IZ NASTAVNE PRAKSE

Grafovi trigonometrijskih funkcija: može li drukčije?

Petar Mladinić[1]

U ovom ćemo članku razmotriti grafove definirane istom procedurom, ali na temeljnim objektima različitima od kružnice. Raspravit ćemo određene aspekte tih sinusoida i pokušati povezati nekoliko poznatih elementarnih činjenica.

Definiranjem i istraživanjem eksplicitno ćemo ilustrirati kako se na primjeru sinusa, odnosno sinusoide mogu ostvariti neki zahtjevi *Nacionalnog okvirnog kurikuluma* (NOK-a):

- ... uspostaviti i razumjeti veze i odnose među matematičkim objektima, idejama, pojmovima, prikazima i postupcima te oblikovati cjeline njihovim nadovezivanjem,

- ... pratiti, stvarati i vrjednovati lance matematičkih argumenata različitih vrsta te primjenjivati analogiju, generalizaciju i specijalizaciju,

- ... kreativno, kritički i fleksibilno misliti,

- ... primijeniti koordinatnu geometriju za prikazivanje i istraživanje svojstava geometrijskih oblika,

...

Dakle, člankom se ilustrira mogući razvoj osjećaja za analogiju koja učenicima omogućuje drukčije razmišljanje. Na ovaj način oni mogu otkriti i spoznati mnoge „nove" zanimljive činjenice.

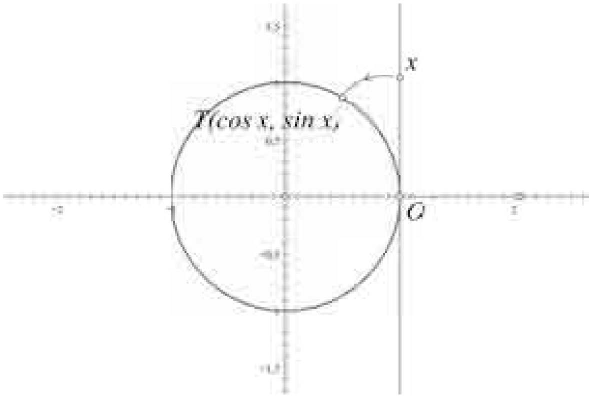
*****

Podsjetimo se

U pravokutnom Kartezijevom koordinatnom sustavu zadana je središnja jedinična kružnica. Tu kružnicu zovemo i *jedinična trigonometrijska kružnica*.

[1] Petar Mladinić, V. gimnazija, Zagreb

Skup realnih brojeva $\boldsymbol{R}$ preslikamo na jediničnu kružnicu tako da njegov pripadni brojevni pravac „namotamo" oko kružnice: pozitivni dio namotamo suprotno kretanju kazaljki sata, a negativni dio u smjeru kretanja. Ishodište O brojevnog pravca pridruži se točki (1,0).



Slika 1.

Definirajmo funkcije sinus i kosinus. Uobičajeno je u srednjoj školi to učiniti pomoću sljedeće procedure. Na jediničnoj trigonometrijskoj kružnici odaberemo točku T. Točka T ima koordinate ($\cos x$, $\sin x$) gdje je x pripadni broj s brojevnog pravca (ili mjera kuta u radijanima što ga zatvaraju pozitivni dio osi apscisa i polupravac koji je određen ishodištem O koordinatnog sustava i danom točkom T, (v. sl. 2.).

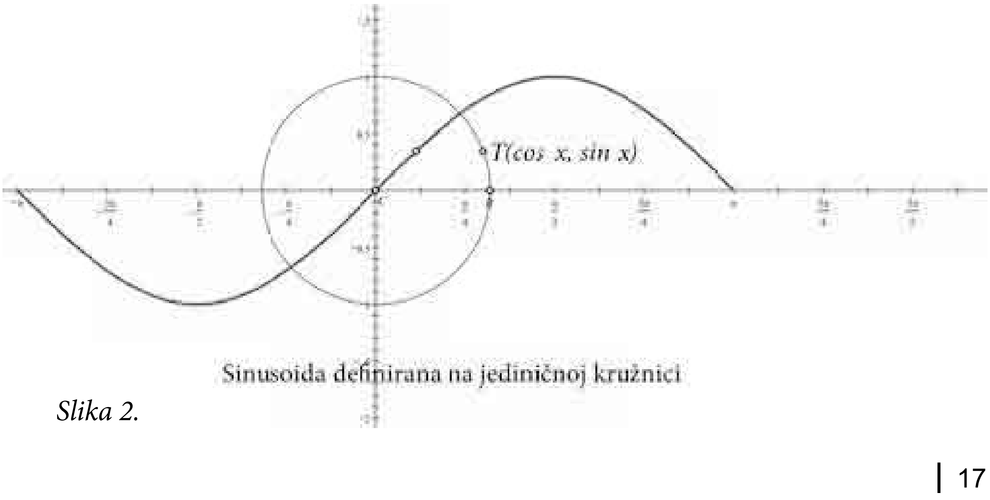
Dakle, $\cos x$ je **apscisa** x_T, a $\sin x$ **ordinata** y_T točke T.

Funkcije sinus i kosinus definirane su

$$\sin : \boldsymbol{R} \to [-1, 1], x \to \sin x,$$

$$\cos : \boldsymbol{R} \to [-1, 1], x \to \cos x.$$

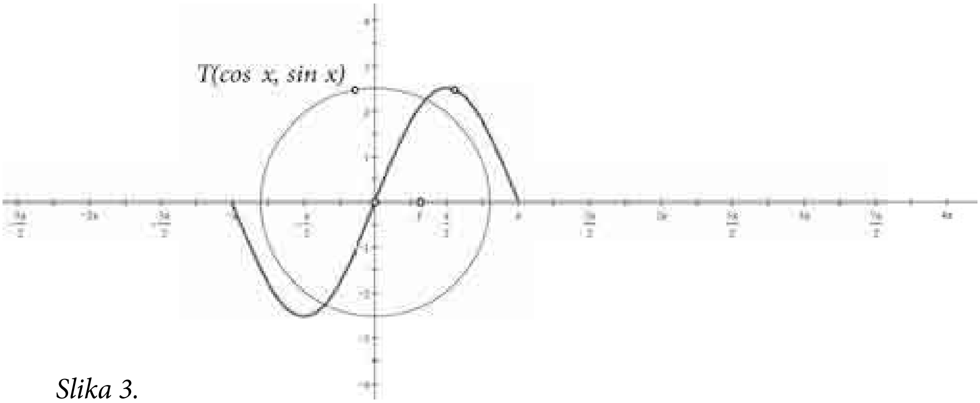
Graf funkcije sinus naziva se *sinusoida* i vidi se na slici.



Sinusoida definirana na jediničnoj kružnici

Slika 2.

U slučaju da kružnica nije jedinična, tj. da joj je polumjer $r = 1$, dobiva se sinusoida uvećana za faktor r kad je $r > 1$ ili umanjena za r kad je $0 < r < 1$ (v. sl. 3.).



Slika 3.

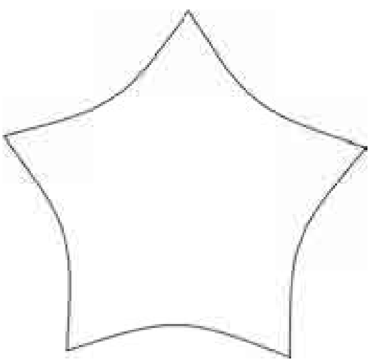
Dakle, točki na temeljnom objektu u pravokutnom Kartezijevom koordinatnom sustavu pridružene su koordinate (apscisa i ordinata) koje ćemo i sad nazvati *kosinus i sinus.*

Ograničit ćemo se samo na definiranje i istraživanje sinusa. Kosinus se dobiva na isti način pomoću apscise točke na temeljnom objektu.

Pitanje

Na početku ovog razmatranja postavit ćemo pitanje:

može li oblik morske zvijezde (v. sl. 4.) *poslužiti za definiranje trigonometrijskih funkcija?*

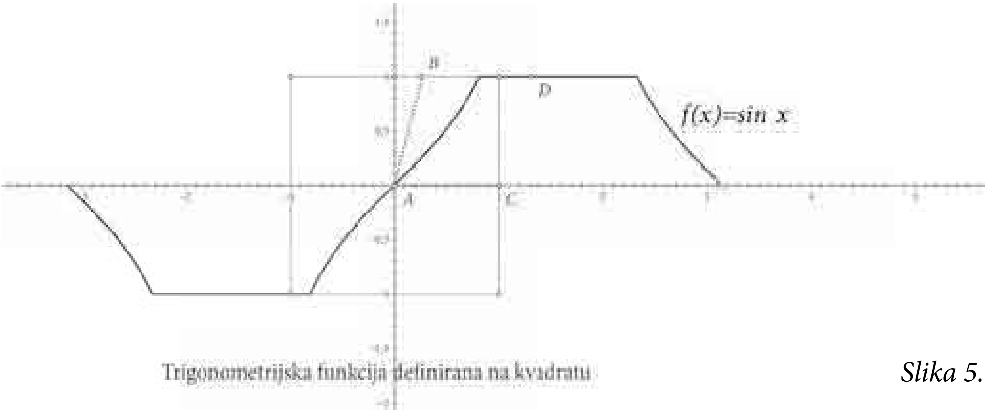


Slika 4.

U traženju odgovora na postavljeno pitanje razmotrimo najprije neke «jednostavnije" oblike.

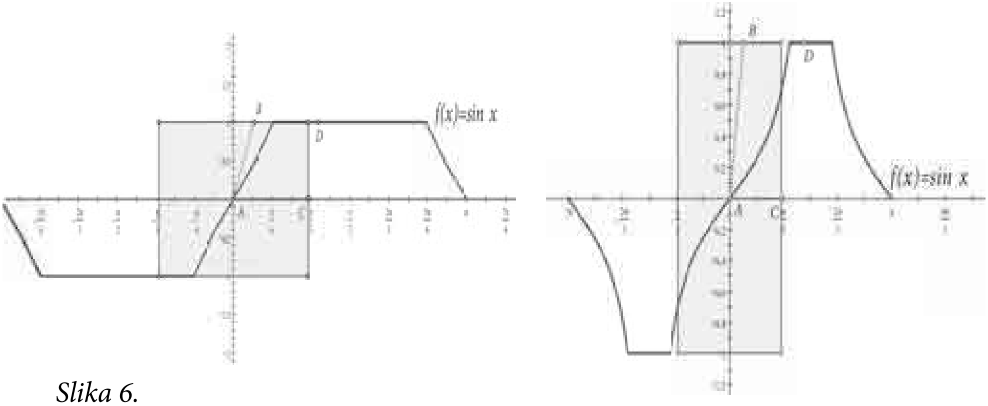
Kvadrat i pravokutnik

Uzmemo li za temeljni objekt kvadrat, dobit ćemo sljedeći graf.



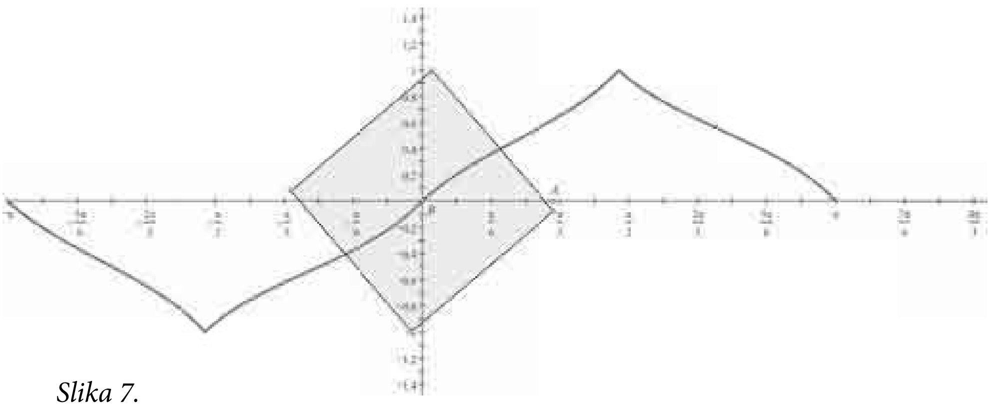
Slika 5.

Ako se sinus definira pomoću pravokutnika, onda će se dobiti isti graf, ali rastegnut.



Slika 6.

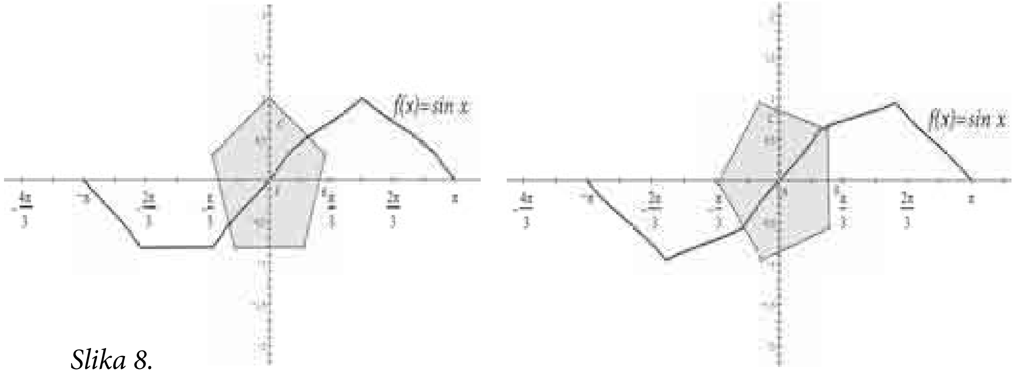
Graf ovisi i o položaju stranica kvadrata prema koordinatnim osima.



Slika 7.

Pravilni peterokut

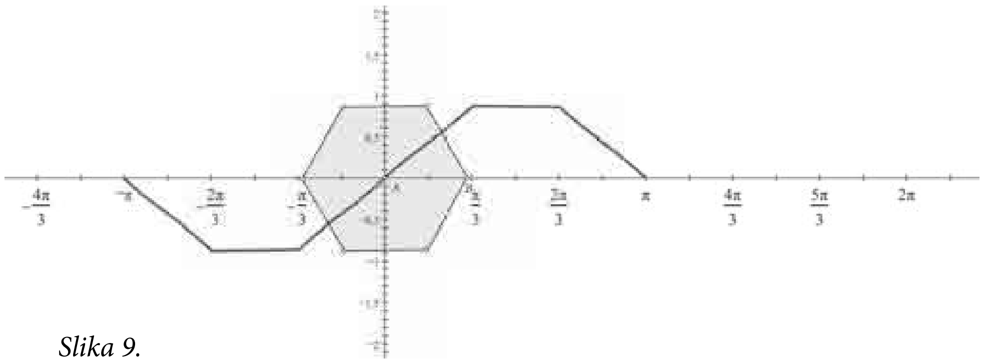
Graf ima «grubi” oblik klasične sinusoide (definirane kružnicom) i opet ovisi o položaju peterokuta, tj. o tome ima li jednu stranicu paralelnu ili ne s jednom koordinatnom osi.



Slika 8.

Pravilni šesterokut

Graf se «profinjuje” povećanjem broja stranica. To se otkriva usporedbom ove sinusoide s prethodnim sinusoidama.



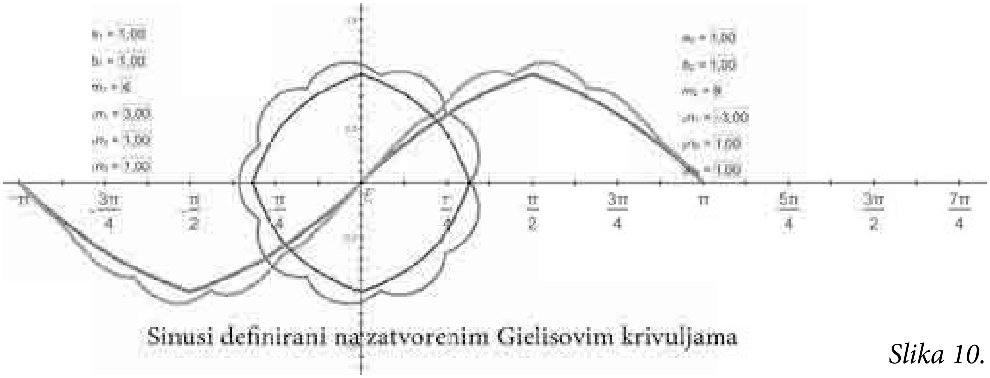
Slika 9.

Gielisova krivulja

Johan Gielis, belgijski matematičar i biolog, otkrio je da se ravninski objekti mogu dizajnirati /crtati pomoću formule

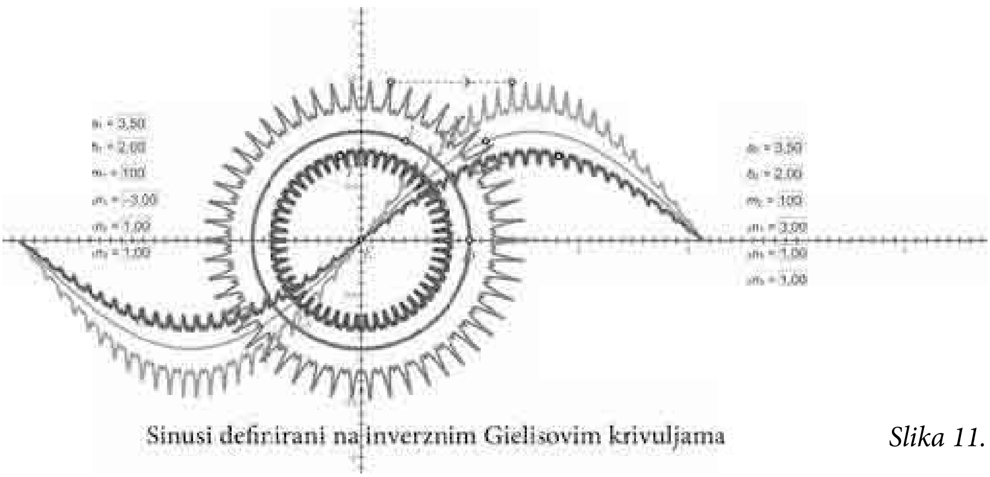
$$f(\theta)=\left(\left|\frac{1}{a}\cdot\cos\left(\frac{1}{4}m_1\theta\right)\right|^{n_2}+\left|\frac{1}{b}\cdot\cos\left(\frac{1}{4}m_2\theta\right)\right|^{n_3}\right)^{-\frac{1}{n_1}},\ a, b, m_1, m_2, n_1, n_2, n_3\in\mathbf{R}, a, b\neq 0$$

Mijenjanjem realnih koeficijenata $a, b, m_1, m_2, n_1, n_2, n_3$ dobivaju se različiti oblici/objekti. Uporabom Gielisovih krivulja dobivaju se različite sinusoide (v. sl. 10.).



Slika 10.

Pogledajmo kako se ponašaju sinusoide definirane na Gielisovim medusobno inverznim krivuljama.



Slika 11.

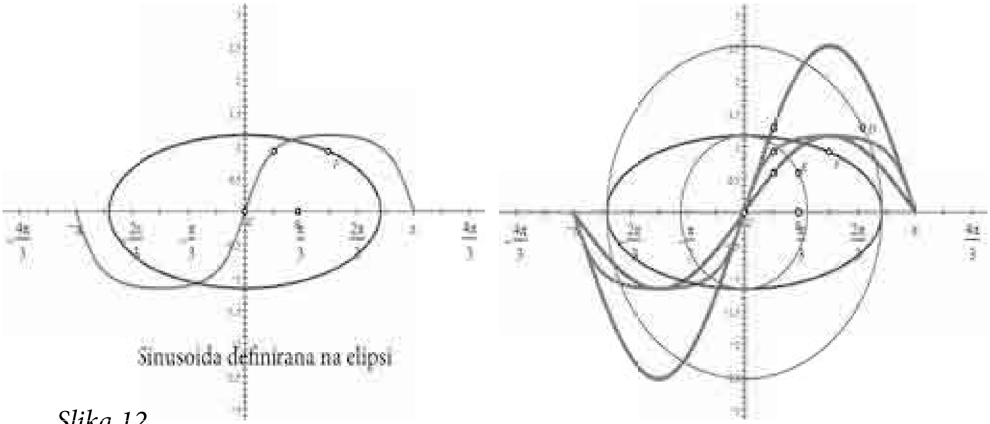
Gielisova je formula poslužila generiranju krivulja *f(x) i g(x)* koje su medusobno inverzne, te njihovih sinusa. Mijenjajući parametre, mogu se dobiti različite krivulje.

Vidi se da svi ti grafovi imaju više ili manje „grubi" oblik sinusoide na koju smo navikli.

Elipsa

Pogledajmo graf koji nastaje kad se za temeljni objekt uzme elipsa.

Elipsu možemo zamisliti da nastaje dilatacijom ili kontrakcijom kružnice duž koordinatne osi. Naslućujemo da će se nova sinusoida isto tako ponašati: bit će dilatirana ili kontrahirana duž iste koordinatne osi.



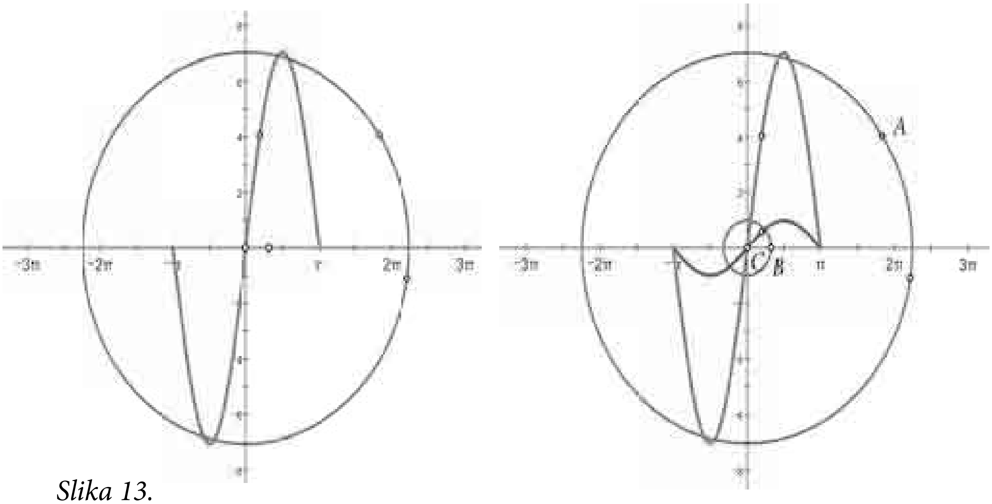
Slika 12.

Na ovaj se način mogu razmotriti, primjerice, tetivni i tangencijalni četverokut, bilo koji poligon – konveksni ili nekonveksni, te ostali ravninski objekti.

Normiranje objekta i grafa

U pravokutnom Kartezijevom koordinatnom sustavu zadana je *središnja kružnica* polumjera $r \neq 1$. Tu kružnicu zovemo i *trigonometrijska kružnica*.

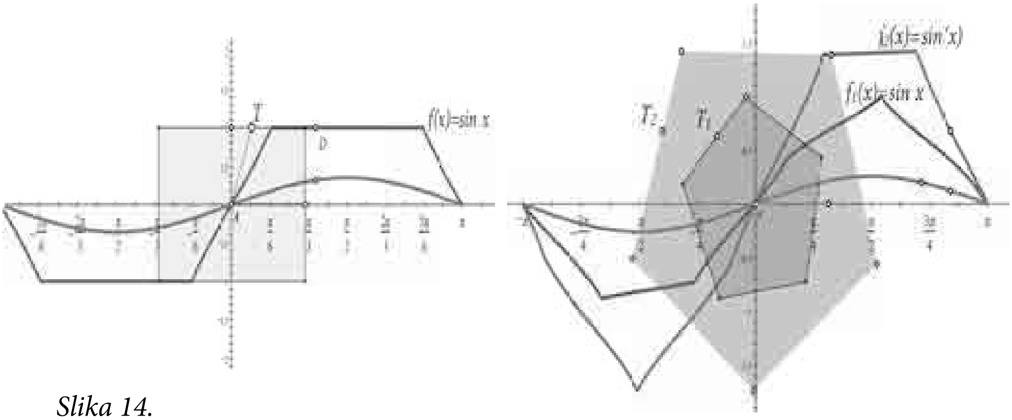
Ovakva trigonometrijska kružnica definira sinusoidu (v. sl. 13.).



Slika 13.

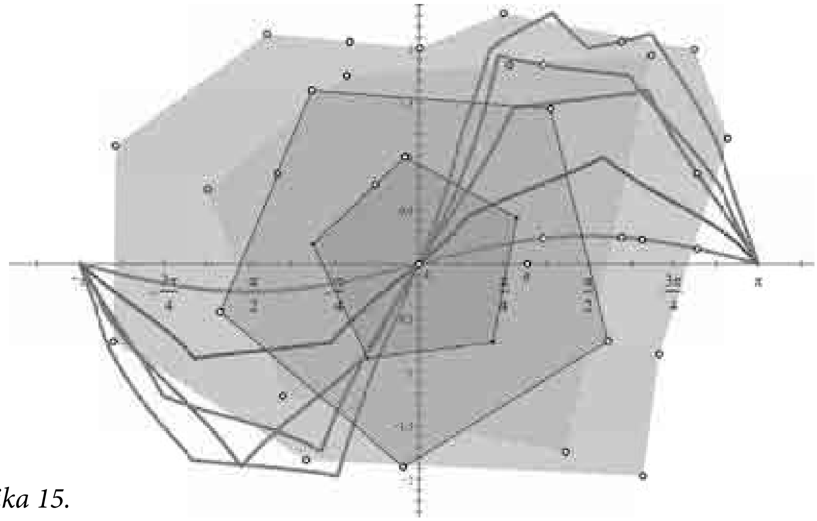
Ako ordinatu y_T točke T na kružnici podijelimo s udaljenošću $|OT|$ točke T od ishodišta koordinatnog sustava, tj. s duljinom polumjera r, dobit ćemo ordinatu točke na jediničnoj trigonometrijskoj kružnici. Ta nova normirana ordinata definira *normiranu sinusoidu* (v. sl. 13.).

Na isti način postupimo s objektima različitima od kružnice. Kad ordinatu točke T na objektu, kojom definiramo graf, podijelimo s udaljenošću točke T od ishodišta koordinatnog sustava, dobit ćemo ordinatu kojom definiramo *normirani graf* (v. sl. 14.).



Slika 14.

Točke T_1 i T_2 s različitih pravilnih peterokuta definiraju isti normirani graf. Na sl. 15. vidi se da se, bez obzira kakvi su poligoni uzeti za temeljne objekte, dobiva isti normirani graf.



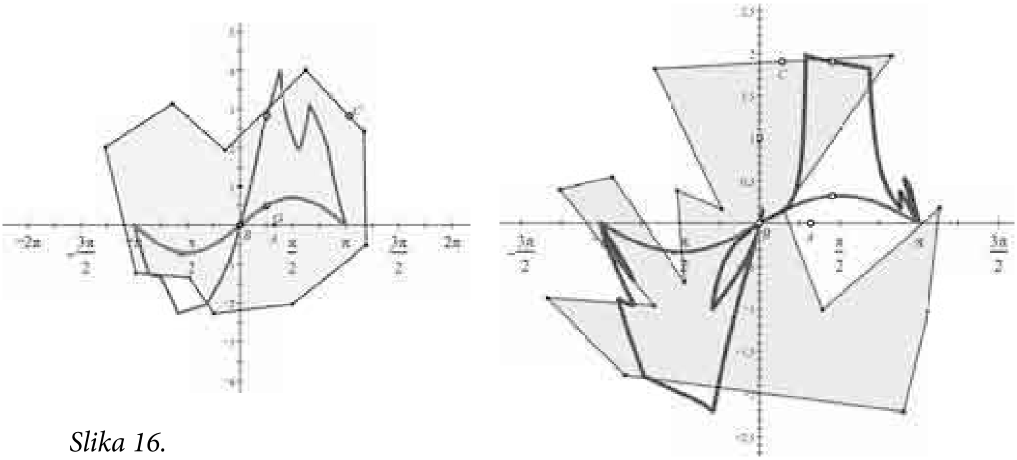
Slika 15.

„Pozadina“ i neka pitanja

Možemo, dovoljno uvjerljivo, zaključiti da će grafovi definirani na pravilnim poligonima „težiti” klasičnoj sinusoidi. U našem se zaključivanju zrcali zamišljanje da pravilni poligoni povećanjem broja stranica oblikom postaju sve zaobljeniji i da je kružnica granični „poligon”.

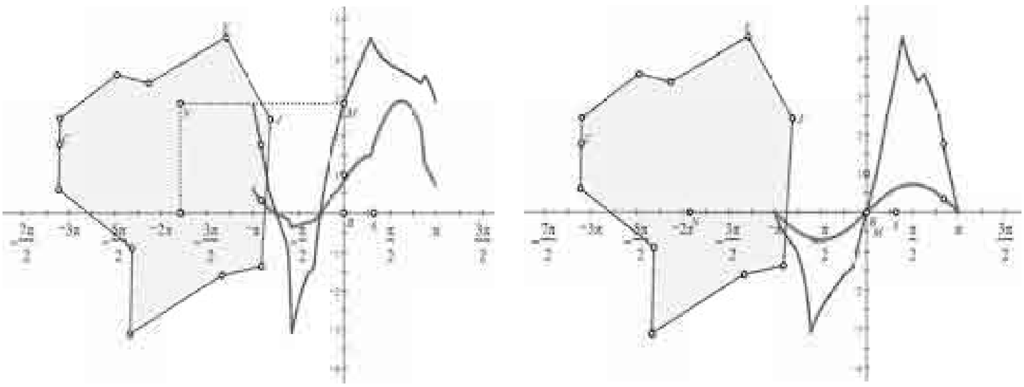
Slično zaključivanje može se prihvatiti i za ostale objekte.

Normirani graf je, bez obzira koliko je bio „grub/kvrgav” prije normiranja, uvijek klasična „glatka” sinusoida (v. sl. 16.).



Slika 16.

Na sl. 17. ishodište za polumjer r nije u ishodištu koordinatnog sustava. Tada jedinična sinusoida nije potpuno „glatka”. Spusti li se točka S na os apsica, tj. u nožište visine iz točke S na os apscisa, dobije se normirana sinusoida.

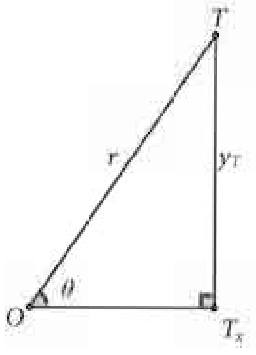


Slika 17.

U svim ovim slučajevima u pozadini je isti račun.

Imamo pravokutni trokut TOT_x, gdje je točka T točka na objektu, T_x je njezina ortogonalna projekcija na os apscisa, a O ishodište koordinatnog sustava. Neka su duljine $|OT| = r$, $|OT_x| = x_T$ i $|TT_x| = y_T$, te neka je mjera kuta $\angle T_xOT = \theta$

Dakle, imamo omjer duljina stranica pravokutnog trokuta $\dfrac{|TT_x|}{|OT|} = \dfrac{y_T}{r}$. Ovo je



Slika 18.

$$\frac{|TT_x|}{|OT|} = \frac{y_T}{r},$$

tj. trigonometrijski omjer sinusa u pravokutnom trokutu koji „najavljuje” da će graf biti sinusoida.

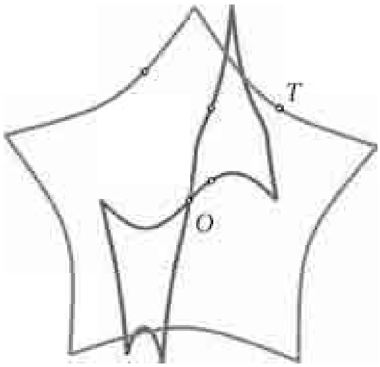
Na kraju se u našem razmatranju nameće nekoliko pitanja. Kako sve ovo izgleda za kosinus? Što je s tangensom? Kako izgleda njegov graf definiran na ovim temeljnim objektima? Što se događa ako umjesto normiranja/dijeljenja s faktorom *r* množimo ordinatu točke *T* na objektu?

Ova pitanja traže novo istraživanje utemeljeno na iskustvu iz razmatranih postupaka. No, to je sadržaj za neki drugi članak.

Zaključak

I na kraju, odgovorimo na postavljeno pitanje u naslovu ovog članka. Grafovi trigonometrijskih funkcija mogu se dobiti i na drugi način. Umjesto jedinične kružnice, za definiranje može poslužiti bilo koja ravninska zatvorena krivulja.

Ilustracije radi, na slici je prikazana pripadna sinusoida morske zvijezde s početka ovog teksta, i njezin normirani graf.



Slika 19.

Literatura

1. Johan Gielis: *Inverting the Circle*, Geniaal, Antwerpen 2003.
2. Jan Gullberg: *Mathematics*, W.W.Norton, New York 1997.
3. Georg Polya: *Matematičko otkriće*, HMD, Zagreb 2003.
4. Georg Polya: *Mathematics and Plausible Reasoning*, Princenton University Press, Princenton 1954.
5. Željko Marković: *Uvod u višu analizu*, I. dio, Nakladni zavod Hrvatske, Zagreb 1947.
6. N. Antončić, E. Špalj, V. Volenec: *Matemetika 3*, Školska knjiga, Zagreb 2006.
7. * * * : Standardi za nastavu matematike, HMD, Zagreb 2000.
8. * * * : Nacionalni okvirni kurikulum, MZOŠ, Zagreb 2010.