti zadatka - 8% učenika ovaj zadatak nije niti pokušalo rješavati, ali je gotovo 30% njih krivo riješilo zadatak (taj krivi odgovor uglavnom je bio 50 000).

Drugi dio zadatka je riješen puno bolje. Postotak učenika koji nisu pokušali riješiti zadatak je isti, ali je zato samo 10% učenika krivo riješilo zadatak.

U ovom je zadatku trebalo odrediti vrijednost argumenta ako je poznata funkcijska vrijednost, što se svodi na rješavanje jednadžbe. Naravno, opet treba interpretirati t, a interpretacija broja t nije ništa manje vrijedan korak od rješavanja jednadžbe. Potpuno je prihvatljiva metoda kada učenici dolaze do odgovora uvrštavajući t-ove u funkciju i čekajući da dostignu traženu vrijednost. U ovom je zadatku to bilo dosta brzo, ali učenici moraju biti svjesni da, iako je metoda valjana, nije preporučljiva jer se nepotrebno gubi vrijeme.

Dakle, kada se ovakvi zadatci rade u nastavi, ne treba dopustiti učenicima da brzaju. Nije važno projuriti kroz zadatak, nego razumjeti svaki korak i znati argumentirati zašto su rezultati ispravni. Također, ovakvim zadatcima učimo model i u kakvim se uvjetima može koristiti.

Zadatak je dobro iskoristiti za rješavanje još nekih pitanja. Ta pitanja može postaviti nastavnik, ali i učenici. Osobito je dobro da učenici postavljaju pitanja jer će „naletjeti" na one nemoguće, nelogične situacije. Na taj način postavljaju pitanje valjanosti modela. U svakom slučaju treba odgovoriti/analizirati vrijednosti argumenta i funkcijske vrijednosti. Moguća pitanja:

- Koliko je bilo korisnika nakon 2.5 mjeseci od početka rada ove kabelske televizije? Kolika je vrijednost $K(-2)$, $K(-1)$?...
- Kakav je odgovor na pitanje: Nakon koliko je mjeseci broj korisnika bio 140 000? Nakon koliko je mjeseci broj korisnika bio 80 000?...

Evo još jednog primjera zadataka ovog tipa:

Posudica za led

U posudici u kojoj se smrzava voda nastaje led oblika kvadra dimenzija 3.5 cm × 3 cm × 2 cm. Pri smrzavanju se obujam vode poveća za 5%.

Koliko je vode potrebno za jedan takav oblik leda?

Koliko se takvih oblika leda može napraviti od 1 litre vode?

(Napomena: 1 litra = 1 dm^3)

(DM - niža razina, svibanj 2010., zad. 28.1, 28.2)

Učenici ovdje trebaju pokazati da razumiju pojam obujma i pojam postotka. U ovom zadatku modeliranja učenici moraju razumjeti što se „događa" s obujmom. Dakle, obujam posudice je V = 3.5 cm × 3 cm × 2 cm = 21 cm^3. Učenik treba vidjeti da je to rezultat nakon smrzavanja. Dakle, kad se početni volumen (zapišimo kao V_0) poveća za 5%, daje 21 cm^3. Matematički zapisano: 1.05 V_0 = 21 cm $\Rightarrow V_0 = \dfrac{21\text{ cm}^3}{1.05}$ = 20 cm^3.

Ovaj rezultat dobilo je samo 4% učenika koji su pisali ispit. Njih 66% posto zadatak je krivo riješilo. Većina je računala V_{krivi} = 0.95 · 21 cm^3 = 19.95 cm^3.

Zadatci u kojima provodimo standardnu primjenu modeliranja izuzetno su važni. Njima učimo učenike raznim modelima, potom kako moraju biti oprezni s njihovom primjenom i kako se modeli mogu poboljšavati. Vrlo je korisno da učenici smišljaju svoje modele, obrazlažu zašto su se za njih odlučili, te se na njih kritički osvrću. U ovom slučaju dobivamo izmišljeni tekst zadataka poput ovoga:

Broj praznih gnijezda u parku tijekom ljetnog mjeseca dan je formulom: $G = 74 + 42\sin\left(\dfrac{\pi}{12}t\right)$, gdje je t broj sati nakon ponoći.

Na osnovi ovoga učenici mogu postavljati različita pitanja poput: *Koliko je najviše/najmanje praznih gnijezda? Kada je najviše/najmanje praznih gnijezda? Kada je manje od 50 praznih gnijezda? Kada je više od 100 praznih gnijezda?...*

Direktno modeliranje

U zadatcima ovog tipa učenici odabiru model. Kako bi mogli odabrati model, moraju biti svjesni koje su modele naučili i kada se ti modeli primjenjuju. Do kraja srednjoškolskog obrazovanja učenici bi trebali prepoznati sljedeće funkcijske veze:

- proporcionalnost ↔ linearna funkcija ↔ aritmetički niz
- kvadratna funkcija ↔ parabola
- eksponencijalna funkcija ↔ geometrijski niz
- trigonometrijske funkcije ↔ periodske pojave

te geometrijske veze

- udaljenost ↔ opseg ↔ površina ↔ obujam

Također se obično smatra da svi učenici poznaju fizikalnu veze:

- put ↔ brzina
- parabola ↔ kosi hitac

Veza put ↔ brzina ↔ akceleracija obično se primjenjuje nakon što učenici svladaju pojam derivacije/integrala, stoga, po dosadašnjem planu i programu, nije česta u srednjoj školi.

Primjer zadatka:

Projektil

Projektil je koso ispaljen iz točke na nadmorskoj visini od 50 m i kreće se po paraboli. Nakon što je horizontalno udaljen 2 km, postiže nadmorsku visinu od 610 m. Nakon sljedeća 2 km nalazi se na nadmorskoj visini od 530 m. U trenutku kada projektil dostiže svoju maksimalnu visinu, 500 m iznad njega leti helikopter.

Na kojoj se nadmorskoj visini u tom trenutku nalazi helikopter?

(Probna DM - viša razina, svibanj 2010., zad. 30)

Zadatak je odrediti nadmorsku visinu helikoptera. To ćemo moći učiniti kada budemo znali maksimalnu visinu koju dostiže projektil – dakle, moramo odrediti putanju projektila. Važno je da učenici na početku imaju neku strategiju. U ovom slučaju ona je jednostavna, pa vjerojatno odmah znaju što trebaju raditi – odrediti parabolu, potom ordinatu tjemena, i konačno visinu helikoptera. U složenijim situacijama nema potrebe odmah na početku imati potpunu strategiju - glavno je odlučiti se kako krenuti, a onda u svakom trenutku kontrolirati što se dobilo i vodi li to cilju. Ako ne, popraviti/revidirati plan.

U zadatku je dosta numeričkih podatka. Korisno ih je izdvojiti iz teksta – recimo, staviti u tablicu:

Horizontalna udaljenost	Vertikalna udaljenost
0 km	50 m
2 km	610 m
4 km	530 m

Znamo dva podatka položaja, o putanji je rečeno da je parabola, vidimo da visina raste pa pada. Možemo uzeti da se radi o funkcijskoj paraboli $y = ax^2 + bx + c$, pa prva kolona u tablici predstavlja vrijednosti x-ova, a druga y-ona.

Možemo se odlučiti za podatke kako su zapisani u tablici:

x : horizontalna udaljenost u km

y : dostignuta visina u m

Tada su točke na paraboli:
$$\left.\begin{array}{l}(0,50)\\(2,610)\\(4,530)\end{array}\right\}$$
i jednadžba parabole $y = -80x^2 + 440x + 50$

Velik broj učenika odlučuje se za iste dimenzije. Tada su podatci:
x : horizontalna udaljenost u m
y : dostignuta visina u m

točke na paraboli
$$\left.\begin{array}{l}(0,50)\\(2000,610)\\(4000,530)\end{array}\right\}$$
i jednadžba parabole $y=-\frac{1}{12500}x^2+\frac{11}{25}x+50$.

Dobro je da učenici budu svjesni da ovdje nije nužno imati iste dimenzije. Naime, često funkcijski vežemo podate različitog tipa – recimo, vrijeme i udaljenost, pa ih je nemoguće prevesti na iste dimenzije. Ovdje su „slučajno" oba podatka daljinska i nema ih potrebe transformirati. Naime, kada se ne radi uz pomoć tehnologije, jednostavnije je raditi s „jednostavnijim" brojevima.

U oba je slučaja maksimalna vrijednost funkcije 655 m, pa se visina helikoptera dobiva kao: $y_{\max} + 500 = 655 + 500 = 1155$ m.

Evo još primjera direktnog modeliranja.

Ograničenje brzine[6]

Policijski je radar zabilježio da je Boris vozio brzinom 123 km/h u zoni u kojoj je ograničenje brzine na 90 km/h, pa je zaustavljen zbog prebrze vožnje.

Boris je bio uvjeren da je napravljena pogreška, i to iz dva razloga:

[6]Prilagođeno iz *Teacher Support Material*, IBO, November 1998.

- On je vrlo pažljiv vozač i nikada do sada nije dobio kaznu za prebrzu vožnju, pa je mislio da je prekoračenje od 33 km/h malo previše.

- Svi koji su prekoračili brzinu bar 5 km/h bili su zaustavljeni. Boris je od semafora pa sve dok ga nisu zaustavili cijelo vrijeme vozio iza prijatelja Ante, a Ante nije dobio kaznu.

Je li moguće da policija nije napravila pogrešku?

Na slici je prikazan položaj policijskog radara i policijskog auta koje je zaustavlja prekršitelje. Jesu li Ante i Boris mogli voziti tako da Boris dobije kaznu, a Ante ne?

Učenici znaju da policija mjeri prijeđeni put i vrijeme na označenom dijelu ceste i određuje brzinu prema formuli $v = \frac{\text{prijeđeni put}}{\text{vrijeme}}$. Trebaju osmisliti funkciju koja opisuje Borisovu vožnju. Pri tome mogu koristiti funkcije koje su učili. Najvjerojatnije će doći i na ideju da funkciju definiraju po dijelovima.

Očekuju se različiti modeli koji rješavaju zadatak. To je osobito važno jer rijetko imamo priliku u nastavi vidjeti različita, a ispravna rješenja.

U zadatcima modeliranja iznimno je važna primjena tehnologije. Naime, cilj ovakvih zadataka je najučinkovitije doći do „točnog” rješenja. Stoga se, kako bismo izbjegli lapsuse i ubrzali izračun, koristi tehnologija.

Tehnologiju koristimo i za generiranje primjera koji nam otkrivaju pravilnosti, kao i za provjeravanje modela u sličnim situacijama.

Evo jednog primjera u kojemu se tehnologija može bitno koristiti.

Koliko se sjećaju?
Studenti koji su sudjelovali u psihološkom eksperimentu odslušali su nekoliko predavanja. Nakon toga su svakog mjeseca testirani kako bi se utvrdilo koliko se činjenica još sjećaju.

Broj mjeseci nakon testa	0	1	2	3	4	8	12
Prosječni bodovi	75	71	68	67	65	61	60

Odredite kako su povezani prosječni broj bodova na tim mjesečnim ispitima i vrijeme proteklo od predavanja? Što zaključujete o količini informacija koje prosječan čovjek zapamti/zaboravi u svom životnom vijeku?

Otvoreno modeliranje

Ovaj tip modeliranja najrjeđe se susreće u nastavi. Tu učenici potpuno samostalno rješavaju realan problem. Da bi to uspjeli, moraju imati dovoljno vremena na raspolaganju, što obično u nastavi nije moguće, ili bar ne često.

Takvi se zadatci mogu dati kao samostalan ili grupni projekt koji se radi kao domaća zadaća. Ti projekti ulaze sve više u našu nastavnu praksu. Ali, ako pogledamo zadatke koji se učenicima zadaju, oni ipak više spadaju u direktno modeliranje, jer od učenika očekujemo da ispitaju valjanost nekog od naučenih modela. Ono što ti projekti imaju zajedničko s modeliranjem otvorenog tipa jest to što svaki zadatak modeliranja otvorenog tipa uključuje pisanje izvješća i obrazloženja. Naime, kod otvorenog modeliranja učenici trebaju obrazložiti model, reći zašto su taj model izabrali, usporediti ga s nekim drugim. Također moraju argumentirati upotrebljivost njihovog modela u nekim drugim/sličnim situacijama, te njegova ograničenja. Zadatci otvorenog modeliranja obično se rješavaju grupno. Za njegovo uspješno rješavanje često je nužna zajednička rasprava, te podjela «posla". Ovakvi bi se zadatci mogli rješavati u nenastavnim aktivnostima, fakultativnoj nastavi, ili ih se može uvesti na natjecanja. Primjer jednog takvog natjecanja je ***Mathematical Contest in Modeling (MCM)***[7] koje traje već 10 godina. Evo jednog prepričanog zadatka s tog natjecanja:

Kružni tok
Mnogi gradovi imaju kružne tokove – od velikih s puno kružnih traka (poput Trijumfalnih vrata u Parizu ili Spomenika pobjedi u Bangkoku) do malih s jednom ili dvije kružne trake. Neki od tih kružnih tokova imaju znak *Stop* na svakoj cesti koja dolazi, odnosno daju prednost prometu koji je u kružnom toku. Neke daju prednost prometu koji dolazi, dok su negdje postavljeni semafori na dolazne ceste (pritom je zabranjeno desno skretanje na crveno svjetlo). Moguća su i druga prometna rješenja.

[7] http://www.comap.com/undergraduate/contests/mcm

Nakon toga slijede upute sudionicima da predlože svoj model prometa, te koliko riječi treba biti u njihovom obrazloženju i što sve ono treba sadržavati.

Osim ovog natjecanja, postoji i ***The Interdisciplinary Contest in Modeling (ICM)*** na kome grupa rješava jedan interdisciplinarni problem.

Unatoč tome što za ovu vrstu modeliranja nema vremena u redovnoj nastavi, bilo bi dobro barem jednom pokušati s učenicima napraviti neki od zadataka kako bi prošli kroz proces matematizacije problema. Evo jednog takvog zadatka koji bi se, u relativno kratkom vremenu, uz pomoć nastavnika mogao započeti raditi na nastavi i riješiti barem jedan njegov dio.

Kako daleko ići u kupovinu?

Svatko ima osobne razloge pri odlučivanju gdje kupovati. Ali, kada se istodobno promatra tisuće ljudi, uočavaju se neke pravilnosti u tim odlukama. Takva proučavanja provode geografi, sociolozi, statističari, ekonomisti. Da bi opisali i objasnili te pravilnosti, koriste matematičke modele.

Napravite takav model!

Ovo izgleda potpuno nematematički – ne podsjeća na zadatke koje obično rješavamo na nastavi. Stoga učenici nemaju iskustva kako započeti. Do izražaja dolazi rad u grupi. U spontanoj raspravi nakon, vjerojatno, neproduktivnih komentara, očekuje se da će se pojaviti pitanje o najjednostavnijoj situaciji[8]. Što komplicira situaciju? Vjerojatno velik broj mjesta/centara na koje možemo ići kupovati. To rješavamo tako da odbacujemo one koji su najmanje poželjni, pa na kraju odlučujemo između dva centra. Dakle, pojavio se nešto određeniji zadatak – odabir jednog od dva centra. Daljnja rasprava trebala bi dovesti do zaključka da ćemo se, ako je centar „veći", prije odlučiti za njega. Osim veličine, na odluku utječe i udaljenost – što je centar bliži, to ćemo prije otići u njega.

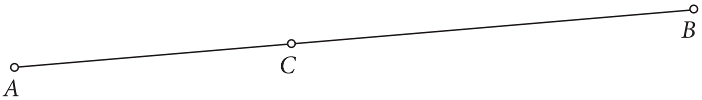
Dakle, zadatak bi bio izabrati između 2 centra, pri čemu je razumno pretpostaviti da ako su centri jednake veličine, idemo tamo gdje je bliže, ali ako je jedan centar zamjetno veći, onda je moguće da odemo u njega iako je udaljeniji. To bismo mogli formulirati kao:

- što je centar bliže, to je povoljnije otići u njega;
- što je centar veći, to je povoljnije otići u njega.

U ovoj smo fazi prošli prva dva koraka u modeliranju – pošli smo od realnog problema i postavili pretpostavke. Sljedeći je korak formulirati matematički problem.

[8] Svakako je dobro naglasiti važnost jednostavnih situacija. Nekada nam pomažu da smislimo metodu kojom ćemo rješavati, nekada da kontroliramo rezultat, nekada da pogodimo rezultat i slično.

Znamo što želimo; da bismo matematizirali problem, trebamo kvantificirati: udaljenost, veličinu i «povoljnije". Najjednostavnije je odrediti kako mjeriti udaljenost - mjerimo dio puta koji nije zajednički (od mjesta na kojemu se nalazimo do svakog od centara). To (pojednostavljeno) vizualno možemo predstaviti: - mjesto *A*, mjesto *B*, naš položaj *C*.



Veličinu je nešto kompliciranije mjeriti – možemo se odlučiti za broj trgovina, ili za ukupnu površinu, ili za neku kombinaciju tih brojeva…. Najteže je odabrati mjeru za povoljnost[9]. Umjesto toga možemo svesti problem na određivanje položaja na kojemu nam je podjednako povoljno ići u jedan, odnosno drugi centar. Nazovimo taj položaj *X*. za njega vrijedi: ako smo između *X* i *A*, onda ćemo ići u *A*, a ako smo između *X* položaja i *B*, onda ćemo ići u *B*.

Uvedimo oznake: udaljenost od *C* do *A* odnosno *B* označimo s d_{AC} odnosno d_{BC}. Veličinu centra *A* odnosno *B* označimo s V_A, V_B.

Iz analize situacije vidimo da je *povoljnost* «obrnuto proporcionalna" udaljenosti i «proporcionalna" veličini, pa možemo odrediti vrijednosti $\frac{V_A}{d_{AC}}$ i $\frac{V_B}{d_{BC}}$. Položaj *X* je takav da je u njemu $\frac{V_A}{d_{AX}} = \frac{V_B}{d_{BX}}$.

U ovoj jednakosti poznate su veličine V_A i V_B, ali d_{AX} i d_{BX} nisu. Međutim, poznata je i udaljenost centara d_{AB}, pa ćemo jednu od nepoznatih veličina, recimo d_{AX}, odrediti pomoću druge nepoznate veličine i poznatih veličina. Imamo:

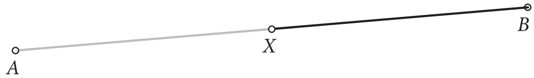
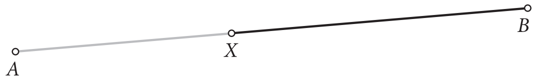
$$\frac{V_A}{d_{AX}} = \frac{V_B}{d_{BX}} \Rightarrow \frac{V_A}{d_{AX}} = \frac{V_B}{d_{AB} - d_{AX}} \Rightarrow V_A\left(d_{AB} - d_{AX}\right) = V_B d_{AX} \Rightarrow V_A d_{AB} = d_{AX}\left(V_A + V_B\right)$$

$$\Rightarrow d_{AX} = \frac{V_A d_{AB}}{V_A + V_B} \Rightarrow d_{AX} = \frac{d_{AB}}{1 + \frac{V_B}{V_A}}$$

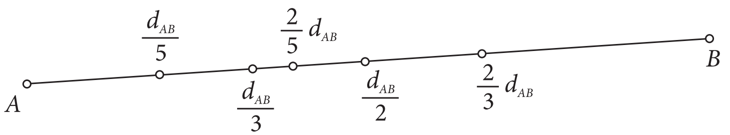
Stigli smo do faze interpretacije i provjeravanja rješenja. Što znači rezultat? Najbolje je vidjeti neke slučajeve. Vidimo da položaj točke ovisi o omjeru veličina centara.

[9] Tu nam često pomažu dimenzije onoga što želimo izmjeriti. U ovom slučaju nemamo niti ovu pomoć.

Odredimo par vrijednosti:

Veličina centara	d_{AX}	Položaj točke X
Jednako veliki $\frac{V_B}{V_A}=1$	$\frac{d_{AB}}{1+1}=\frac{d_{AB}}{2}$	
Centar B 50% veći $\frac{V_B}{V_A}=1.5$	$\frac{d_{AB}}{1+1.5}=\frac{2}{5}d_{AB}$	
Centar B dvostruko veći $\frac{V_B}{V_A}=2$	$\frac{d_{AB}}{1+2}=\frac{d_{AB}}{3}$	
Centar B četverostruko veći $\frac{V_B}{V_A}=4$	$\frac{d_{AB}}{1+4}=\frac{d_{AB}}{5}$	
Centar A dvostruko veći $\frac{V_B}{V_A}=\frac{1}{2}$	$\frac{d_{AB}}{1+\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}d_{AB}$	

Evo položaja koje smo dobili:



Iz ovih nekoliko primjera vidimo da se rezultati dobro ponašaju:

- kad su centri podjednako veliki, onda je u polovištu položaj u kojemu je podjednako povoljno ići u jedan, odnosno drugi centar;

- što je centar veći, to je iz udaljenijeg mjesta povoljno doći do njega;
- kada zamijenimo veličine A i B, dobijemo jednake udaljenosti u odnosu na A odnosno B.

Reklo bi se da smo zadatak uspješno riješili. Naravno, u fazi izvješća, objašnjenja i predviđanja morali bismo objasniti zašto smo se odlučili da je „povoljnost" obrnuto proporcionalna udaljenosti i proporcionalna veličini.

Kako bismo opravdali odluke, mogli bismo mijenjati model i uvjeriti se koliko je dobar. Ako mislimo da je udaljenost podcijenjena, mogli bismo poboljšati model i zahtijevati da povoljnost bude obrnuto proporcionalna s kvadratom udaljenosti. Dobili bismo sličan model:

$$\frac{V_A}{d^2{}_{AX}}=\frac{V_B}{d^2{}_{BX}}\Rightarrow\frac{V_A}{d^2{}_{AX}}=\frac{V_B}{\left(d_{AB}-d_{AX}\right)^2}\Rightarrow V_A\left(d_{AB}-d_{AX}\right)^2=V_Bd^2{}_{AX}$$

$$\Rightarrow\sqrt{V_A}\left(d_{AB}-d_{AX}\right)=\sqrt{V_B}d_{AX}\Rightarrow\sqrt{V_A}d_{AB}=d_{AX}\left(\sqrt{V_A}+\sqrt{V_B}\right)$$

$$\Rightarrow d_{AX}=\frac{\sqrt{V_A}d_{AB}}{\sqrt{V_A}+\sqrt{V_B}}\Rightarrow d_{AX}=\frac{d_{AB}}{1+\sqrt{\frac{V_B}{V_A}}}$$

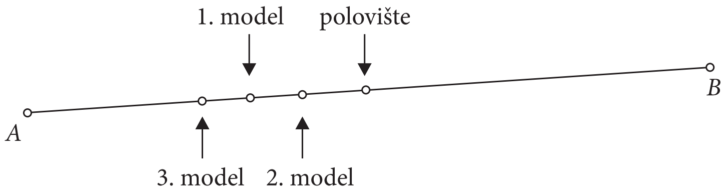
Slično, ako mislimo da udaljenost nije jako važna, mogli bismo doći do sljedećeg modela: $d_{AX}=\dfrac{d_{AB}}{1+\sqrt{\left(\frac{V_B}{V_A}\right)^3}}$.

Pogledajmo tablicu koja uspoređuje ova tri modela:

Veličina centara	$d_{AX}=\dfrac{d_{AB}}{1+\frac{V_B}{V_A}}$	$d_{AX}=\dfrac{d_{AB}}{1+\sqrt{\frac{V_B}{V_A}}}$	$d_{AX}=\dfrac{d_{AB}}{1+\sqrt{\left(\frac{V_B}{V_A}\right)^3}}$
Jednako veliki $\frac{V_B}{V_A}=1$	$\frac{d_{AB}}{1+1}=0.5d_{AB}$	$\frac{d_{AB}}{1+1}=0.5d_{AB}$	$\frac{d_{AB}}{1+\sqrt{1^3}}=0.5d_{AB}$
Centar B 50% veći $\frac{V_B}{V_A}=1.5$	$\frac{d_{AB}}{1+1.5}=0.4d_{AB}$	$\frac{d_{AB}}{1+\sqrt{1.5}}\approx0.45d_{AB}$	$\frac{d_{AB}}{1+\sqrt{1.5^3}}\approx0.35d_{AB}$

Centar *B* dvostruko veći $\frac{V_B}{V_A}=2$	$\frac{d_{AB}}{1+2}\approx 0.33d_{AB}$	$\frac{d_{AB}}{1+\sqrt{2}}\approx 0.41d_{AB}$	$\frac{d_{AB}}{1+\sqrt{2^3}}\approx 0.26d_{AB}$
Centar *B* četverostruko veći $\frac{V_B}{V_A}=4$	$\frac{d_{AB}}{1+4}=0.2d_{AB}$	$\frac{d_{AB}}{1+\sqrt{4}}\approx 0.33d_{AB}$	$\frac{d_{AB}}{1+\sqrt{4^3}}\approx 0.11d_{AB}$

Na sljedećoj slici vidimo položaj prijelomne točke kada je centar *B* dvostruko veći od centra *A*.



Ovi i slični izračuni trebali bi pomoći da se odlučimo za jedan od modela i da ga opravdamo.

Gdje naći zadatke modeliranja?

Danas se zadatci modeliranja nalaze u svim udžbenicima. Učenici ih mogu pronaći i u zadatcima s nacionalnih ispita na adresi:

http://www.ncvvo.hr/drzavnamatura/web/public/svi_ispit

Zadatci ovog tipa mogu se naći i u *Poučku*, primjerice u rubrikama *Problemski zadatci, Maturalne zadaće*. Zanimljiv je i članak *Modeliranje boce* u kojemu je, uz pomoć tehnologije, riješen jedan zadatak otvorenog modeliranja.

U knjižici sveučilišnog profesora matematike R. Granta Woodsa *Calculus Mysteries and Thrillers* postavljeni su i riješeni zadatci koji se rješavanju pomoću diferencijalnog računa. Neke od priča prevedene su na hrvatski (math.e, PlayMath).

I za kraj

Svakako je dobro upoznati učenike sa zadatcima ovog tipa. Unatoč uvriježenom mišljenju da „slabiji" učenici ne žele rješavati ovaj tip zadataka, na do sada provedenim nacionalnim ispitima pokazalo se da učenici radije rješavaju zanimljivije zadatke. Stoga bi im trebalo pružiti mogućnost da se u tome okušaju i u neispitnoj situaciji i izvježbaju metode rješavanja.