

## Iluzija linearnosti

NINA PAVLIN-BERNARDIĆ<sup>1</sup> I VESNA VLAHOVIĆ-ŠTETIĆ<sup>2</sup>

*Farmeru je potrebno 8 sati kako bi obradio komad zemlje oblika kvadrata sa stranicom duljine 200 metara. Koliko mu sati treba kako bi obradio komad zemlje oblika kvadrata koji ima stranicu dugu 600 metara?*

Na ovaj zadatak postavljen u jednom istraživanju učenicima u dobi od 12 do 16 godina, više od 80% učenika netočno je odgovorilo: „24 sata” [1]. Slično tome, na zadatak „Velika pizza promjera 30 cm stoji 32 kn. Koliko bi trebala stajati mala pizza iste debljine, ali promjera 15 cm?” većina srednjoškolaca odgovara: „16 kn”, zaključujući da, ako je promjer dvostruko manji, i cijena treba biti dvostruko manja, ne uzimajući u obzir površinu [2].

Ovaj fenomen poznat je pod nazivom „iluzija linearnosti” ili „zamka linearnosti” (odnosno proporcionalnosti) i predstavlja sklonost mišljenju da su određene veličine linearno ili proporcionalno povezane čak i u situacijama u kojima to nije opravdano [3].

Linearni i proporcionalni odnosi imaju široku primjenu i korisni su za razumijevanje mnogih situacija u svakodnevnom životu, kao i problema u matematici i fizici. Djeca se od malena susreću s ovakvim odnosima („Autić ima četiri kotača, pa dva autića imaju osam kotača”, „Potrebne su dvije čaše vode kako bi se napunila kantica, tako da je za tri kantice potrebno šest čaša vode”).

Tijekom školovanja učenici također mnogo slušaju o proporcionalnim odnosima, a oni im se čine vrlo jasnima i intuitivno razumljivima [4]. No, mnogi istraživači i nastavnici matematike upozoravaju da ovo može dovesti do tendencije da učenici, ali i odrasli, koriste linearni model „svugdje”. Brojni su primjeri korištenja linearnih odnosa kada to nije opravdano, a Van Dooren i sur. [4] navode neke od najstarijih: u Platonovom dijalogu *Menon*, Sokrat traži čovjeka da nacrti kvadrat koji ima površinu dvostruko veću od zadanog kvadrata, a ovaj smatra da je to kvadrat koji ima dvostruko dulje stranice od zadanog. Aristotel je, pak, smatrao da će objekt koji ima deset puta veću težinu od drugog objekta padati deset puta brže od njega.

<sup>1</sup>Nina Pavlin-Bernardić, Odsjek za psihologiju, Filozofski fakultet u Zagrebu

<sup>2</sup>Vesna Vlahović-Štetić, Odsjek za psihologiju, Filozofski fakultet u Zagrebu

Kako se pokazalo da je podložnost iluziji linearnosti vrlo raširena i da ima bitne obrazovne implikacije, provedena su brojna istraživanja koja se njome bave, a u 2010. znanstveni časopis *Mathematical Thinking and Learning* posvetio je čak cijeli specijalni broj ovom fenomenu. U različitim je istraživanjima podložnost ovoj iluziji utvrđena kod ispitanika različitih dobi – predškolaca, osnovnoškolaca, srednjoškolaca i studenata - i u različitim područjima matematike kao što su aritmetika, algebra i vjerojatnost. No, najviše je proučavana u području geometrije, gdje predstavlja mišljenje da će se množenjem ili dijeljenjem duljine stranice geometrijskog lika ili tijela određenim brojem, površina (za geometrijske likove) ili volumen (za geometrijska tijela) tog lika ili tijela također povećati ili smanjiti toliko puta, kao u primjerima navedenima na početku ovog teksta (naravno, ispravno bi bilo smatrati da površinu treba pomnožiti ili podijeliti kvadratom danog faktora, a volumen kubom danog faktora).

## Što pokazuju istraživanja?

Istraživače je, između ostalog, zanimalo shvaćaju li djeca predškolske dobi, koja još nisu izložena obrazovnim utjecajima, koncepte linearnih i nelinearnih odnosa. Stoga su provedena ispitivanja s djecom u dobi od 5 i 6 godina [5], [6], u kojima su ona trebala procjenjivati rast neke količine koji se kretao ili linearno ili eksponencijalno. Primjerice, pokazivane su im kuglice koje su označavale rast populacije zečeva na nekoj livadi svake godine, a djeca su trebala procijeniti koliko će zečeva biti na livadi nakon 5, 6 i 7 godina. Pokazalo se da i petogodišnjaci mogu procijeniti eksponencijalan rast količine, iako su ga često podcjenjivali i procjenjivali bliže linearnom rastu. Kada je rast populacije bio linearan, djeca su činila puno manje pogrešaka u procjeni. Ovo pokazuje da djeca predškolske dobi intuitivno razumiju linearne i nelinearne odnose, iako su već tada sklona iluziji linearnosti.

Istraživanja na učenicima osnovnoškolske i srednjoškolske dobi, kao i na studentima, u kojima su korišteni nelinearni zadaci slični onima na početku ovog teksta, pokazuju da su ispitanici vrlo loši u njihovom rješavanju. Naravno, kada su im zadani zadaci iste forme, no koji zahtijevaju linearno rezoniranje („Radnik složi deset sendviča u roku od pola sata. Koliko će sendviča složiti u radnom danu koji traje osam sati, ako uvijek radi istom brzinom?”), svi su ispitanici vrlo uspješni u tome. Kako bismo otkrili koji su sve razlozi u podlozi ovakvih rezultata, u nekim su istraživanjima provedeni dubinski intervjui s učenicima [7]. Oni su pokazali da je većina učenika koristila linearni model pri rješavanju nelinearnih zadataka spontano i intuitivno, bez svjesnog odabira. Dio učenika je, pak, bio uvjeren da se linearni odnosi mogu primijeniti „svugdje” i namjerno su odabrali linearni način rješavanja zadatka. Također, mnogi su učenici pokazali nedostatke u znanju geometrije, pa su tako mislili da samo pravilni geometrijski likovi imaju površinu. Uz to, mnogi su imali neadekvatna uvjerenja u vezi rješavanja matematičkih zadataka, primjerice da slikovni prikaz zadatka nije koristan.

Istraživači su također pokušavali utvrditi kakve intervencije mogu utjecati na smanjenje iluzije linearnosti kod učenika. Jedan od načina koji su koristili je pokazivanje crteža koji prikazuje zadatak – primjerice, uz zadatak s početka teksta može biti nacrtan kvadrat koji prikazuje komad zemlje sa stranicom od 200 m, a pored njega veći kvadrat koji prikazuje komad zemlje sa stranicom od 600 m, s mrežom na kojoj je vidljivo da u takav kvadrat stane 9 kvadrata sa stranicom od 200 m. Drugi način je suočavanje učenika s kognitivnim konfliktom – to se može provesti tako da se nakon neispravnog rješavanja zadatka učenika suoči s rezoniranjem učenika koji je ispravno riješio zadatak. Primjerice, nakon što učenik kaže da je za obrađivanje većeg komada zemlje potrebno 24 sata, istraživač mu kaže: „Jedan drugi učenik rješavao je isti ovaj zadatak i razmišljao ovako: Komad zemlje sa stranicom od 200 m ima površinu od 40 000 m<sup>2</sup>, dok komad zemlje sa stranicom od 600 m ima površinu od 360 000 m<sup>2</sup>, dakle 9 puta je veći. To znači da je za obrađivanje takvog komada zemlje potrebno 9 puta više sati, pa je rješenje 72 sata”. Ovakva bi intervencija trebala djelovati na to da učenik razmisli o svom prvotnom rješenju, kao i da kasnije ne primjenjuje odmah linearnu shemu rješavanja [8], [9].

U jednom od istraživanja koje su u Hrvatskoj proveli Vlahović-Štetić i sur. [2], učenicima gimnazije zadani su linearni i nelinearni zadaci u kojima je format odgovaranja bio višestrukog izbora. Jedna skupina učenika rješavala je nelinearne zadatke u kojima je među ponuđenim odgovorima bilo i netočno rješenje koje se dobiva primjenjujući linearni model, dok je druga skupina rješavala te iste zadatke, no među ponuđenim odgovorima nije bilo takvo rješenje. Na ovaj način, kod druge je skupine izazvan kognitivni konflikt – nakon što bi vidjeli da među ponuđenim odgovorima nije onaj na koji su prvi pomislili, mogli su promijeniti svoju shemu zadatka i zaokružiti točno rješenje. Ova skupina je, naravno, bila uspješnija od prve skupine (u kojoj je 98% učenika zaokruživalo linearna rješenja), iako ni njihova uspješnost nije bila izrazito visoka jer je samo 37% učenika iz ove skupine točno riješilo svih 5 zadanih zadataka.

U drugom istraživanju provedenom kod nas [10], Vlahović-Štetić i Lapaine nastojali su utvrditi utječe li ponuđenost linearnog rješenja i veličina faktora promjene geometrijskog lika na uspješnost gimnazijalaca u rješavanju nelinearnih zadataka. Ustanovljen je utjecaj obiju varijabli, i to u očekivanom smjeru: uspješniji su bili sudionici koji nisu imali ponuđeno linearno rješenje, kao i oni koji su imali manje faktore promjene veličine geometrijskog lika. Najuspješniji su bili sudionici koji istovremeno nisu imali ponuđeno linearno rješenje, a faktori promjene veličine geometrijskog lika bili su im manji. Dakle, iluziju linearnosti moguće je u određenoj mjeri smanjiti poticanjem na provjeru rješenja i stvorene predodžbe o zadatku, a stvaranje adekvatne predodžbe o zadatku može biti otežano ako je faktor smanjenja ili povećanja geometrijskog lika velik (200, 300, 400). U skladu s ovim nalazima su i nalazi ovog istraživanja o sigurnosti u točnost rješenja. Naime, sigurnost u netočno rješenje bit će prilično velika ako se osobi na određen način ne dade do znanja da je njezino prvotno rješenje

pogrešno. Tako su najmanje sigurni u netočna rješenja bili sudionici kojima je to dano na znanje na dva načina: nepostojanjem ponuđenog linearnog rješenja i lakšom mogućnošću usporedbe površina dvaju likova.

Drugi su autori proveli i nešto dulja istraživanja u kojima su kroz period od nekoliko tjedana na satima matematike zadavali djeci različite nelinearne zadatke, raspravljali s njima o načinima njihovog rješavanja, davali učenicima da sami raspravljaju o zadacima i koristili različite slikovne materijale [4]. Iako sve navedene intervencije umanjuju kod učenika podložnost iluziji linearnosti, to smanjenje, nažalost, nije veliko. Najveći učinak pokazalo je korištenje zadataka iz stvarnog života. Primjerice, u jednom su istraživanju [11] učenici trebali „pomoći” eksperimentatoru napraviti pravu kućicu za lutke. Stranica poda jedne sobe bila je tri puta dulja od stranica manje sobe, za čije su popločavanje bile potrebne 4 pločice. Učenici su trebali odrediti koliko je onda pločica potrebno za popločavanje poda veće sobe. Većina učenika (20 od 24) točno je rekla da je potrebno 36 pločica. Druga skupina učenika dobila je crtež ovog zadatka umjesto pravljenja prave kućice i riješila ga lošije (16 od 24 učenika dalo je točno rješenje), dok je skupina koja je dobila samo zadatak zadan riječima bila najlošija (samo 3 učenika uspješno su ga riješila). Čini se da zadaci zadani u poznatom, „školskom” formatu kod učenika odmah bude asocijacije na najčešće korištene, linearne načine rješavanja.

Istraživače je zanimalo i imaju li ovakve intervencije dugoročan učinak, pa bi nakon nekog vremena ponovno ispitali svoje ispitanike sličnim zadacima, kako bi vidjeli je li se njihova uspješnost povećala ili barem zadržala. Rezultati su bili prilično obeshrabrujući – djeca su ponovno radila iste pogreške podliježući iluziji linearnosti, a nekima se čak i pogoršao učinak u linearnim zadacima jer su na njima pokušavali upotrijebiti sheme za rješavanje nelinearnih zadataka [3]. Naime, ovakva istraživanja iz praktičnih razloga traju između jednog dana i nekoliko tjedana, pa je učinak njihovih intervencija samo kratkoročan, a za dublju konceptualnu promjenu kod učenika očigledno je potrebno dulje razdoblje od toga.

Kod nas su slično istraživanje provele Paić-Antunović i Vlahović-Štetić [12]. Učenici trećih razreda opće gimnazije u dva su navrata rješavali ispit koji se sastojao od 6 linearnih i 6 nelinearnih zadataka. Unutar svake od ovih skupina zadaci su se odnosili na jedan od tri tipa geometrijskih likova. Nakon prvog ispitivanja provjeren je uspješnost učenika u linearnim, odnosno nelinearnim zadacima s različitim geometrijskim likovima. Rezultati pokazuju da su učenici vrlo uspješni u rješavanju linearnih zadataka, i to naročito ako se radi o zadacima s nepravilnim likovima, dok zadatke s kvadratima i krugovima rješavaju slabije. Nelinearne zadatke učenici općenito rješavaju loše, a pritom najslabije rješavaju one s nepravilnim likovima, potom one s krugovima, dok su u zadacima s kvadratima najuspješniji. Prije primjene drugog ispita, polovica učenika dobila je povratnu informaciju o uspješnosti u prvom ispitu i mogućnost da dio zadataka iz prvog ispita riješe ponovo kako bi ustanovili u čemu su pogriješili. Učenici iz ove skupine u drugom su ispitivanju bolje riješili neli-

nearne zadatke od učenika iz kontrolne skupine, no istovremeno su postigli i slabije rezultate u linearnim zadacima od njih.

## Implikacije za poučavanje

Nalazi dobiveni u različitim istraživanjima imaju, naravno, i praktične implikacije za poučavanje. Istraživanja s djecom predškolske dobi ukazuju na to da ona pokazuju intuitivno shvaćanje linearnih i nelinearnih odnosa (iako su već tada podložna iluziji linearnosti), te je stoga već od mlađe dobi moguće jednostavnim primjerima djecu podsjećati na to da nisu svi odnosi uvijek linearni. Više autora navodi da se na nastavi matematike vrlo često koriste stereotipni zadaci koji su, primjerice, ograničeni na usku skupinu linearnih zadataka. Stoga učenici više razvijaju „rutinsku stručnost” u rješavanju zadataka, koja im omogućuje da rješavaju zadatke brzo, na temelju površnog prepoznavanja forme u kojoj su zadani, nego „adaptivnu stručnost” koja bi im omogućila da svjesno odluče o primjenjivosti različitih matematičkih modela na temelju dubinskog razumijevanja zadatka [11], [13]. Autori preporučuju da se u nastavi koriste i složeni zadaci koji zahtijevaju dubinsko promišljanje, a ne samo rutinsku primjenu naučenih algoritama, te da se koriste zadaci koji imaju primjenu u stvarnom svijetu.

Istraživanje Vlahović-Štetić i sur. [2] pokazuje da već promjena u formi zadatka može dovesti do određenog smanjenja utjecaja iluzije linearnosti, te ovo može biti jedan od jednostavnih načina za razbijanje neadekvatnih shema zadataka kod učenika. Kratke intervencije koje su provedene u nekim istraživanjima koja smo naveli svaka-ko pokazuju put kako se učenicima može pomoći, međutim, one nisu bile dovoljno duge da bi imale jake dugoročne efekte, tako da na njihovoj primjeni kroz nastavu matematike treba kontinuirano raditi kroz osnovnu i srednju školu.

## Literatura

[1] Verschaffel, L., DeCorte, E. i Lasure, S. (1994). *Realistic considerations in mathematical modeling of school arithmetic word problems*. Learning and Instruction, 4, 273-294.

[2] Vlahović-Štetić, V., Pavlin-Bernardić, N. i Rajter, M. (2010). *Illusion of linearity in geometry: Effect in multiple-choice problems*. Mathematical Thinking and Learning, 12(1), 54-67.

[3] De Bock, D., Van Dooren, W., Janssens, D. i Verschaffel, L. (2007). *The Illusion of Linearity: From Analysis to Improvement*. Berlin: Springer.

- [4] Van Dooren, W., De Bock, D., Hessels, A., Janssens, D., i Verschaffel, L. (2004). *Remediating secondary school students' illusion of linearity: a teaching experiment aiming at conceptual change*. Learning and Instruction, 14, 485-501.
- [5] Ebersbach, M., Van Dooren, W., Goudriaan, M. N., i Verschaffel, L. (2010). *Discriminating non-linearity from linearity: Its cognitive foundations in five year olds*. Mathematical Thinking and Learning, 12(1), 4-19.
- [6] Ebersbach, M., Van Dooren, W., Van der Noortgate, W., i Resing, W. (2008). *Understanding linear and exponential growth: Searching for the roots in 6- to 9-year-olds*. Cognitive development, 23, 237-257.
- [7] De Bock, D., Van Dooren, W., Janssens, D., i Verschaffel, L. (2002). *Improper use of linear reasoning: an in-depth study of the nature and the irresistibility of secondary school students' errors*. Educational Studies in Mathematics, 50, 311-334.
- [8] De Bock, D., Verschaffel, L., Janssens, D., Van Dooren, W., i Claes, K. (2003). *Do realistic contexts and graphical representations always have a beneficial impact on students' performance? Negative evidence from a study on modelling non-linear geometry problems*. Learning and Instruction, 13, 441-463.
- [9] Vlahović-Štetić, V., i Zekić, I. (2004). *Rezoniranje adolescenata u linearnim i nelinearnim zadacima proporcionalnosti*. Suvremena psihologija, 7(2), 215-229.
- [10] Vlahović-Štetić, V. i Lapaine, V. (2011) *Ilusion of linearity in multiple choice problems: magnitude of geometric's size change*. EARLI conference, Exeter, UK.
- [11] Van Dooren, W., De Bock, D., Janssens, D., i Verschaffel, L. (2005). *Students' overreliance on linearity: An effect of school-like word problems?* U: Chick, H. L. i Vincent, J. L. (Ur.). Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 4, pp. 265-272. Melbourne: PME.
- [12] Paić-Antunović i Vlahović-Štetić (2011) *The effect of feedback on the illusion of linearity*. Review of Psychology (rad prihvaćen za objavljivanje).
- [13] Verschaffel, L. i DeCorte, E. (1997). *Word problems: A vehicle for promoting authentic mathematical understanding and problem solving in primary school?* U T. Nunes i P. Briant (Ur.), Learning and teaching mathematics: An international perspective (69-97). Hove, UK: Psychology Press.