

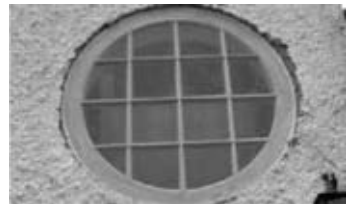
Kružnica, prozor i Sketchpad

NIKOL RADOVIĆ¹, RENATA SVEDREC², TANJA SOUCIE³, IVANA KOKIĆ⁴

Čovjek je oduvijek (bez obzira na dob i zanimanje) bio fasciniran kružnicom, što je vidljivo i na idućim slikama.



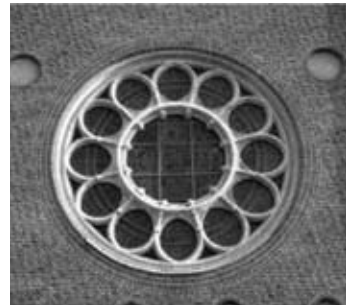
Slika 1.



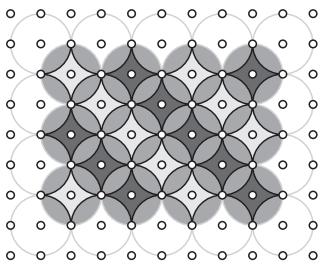
Slika 2.



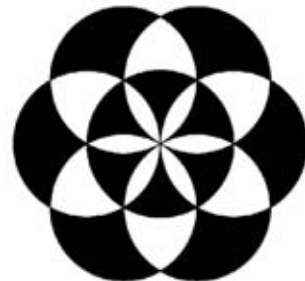
Slika 3.



Slika 4.



Slika 5.



Slika 6.

¹Nikol Radović, Geodetski fakultet Sveučilišta u Zagrebu

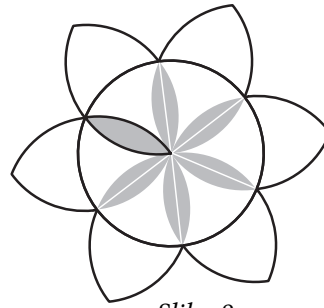
²Renata Svedrec, OŠ Otok, Zagreb

³Tanja Soucie, OŠ Matka Laginje, Zagreb

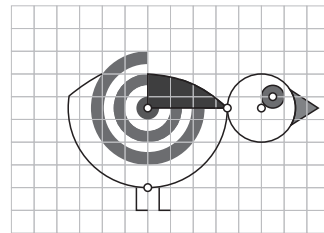
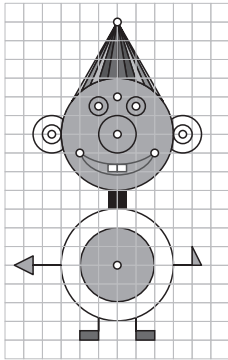
⁴Ivana Kokić, OŠ Trnsko, Zagreb



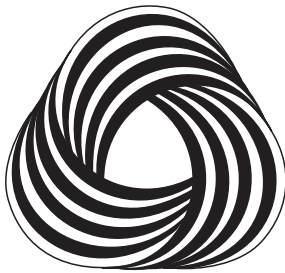
Slika 7.



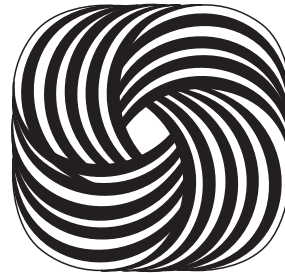
Slika 8.



Slika 9.



Slika 10.



Slika 11.

U nastavi matematike/geometrije uče se osnovni pojmovi (kružnica, krug, polumjer, promjer, luk, tetiva). Istražuju se i upoznaju mogući položaji dviju kružnica, te pravca i kružnica. Uči se pojam obodnog i središnjeg kuta, kao i njihove veze. Računaju se opseg i površina kruga i nekih njegovih dijelova. Stečena znanja primjenjuju se na praktične zadatke iz svakodnevnog života [1, 2].

Svi se slažemo da učenje geometrije učenicima pomaže u vizualizaciji i povezivanju svijeta u kojem žive i rade s geometrijskim temama. Nije rijedak slučaj da pri obradi novih pojmova učenici postavljaju učestalo pitanje: *Gdje je tu geometrija? A što će to meni u životu?* Naša je misija zainteresirati učenike, probuditi ih iz noćne more zvane matematika/geometrija, gdje ima najviše negativnih ocjena.

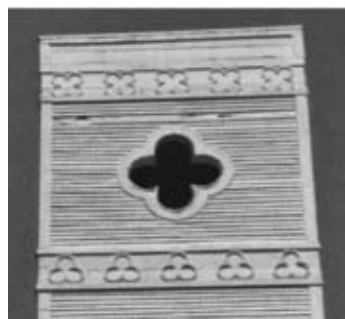
Kako bismo im pokazali da je matematika/geometrija svuda oko nas, osmislile smo aktivnosti koje će na nestandardni način obrađivati neke klasične teme. Povezujući primjere sa svijetom u kojemu žive, uvjerit ćemo ih da je matematika (pa i geometrija) svuda oko nas i da je upotrebljavaju različite struke, ali se o tome manje govori.

Naš cilj nije crtati/konstruirati kružnice, krugove, lukove, tangente i rješavati klasične zadatke, nego pokazati kako se uporabom dinamične geometrije kao alata mogu crtati/konstruirati različiti geometrijski oblici prozora i kružne figure. Tako je lako povezati geometriju/matematiku i arhitekturu odnosno umjetnost. Dovoljno će biti crtati/konstruirati kružnice, lukove na kružnicama i dužine/pravce/polupravce. Naime, učenici kroz nestandardne aktivnosti otkrivaju nove geometrijske figure, veze među njima, kao i različita svojstva, i primjenjuju ih u rješavanju novih zadataka. Program dinamične geometrije kao alata omogućava učenicima konstrukciju/crtanje geometrijskih figura na ekranu (na taj način u nastavi *aktivno* sudjeluju i učenici koji imaju problema s grafomotorikom). Dinamičnost ima za posljedicu da se nacrtana geometrijska figura može rotirati, zrcaliti, translahirati i sagledati iz sasvim nove perspektive. Promatranje konstruiranih geometrijskih figura i istraživanje svojstava njihovih prikaza u raznim položajima pomaže učenicima u razvoju osjećaja za prostor te prepoznavanju tih istih geometrijskih figura u svijetu koji ih okružuje, kao i u rješavanju složenih konstruktivnih zadataka.

Primjeri koji slijede su pripremljene aktivnosti koje su učenici rješavali na satu. Budući da se radilo s učenicima kojima nije stran rad matematike/geometrije pomoću programa dinamične geometrije, u primjerima nisu dani koraci konstrukcija. Svaki je učenik radio na svome računalu, brzinom koja njemu odgovara, s mogućnošću povratka na neki od prethodno riješenih primjera. Za učitelja to znači da sa svakim učenikom može komunicirati, te tako doznati kako učenici razmišljaju i primjenjuju stečena znanja u nestandardnim okolnostima. Posebice je tako u koracima crtanja/konstruiranja koji nemaju jednoznačna rješenja, pa učenici dolaze do različitih točnih rješenja uz argumentaciju usvojenih pojmova i svojstava. Naravno, eventualne pogreške u zaključivanju (a bilo ih je) moguće je, zbog dinamičnosti programa, odmah objasniti i otkoloniti kako kasnije ne bi bilo većih problema. Na kraju su zadani dodatni zadatci za samostalan rad.

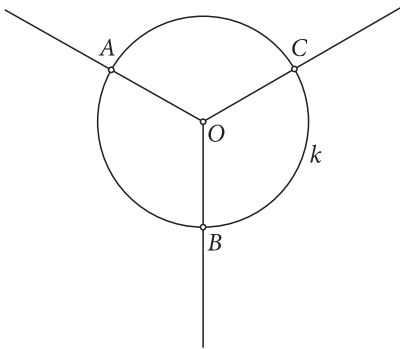
Primjer 1.

Na slici 12. je prozor crkve iz Bethela u Vermontu, s ukrasima u obliku trolista i četverolista koji podsjećaju na listove djeteline. Nactajmo trolist.

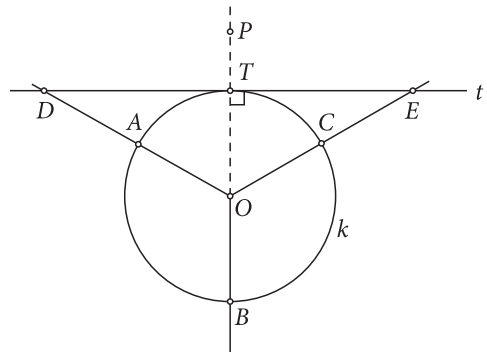


Slika 12.

- Nacrtajmo kružnicu $k(O, r)$.
- Podijelimo kružnicu na 3 sukladna kružna luka (npr. na kružnici konstruiramo točku A , točke O i A spojimo polupravcem OA koji rotiramo oko središta kružnice O za veličinu kuta od 120° , slike točke A neka su redom točke B i C), slika 13. Može li se kružnica podijeliti na tri sukladna kružna luka na neki drugi način? Objasni.
- Nacrtajmo simetralu OP kuta $\angle AOC$.
- Simetrala OP i kružnica $k(O, r)$ sijeku se u točki T .
- Točkom T nacrtajmo tangentu t kružnice $k(O, r)$.
- Tangenta t i polupravci OA i OC redom se sijeku u točkama D i E , slika 14.

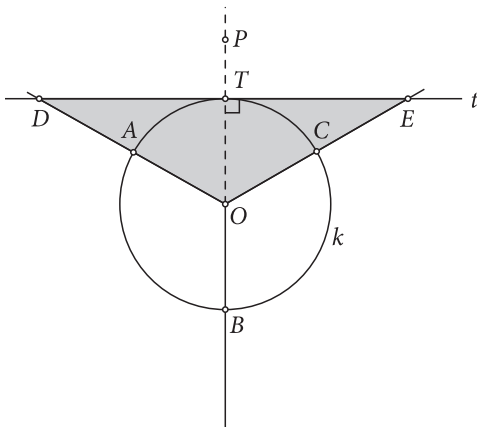


Slika 13.

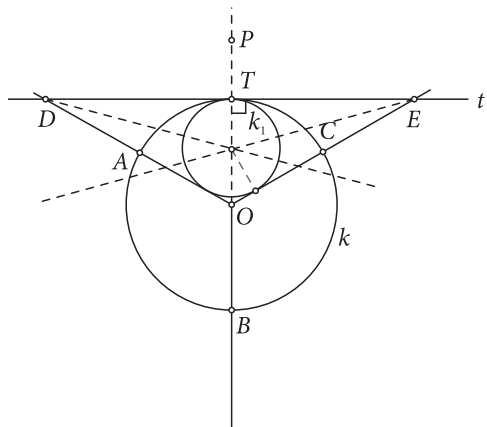


Slika 14.

- Uočimo $\triangle OED$, slika 15. Nacrtajmo tome trokutu upisanu kružnicu k_1 , slika 16.

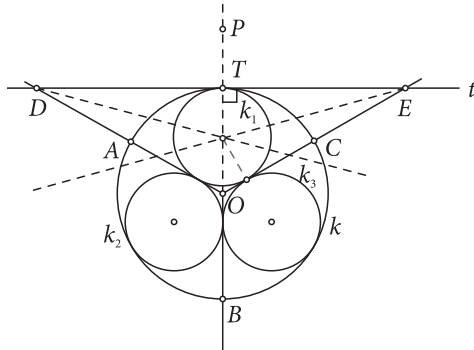


Slika 15.

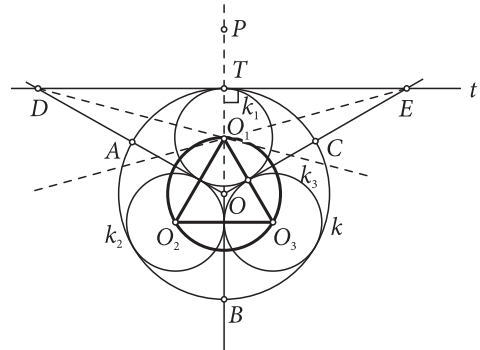


Slika 16.

- Nacrtajmo preostale kružnice k_2 i k_3 . Jedna mogućnost je primijeniti opisani postupak konstrukcije kružnice k_1 krećući od $\angle AOB$ za kružnicu k_2 , odnosno od $\angle BOC$ za kružnicu k_3 , ili da se prisjetimo podjele kružnice na sukladne kružne lukove pomoću rotacije. Rotacijom nacrtane kružnice k_1 oko središta O za veličinu kuta od 120° nacrtat ćemo tražene kružnice k_2 odnosno k_3 , slika 17. (Zašto rotiramo za veličinu kuta od 120° , a ne za veličinu kuta od 30° ili 150° ? Objasnite.)

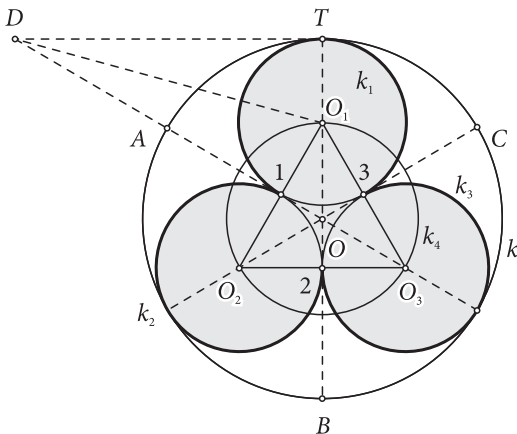


Slika 17.

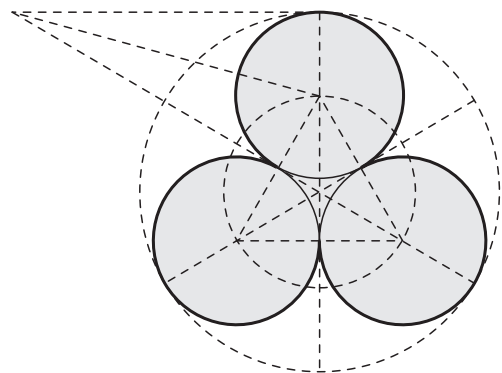


Slika 18.

- Uočite: središte O_1 kružnice k_1 , središte O_2 kružnice k_2 i središte O_3 kružnice k_3 su vrhovi jednakostraničnog trokuta i nalaze se na kružnici k_4 koja je opisana tom trokutu, te nam treba za konstrukciju trolista. Zašto?
- Točke 1, 2, 3 su redom presjeci kružnice k_1, k_2, k_3 , i stranica $\Delta O_1O_2O_3$. Točkama 1 i 2 na kružnici k_2 ; 2 i 3 na kružnici k_3 , te 3 i 1 na kružnici k_1 nacrtajmo lukove. Ti lukovi određuju trolist, slika 19. i 20.



Slika 19.



Slika 20.

Zadatak 1.

Nacrtaj četverolist.

Zadatak 2.

Nacrtaj peterolist.

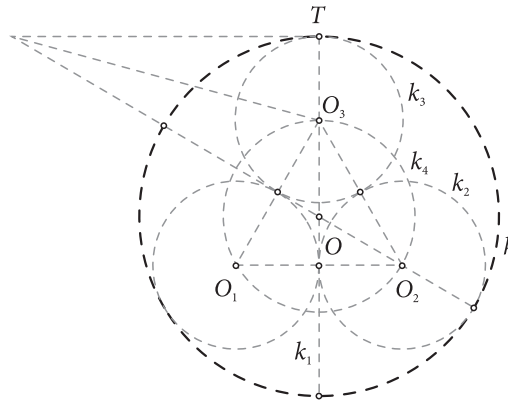
Primjer 2.

Nacrtajmo prozor prema slici 21.

Slika 21.

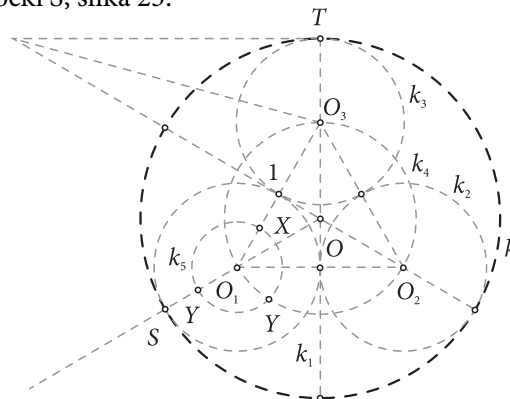


- Na prozoru na slici 21. stiliziran je trojlist. Početak crtanja jednak je kao i u **Primjeru 1.** tj. moramo nacrtati trojlist, ali na kružnicama ne crtamo/konstruiramo lukove, slika 22.



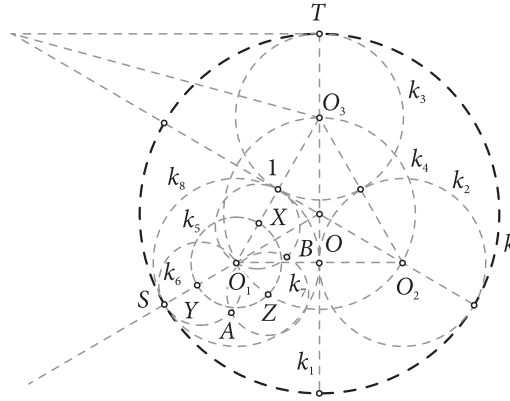
Slika 22.

- Odaberimo kružnicu k_1 sa središtem u točki O_1 . Neka je točka 1 presjek dužine $\overline{O_1O_3}$ i kružnice k_1 . Nacrtajmo kružnicu $k_5 \left(O_1, \frac{1}{2}|O_11| \right)$.
- Nacrtajmo polupravce OO_1 i O_1O_3 . Tada se polupravci i kružnica k_5 sijeku redom u točkama Y i X, a kružnice k_4 i k_5 sijeku se u točki Z, no polupravac OO_1 siječe kružnicu k u točki S, slika 23.



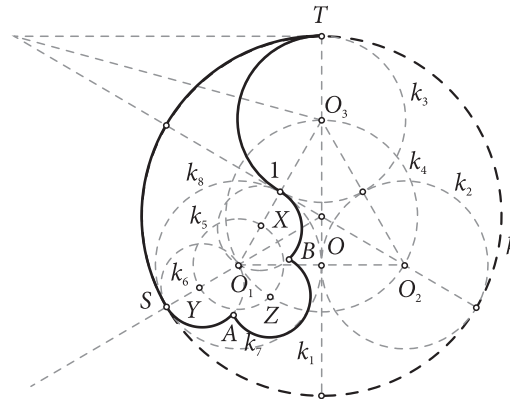
Slika 23.

- Nacrtajmo kružnice $k_6 (Y, |O_1Y|)$; $k_7 (Z, |O_1Z|)$ i $k_8 (X, |O_1X|)$.
- Kružnice k_6 i k_7 sijeku se u dvije točke: jedna je O_1 , a druga točka A . Slično, kružnice k_7 i k_8 sijeku se u dvije točke: jedna je O_1 , a druga točka B , slika 24.



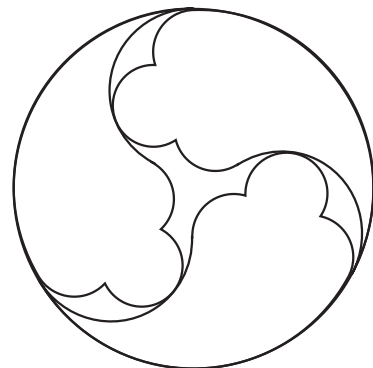
Slika 24.

- Sada preostaje crtanje/konstruiranje lukova na kružnicama; točkama T i S na kružnici k , S i A na kružnici k_6 , A i B na kružnici k_7 , B i I na kružnici k_8 , te točkama I i T na kružnici k_3 , slika 25.



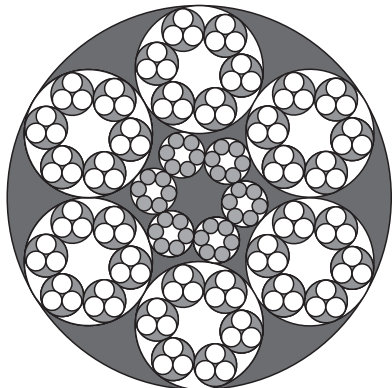
Slika 25.

- Rotiranjem nacrtanih lukova u prethodnom koraku oko središta O za veličinu kuta od 120° , te „brisanjem” točaka, oznaka i polpravaca nacrtali smo prozor prema slici 21.



Slika 26.

Na idućim su slikama učenički radovi.



Slika 27.



Slika 28.

Literatura:

1. R. Svedrec, N. Radović, T. Soucie, I. Kokić (2008.), *Tajni zadatak 007* – udžbenik sa zbirkom zadataka iz matematike za sedmi razred osnovne škole + CD, Školska knjiga, Zagreb.
2. M. Kurnik, B. Pavković, Ž. Zorić (2007.), *Matematika 1* (II. dio) udžbenik za 1. razred prirodoslovno-matematičkih gimnazija, Školska knjiga, Zagreb.
3. R. Svedrec, N. Radović, T. Soucie, I. Kokić (2008.) *Tajni zadatak 007* – radna bilježnica iz matematike za sedmi razred osnovne škole, Školska knjiga, Zagreb.
4. Serra, M. (2008.), *Discovering Geometry – An Investigate Approach*, Key Curriculum Press.
5. Ghyjka, M. (1982.), *The Geometry of Art and Life*, New York, Dover.
6. Polya, G. (2003.), *Matematičko otkriće*, HMD, Zagreb.

Internetske stranice:

- <http://www.dioceseofvermont.org/Churches/Bethel.html?> /20.10.2010./