Međunarodni matematički turnir gradova

Eva Špalj i Matija Bucić[1]

Međunarodni matematički turnir gradova vrlo je ugledno i zanimljivo matematičko natjecanje koje od 1980. godine organizira skupina entuzijasta iz Moskve, na čelu s profesorom Nikolajem Nikolajevičem Konstantinovim. Na Turniru gradova danas sudjeluje preko 100 gradova iz cijeloga svijeta, odnosno preko 10 000 učenika, većinom srednjoškolaca. Nakon Međunarodne matematičke olimpijade to je najvažnije matematičko natjecanje na svijetu. Grad Zagreb od 2005./2006. godine (s jednom godinom prekida) redovito sudjeluje. Od 2009./2010. organizaciju je preuzela Udruga Mladi nadareni matematičari.

Turnir gradova specifično je natjecanje: po vremenu održavanja, organizaciji, vrsti zadataka i njihovoj prezentaciji. Održava se u nekoliko faza:

- jesensko kolo s dvije varijante (pripremna i osnovna) u obliku klasičnog natjecanja; održava se u razmaku od tjedan dana, obično krajem listopada;
- proljetno kolo, također s dvije varijante, krajem veljače i početkom ožujka;
- ljetna završna konferencija kao susret najuspješnijih učenika iz prethodnih kola.

U svakome kolu jesenskog i proljetnog ciklusa Turnira gradova učenici zadatke rješavaju u svojim gradovima, u organizaciji Odbora Turnira za taj grad. Organizatori su obavezni pridržavati se pravila koje daje Središnji ocjenjivački sud iz Moskve, a kojim upravlja prof. N. N. Konstantinov. Gradski (Lokalni) ocjenjivački sud ispravlja i ocjenjuje testove i šalje ih na dodatnu provjeru Središnjem ocjenjivačkom sudu. Rezultat učenika najbolji je rezultat u bilo kojem pojedinačnom kolu. Po završetku proljetnog kola i svih provjera, najuspješnijim natjecateljima Središnji organizacijski komitet Turnira izdaje diplome, a najbolji među njima pozivaju se na Ljetnu konferenciju Turnira gradova. Ljetna se konferencija održava početkom kolovoza u raznim gradovima Rusije (ponekad i u nekim drugim zemljama) i traje desetak dana. To je zapravo prava mala znanstvena konferencija. Međunarodni ocjenjivački sud pripremi niz zanimljivih istraživačkih zadataka, često otvorenog tipa, na razne teme koje učenici samostalno ili skupno rješavaju nekoliko dana. Pisana rješenja predaju se u dva roka (pripremni i završni), a vrednuje se napredovanje u rješavanju. Najuspješniji dobivaju diplome i nagrade, a najvrednije od svega je druženje, upoznavanje vršnjaka s istim interesima, te razmjena znanja i iskustava. Više informacija o Turniru gradova i održanim Ljetnim konferencijama možete pročitati na *www.turgor.ru*.

[1]Eva Špalj, Matija Bucić XV. gimnazija, Zagreb

Prošle školske godine na Turniru gradova u Zagrebu sudjelovalo je tridesetak učenika. Matija Bucić, učenik 3. razreda XV. Gimnazije, ostvario je izvrstan rezultat postigavši 21 bod, te je pozvan na Ljetnu konferenciju kao jedini učenik iz Hrvatske. Ja sam, kao njegova profesorica matematike, imala čast i sreću da ga pratim na tom uzbudljivom putovanju. Za nas mentore bila su organizirana predavanja i izleti, a upoznala sam i profesore iz raznih zemalja sudionica. Matija je radio u timu s Predragom Miloševićem, učenikom gimnazije „S. Markovića" iz Niša, na zadatcima vezanim uz Shapirovu nejednakost, te je postigao maksimalni napredak.

Shappirova nejednakost

Lokalni dio turnira gradova

Turnir gradova je međunarodno matematičko natjecanje u kojem mogu sudjelovati svi gradovi. Natjecanje se održava lokalno, odnosno učenici se natječu u svojemu gradu. Natječe se 4 puta tijekom godine, a za rezultat učenika uzima se najbolji rezultat na bilo kojem od pojedinačnih kola. Postoje dvije dobne skupine: 1. i 2. razredi čine 1. skupinu, a 3. i 4. razredi 2. skupinu. Rezultati prvih razreda se množe s koeficjentom $\frac{4}{3}$, a trećih razreda s koeficjentom $\frac{5}{4}$. Lokalni organizatori nakon ispravljanja izabiru najbolje radove i šalju ih na ponovno ispravljanje u Rusiju gdje se skupljaju rezultati iz cijeloga svijeta i određuje broj bodova potrebnih da se dobije poziv na ljetnu konferenciju. Ove godine bodovni pragovi bili su 16 za mlađu, a 18.75 za stariju skupinu. Ja sam imao 21 bod u mlađoj skupini i time zavrijedio poziv na ljetnu konferenciju.

22. Ljetna konferencija turnira gradova

Dvadest i druga ljetna konferencija turnira gradova održavala se od 2. 8. 2010. do 10. 8. 2010. u gradu Teberdi u Rusiji. Na njoj je sudjelovalo 59 učenika iz različitih država, među kojima su, Bugarska, Hrvatska, Iran, Izrael, Kanada, Malezija, Njemačka, Rusija i Srbija. Na konferenciji učenici dobiju teme od kojih biraju jednu do dvije koje rješavaju samostalno ili timski. U svakoj temi su zadatci, a rezultat učenika je broj rješenih zadataka. Unatoč natjecateljskom dijelu glavni cilj konferencije je međusobno upoznavanje učenika iz različitih dijelova svijeta koji se bave matematikom i upoznavanje učenika s istraživačkim aspektom matematike.

Teme zadane ove godine bile su:

- Random walks throgh electrical networks
- Colorings and clusters
- Miguel point and on isogonal conyugacy
- Shappiro inequality
- Coverings and growth of functions

Shappiro inequality

Ja sam se zajedno s Predragom Miloševićem iz Srbije odlučio baviti temom Shappirova nejednakost pa navodim nekoliko zadataka za koje vjerujem da dobro opisuju ideju natjecateljskog dijela ljetne konferencije.

1954. u časopisu American monthly objavljen je zadatak Harolda Shappira:

Dokažite da za sve pozitivne realne brojeve $x_1, x_2, \ldots, x_n$ vrijedi nejednakost

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{x_{i+1}+x_{i+2}} \geq \frac{n}{2}$$

Gdje je $x_{n+1}=x_1$ i $x_{n+2}=x_2$.

Gornja nejednakost je dobila ime Shappirova nejednakost i ispostavilo se da nije točna za sve n. Naši zadatci su se uglavnom odnosili na dokazivanje da nejednakost vrijedi ili ne vrijedi za specifične n te primjerice dokazati Shappirovu nejednakost ako je niz x_i monoton.

Zadatke sam numerirao onako kako su bili zadani, a ja sam ih povezao kako smo mi to učinili dok smo rješavali te naveao nekoliko lema koje smo koristili u dokazima tih zadataka.

U svim sljedećim zadacima $x_1, x_2, \ldots, x_n$ su pozitivni realni brojevi, a $x_{n+1} = x_1$.

Definirajmo sada nizove a_i , b_i , c_i.

Neka su $a_1, a_2, \ldots a_n$ brojevi $\frac{x_2}{x_1}, \frac{x_3}{x_2}, \ldots, \frac{x_1}{x_n}$ u rastućem poretku.

$b_i = \frac{1}{a_i a_{n+1-i}}$ ako je $a_i a_{n+1-i} \geq 1$, a $b_i = \frac{2}{a_i a_{n+1-i} + \sqrt{a_i a_{n+1-i}}}$, a ako je $a_i a_{n+1-i} < 1$.

$c_i = \frac{x_{i+1}}{x_i}$ za sve $i = 1, 2, \ldots, n$.

Zadatak 1.11 a:

Dokažite da vrijedi

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{x_{i+1}+x_{i+2}} \geq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i(1+a_{n+1-i})}$$

Dokaz:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{x_{i+1}+x_{i+2}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\frac{x_{i+1}}{x_i} + \frac{x_{i+1}}{x_i}\frac{x_{i+2}}{x_{i+1}}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{c_i(1+c_{i+1})} =$$

Zbog toga što je niz $\left(\frac{1}{a_i}\right)$ padajući, a niz $\left(\frac{1}{1+a_{n+1-i}}\right)$ rastući i zbog toga što je $\left(\frac{1}{c_i}\right)$

permutacija niza $\left(\frac{1}{a_i}\right)$, a $\left(\frac{1}{1+c_{i+1}}\right)$ permutacija niza $\left(\frac{1}{1+a_{n+1-i}}\right)$ vrijedi prema monotonom preuređenju vektora sljedeća nejednakost:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\left(\frac{1}{c_i}\right)\left(\frac{1}{1+c_{i+1}}\right)\right) \geq \sum_{i=1}^{n}\left(\left(\frac{1}{a_i}\right)\left(\frac{1}{1+a_{n+1-i}}\right)\right)$$

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{x_{i+1}+x_{i+2}} = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{c_i(1+c_{i+1})} \geq \sum_{i=1}^{n}\left(\left(\frac{1}{a_i}\right)\left(\frac{1}{1+a_{n+1-i}}\right)\right)$$

što je i trebalo pokazati.

Zadatak 1.11 b :

Dokažite da vrijedi:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{2x_i}{x_{i+1}+x_{i+2}} \geq \sum_{i=1}^{n} b_i$$

Dokaz:

Lema 1:

Neka su *x,y* realni pozitivni brojevi tada vrijedi:

i) Ako je $xy \geq 1$

$$\frac{1}{x(1+y)}+\frac{1}{y(1+x)} \geq \frac{1}{xy}$$

ii) Ako je $xy < 1$.

$$\frac{1}{x(1+y)}+\frac{1}{y(1+x)} \geq \frac{2}{xy+\sqrt{xy}}$$

Dokaz leme 1:

i) $xy \geq 1$

$$\frac{1}{x(1+y)}+\frac{1}{y(1+x)} \geq \frac{1}{xy} \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{x+y+2xy}{xy(1+x)(1+y)} \geq \frac{1}{xy} \quad \Leftrightarrow$$

$$x+y+2xy \geq (1+x)(1+y) \quad \Leftrightarrow$$

$$xy \geq 1$$

Kako posljednja tvrdnja vrijedi zbog niza ekvivalencija zaključujemo da i prvi dio leme 1 vijedi.

ii) $xy < 1$

$$\frac{1}{x(1+y)} + \frac{1}{y(1+x)} \geq \frac{2}{xy+\sqrt{xy}} \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{x+y+2xy}{xy(1+x)(1+y)} \geq \frac{2}{xy+\sqrt{xy}} \quad \Leftrightarrow$$

$$(x+y+2xy)(xy+\sqrt{xy}) \geq 2xy(1+x)(1+y) \quad \Leftrightarrow$$

$$x^2y + x\sqrt{xy} + xy^2 + y\sqrt{xy} + 2x^2y^2 + 2xy\sqrt{xy} \geq 2xy + 2x^2y + 2xy^2 + 2x^2y^2 \quad \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{xy}(x+y+2xy) \geq xy(2+x+y) \quad \Leftrightarrow$$

$$x+y+2xy \geq \sqrt{xy}(2+x+y) \quad \Leftrightarrow$$

$$(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2 - \sqrt{xy}(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2 \geq 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2(1-\sqrt{xy}) \geq 0$$

Budući da zadnja tvrdnja nužno vrijedi zbog niza evivalencija vrijedi i početna pa smo time završili dokaz leme 1.

Iz zadatka 1.11a vrijedi

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{2x_i}{x_{i+1}+x_{i+2}} \geq \sum_{i=1}^{n} \frac{2}{a_i(1+a_{n+1-i})} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{a_i(1+a_{n+1-i})} + \frac{1}{a_{n+1-i}(1+a_i)}\right),$$

iz leme 1 vrijedi

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{a_i(1+a_{n+1-i})} + \frac{1}{a_{n+1-i}(1+a_i)}\right) \geq \sum_{i=1}^{n} b_i$$

Dakle zaključujemo

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{2x_i}{x_{i+1}+x_{i+2}} \geq \sum_{i=1}^{n} b_i$$

što je i trebalo pokazati.

1.11 c

Neka je g maksimalna konveksna funkcija koja nije veća od svake od funkcija e^{-x} i $2(e^{x}+e^{x/2})^{-1}$.

Dokažite:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{2x_i}{x_{i+1}+x_{i+2}} \geq \sum_{i=1}^{n} g(\ln(a_i a_{n+1-i})) \geq n\, g(0)$$

Dokaz:

Iz definicije funkcije g zaključujemo da je $g(x) \leq \min\left(e^{-x}, 2\left(e^{x}+e^{x/2}\right)^{-1}\right)$

Odnosno $g(\ln(a_i a_{n+1-i})) \leq \min\left((a_i a_{n+1-i})^{-1}, 2\left(a_i a_{n+1-i} + \sqrt{a_i a_{n+1-i}}\right)^{-1}\right) \leq b_i$ za svaki $i = 1 \ldots n$

Iz zadatka 1.11 b imamo

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{2x_i}{x_{i+1}+x_{i+2}} \geq \sum_{i=1}^{n} b_i \geq \sum_{i=1}^{n} g(\ln(a_i a_{n+1-i}))$$

Kako je $g(x)$ konveksna funkcija možemo primjeniti Jensenovu nejednakost i dobiti:

$$\sum_{i=1}^{n} g(\ln(a_i a_{n+1-i})) \geq ng\left(\sum_{i=1}^{n} \ln(a_i a_{n+1-i})\right) = ng\left(\ln\left(\prod_{i=1}^{n} a_i{}^2\right)\right) = ng(\ln(1)) = ng(0)$$

To je tražena lijeva strana nejednakosti, čime je tvrdnja zadatka dokazana.

1.9 c

Dokažite da je

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{x_{i+1}+x_{i+2}} \geq \frac{5}{12} n.$$

Dokaz:

Iz zadatka 1.11c imamo:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{2x_i}{x_{i+1}+x_{i+2}} \geq \sum_{i=1}^{n} g(\ln(a_i a_{n+1-i})) \geq n\, g(0)$$

odnosno

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{x_{i+1}+x_{i+2}} \geq \frac{g(0)}{2}\, n.$$

Dakle dovoljno nam je pokazati da je $g(0) \geq \frac{5}{6}$.

Budući da je *g* jedinstveno definirana pokušat ćemo ograditi g(0).

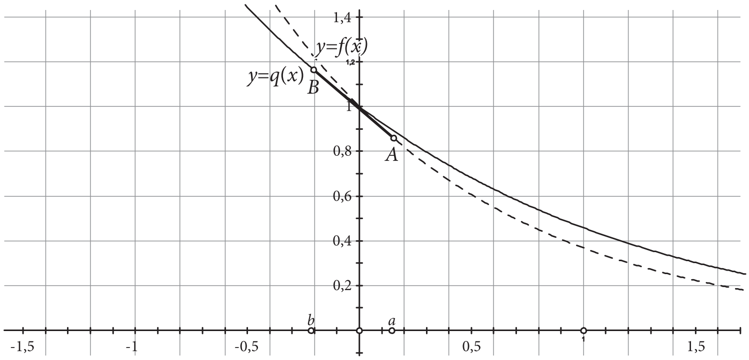
Uvedimo oznake:

$$f(x) := e^{-x}$$

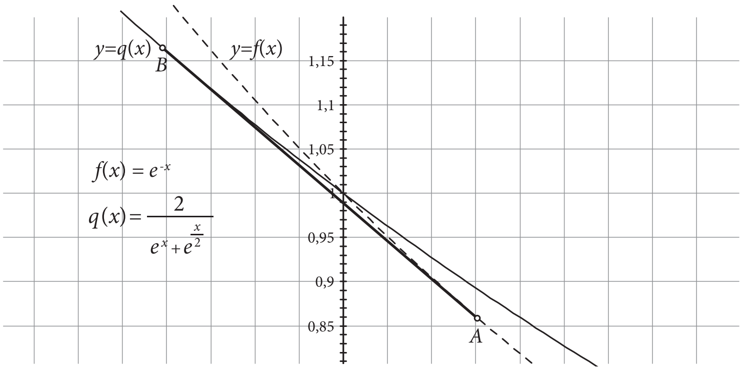
odnosno

$$q(x) := 2(e^{x} + e^{x/2})^{-1}.$$

Promotrimo drafove funkcija:



Slika 1: *Grafovi funkcija f, q i dužine koja spaja dirališta zajedničke tangente i funkcija f i q*



Slika 2: *Uvećani prikaz*

Primijetimo da je funkcija *f* veća od funkcije *q* na intervalu $\langle -\infty, 0\rangle$ da postižu istu vrijednost za $x = 0$ te da je funkcija *q* veća od funkcije *f* na intervalu $\langle 0, \infty\rangle$.

Kako $t(x) := \min(f(x), g(x))$ nije konveksna funkcija, to za funkciju *g* vrijedi: *g* je jednaka funkciji *q* na intervalu $\langle -\infty, b\rangle$, a jednaka linearnoj funkciji koja odgovara pravcu zajedničke tangente funkcija *f* i *q* na intervalu $\langle b, a\rangle$, te jednaka funkciji *q* na intervalu $\langle a, \infty\rangle$ gdje je *a* apscisa dirališta zajedničke tangente funkcija *f* i *q* s grafom funkcije *f*, a *b* apscisa dirališta te tangente s grafom funkcije *q*.

Primjetimo i da je nužno $a > 0$ i $b < 0$.

Vrijedi da je

$$f'(x) = -e^{-x}$$

i

$$q'(x) = -\frac{e^{x/2} + 2e^{x}}{(e^{x/2} + e^{x})^2}$$

Mora vrijediti

$$f'(a) = q'(b)$$

i

$$\frac{f(a) - q(b)}{a - b} = q'(b)$$

Iz

$$f'(a) = q'(b)$$

Dobivamo

$$e^{-a} = \frac{e^{b/2} + 2e^{b}}{(e^{b/2} + e^{b})^2} \quad (1.)$$

$$e^{a} = \frac{(e^{b/2} + e^{b})^2}{e^{b/2} + 2e^{b}} = \frac{e^{b/2}(1 + e^{b/2})^2}{1 + 2e^{b/2}} = e^{b/2} + \frac{e^{3b/2}}{1 + 2e^{b/2}} = e^{\frac{b}{2}}\left(1 + \frac{e^{b}}{1 + 2e^{\frac{b}{2}}}\right) \quad (2.)$$

A iz

$$\frac{f(a) - q(b)}{a - b} = q'(b)$$

$$\frac{e^{-a} - \frac{2}{e^{b} + e^{b/2}}}{a - b} = -\frac{e^{b/2} + 2e^{b}}{(e^{b/2} + e^{b})^2}$$

Koristeći 1. dobivamo:

$$\frac{\frac{e^{b/2} + 2e^{b}}{(e^{b/2} + e^{b})^2} - \frac{2}{e^{b} + e^{b/2}}}{a - b} = -\frac{e^{b/2} + 2e^{b}}{(e^{b/2} + e^{b})^2}$$

$$\frac{\frac{e^{b/2} + 2e^{b}}{(e^{b/2} + e^{b})^2} - \frac{2}{e^{b} + e^{b/2}}}{\frac{e^{b/2} + 2e^{b}}{(e^{b/2} + e^{b})^2}} = b - a$$

$$\frac{e^{b/2} + 2e^{b} - 2(e^{b} + e^{b/2})}{2e^{b} + e^{b/2}} = b - a$$

$$\frac{1}{2e^{b/2}+1} = a - b$$

$$a = b + \frac{1}{2e^{b/2}+1} \qquad (3.)$$

$$e^a = e^{b+\frac{1}{2e^{b/2}+1}}$$

Koristeći 2. dobivamo:

$$e^{b+\frac{1}{2e^{b/2}+1}} = e^a = e^{b/2}\left(1 + \frac{e^b}{1+2e^{b/2}}\right)$$

$$e^{\frac{b}{2}+\frac{1}{2e^{b/2}+1}} = 1 + \frac{e^b}{1+2e^{\frac{b}{2}}}$$

$$e^{\frac{b}{2}+\frac{1}{2e^{b/2}+1}} - \frac{e^b}{1+2e^{b/2}} = 1 \qquad (4.)$$

Definirajmo

$$h(x) = e^{\frac{x}{2}+\frac{1}{2e^{x/2}+1}} - \frac{e^x}{1+2e^{x/2}}$$

Možemo dobiti

$$h'(x) = e^{\frac{x}{2}+\frac{1}{2e^{x/2}+1}}\left(\frac{1}{2} - \frac{e^{x/2}}{(2e^{x/2}+1)^2}\right) - \frac{e^x}{1+2e^{x/2}} + \frac{e^{3x/2}}{(2e^{x/2}+1)^2}$$

Sada ćemo pokazati da je za sve x

$$h'(x) > 0$$

$$h'(x) = e^{\frac{x}{2}+\frac{1}{2e^{x/2}+1}}\left(\frac{1}{2} - \frac{e^{x/2}}{(2e^{x/2}+1)^2}\right) - \frac{e^x}{1+2e^{x/2}} + \frac{e^{3x/2}}{(2e^{x/2}+1)^2}$$

$$h'(x) = e^{\frac{x}{2}+\frac{1}{2e^{x/2}+1}}\left(\frac{4e^x+2e^{x/2}+1}{2(2e^{x/2}+1)^2}\right) - \left(\frac{e^{3x/2}+e^x}{(2e^{x/2}+1)^2}\right) \geq$$

$$e^{\frac{x}{2}}\left(\frac{4e^x+2e^{x/2}+1}{2(2e^{x/2}+1)^2}\right) - \left(\frac{e^{3x/2}+e^x}{(2e^{x/2}+1)^2}\right) = \left(\frac{4e^{3x/2}+2e^x+e^{x/2}-2e^{3x/2}-2e^x}{2(2e^{x/2}+1)^2}\right) =$$

$$\frac{2e^{3x/2}+e^{x/2}}{2(2e^{x/2}+1)^2} > 0$$

Dakle za sve *x*

$$h'(x) > 0$$

što znači da je *h(x)* strogo rastuća, a primjetimo i da je neprekidna. (5.)

Koristeći program *Wolfram Mathematicu* možemo dobiti da je

$$1.0002 < h(-0.20) < 1.0003$$

$$0.9972 < h(-0.21) < 0.9973$$

Odnosno $h(-0.20) > 1$ i $h(-0.21) < 1$ pa možemo zaključiti da postoji *b* takav da vrijedi $e^{\frac{b}{2}+\frac{1}{2e^{b/2}+1}} - \dfrac{e^b}{1+2e^{b/2}} = 1.$

I za taj *b* vrijedi

$$-0.21 < b < -0.20$$

Koristeći definiciju funkcije *g* dobivamo da vrijedi

$$\frac{g(0) - q(b)}{b} = -q'(b)$$

Odnosno opet koristeći *Wolfram Mathematicu* dobivamo

$$g(0) = q(b) - bq'(b) = \frac{2}{e^{b/2}+e^b} + b\frac{e^{b/2}+2e^b}{(e^{b/2}+e^b)^2} > \frac{2}{e^{-0.10}+e^{-0.20}} + (-0.21)\frac{e^{-0.21}+2e^{-0.21}}{(e^{-0.10}+e^{-0.20})^2}$$

$$0.99 > \frac{2}{e^{-0.10}+e^{-0.20}} + (-0.21)\frac{e^{-0.21}+2e^{-0.21}}{(e^{-0.10}+e^{-0.20})^2} > 0.98 > \frac{5}{12}$$

Dakle dobili smo $g(0) > \frac{5}{12}$ što je i trebalo pokazati.