IZ NASTAVNE PRAKSE

Doprinos matematike razvoju osobe

Šefket Arslanagić[1]

Matematika danas prožima cjelokupno društvo, a njezina uloga stalno raste jer se njena pomoć traži u situacijama i problemima koji se javljaju i izvan same matematike. Matematičke metode nisu više privilegij samo znanstvenika, inženjera i tehnologa; one se sve više koriste za analizu individualnih ponašanja i izučavanja stavova i trendova u društvu kao cjelini. Ovaj razvoj svakako povećava zahtjev za matematičkom sposobnošću – sposobnošću u matematičkom modeliranju, u algoritamskim tehnikama. Zato je matematika integralni dio ljudske kulture, socijalne, ekonomske i tehničke okoline, i to ne samo u sadašnjem obliku, nego i u svim oblicima koji će se sigurno razviti kao posljedica sve šire sposobnosti brzog računanja.

Ovdje se postavlja jedno iznimno važno pitanje: koliko matematika i dobra nastava matematike pridonose razvoju mlade osobe. Moguće je predavati matematiku na razne načine koji pridonose individualnom razvoju sklonosti, sposobnosti i mogućnosti shvaćanja.

Posebne individualne sklonosti koje se mogu probuditi su:
- samopoštovanje;
- samopouzdanje; uključujući volju za preuzimanjem odgovornosti;
- samodisciplina;
- sposobnost sa surađivanje s drugima;
- strpljivost, posebno u procesu rješavanja problema.

Posebne vještine koje treba usađivati su:
- promatranje;
- interpretacija (tumačenje);
- priopćavanje.

Mogućnosti shvaćanja koje se mogu njegovati su:
- shvaćanje ljepote i elegancije matematičkih dokaza;
- shvaćanje odnosa matematike i života.

[1]Šefket Arslanagić, Odsjek za matematiku Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta u Sarajevu, B i H

Sada ćemo kroz više riješenih zadataka pokazati kako se gore navedene osobine mogu uspješno razvijati kod učenika i studenata. Dat ćemo razne vrste zadataka.

Zadatak 1. Dešifrirajte množenje $\overline{abcd}\cdot 4=\overline{dcba}$, gdje je $\overline{abcd}$ četveroznamenkasti broj čije su znamenke a, b, c i d.

Rješenje: Ogromna je većina mojih studenata, na jednom od sati predmeta *Metodika nastave matematike*, koji sam im predavao na Odsjeku za matematiku Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta u Sarajevu, krenula rješavati ovaj zadatak na sljedeći način:

Četveroznamenkasti broj $\overline{abcd}$ može se zapisati kao:

$$\overline{abcd}=a\cdot 1000+b\cdot 100+c\cdot 10+d, \tag{1}$$

gdje $b, c, d\in\{0, 1, 2, ..., 9\}$, $a\in\{1, 2, 3, ..., 9\}$.

Sada na osnovi (1) imamo:

$$\overline{abcd}\cdot 4=\overline{dcba}$$

$$\begin{aligned}&\Leftrightarrow (a\cdot 1000+b\cdot 100+c\cdot 10+d)\cdot 4=d\cdot 1000+c\cdot 100+b\cdot 10+a\\&\Leftrightarrow 4000a+400b+40c+4d-1000d-100c-10b-a=0\\&\Leftrightarrow 1333a+130b-20c-332d=0.\end{aligned} \tag{2}$$

Očito (2) je **linearna Diofantska**[2] **jednadžba** s četiri nepoznanice a, b, c i $d\in\mathbb{N}_0$. Naći rješenje ove jednadžbe nije nimalo lagan posao; zahtijeva prilično vremena i strpljenja.

Srećom, našlo se tu nekoliko studenata koji su ovaj zadatak riješili efektno i brzo, koristeći pravila o djeljivosti brojevima 2, 3, 4, 5, 6, 8 i 9. Evo tog rješenja.

Budući da je umnožak četveroznamenkastog broja $\overline{abcd}$ brojem 4 ponovo četveroznamenkast broj $\overline{dcba}$, to a mora biti paran broj. Kako su jedine dvije znamenke koje bi mogao uzeti za znamenku a jednake 1ili 2, zaključujemo da je a = 2. Sada imamo:

$$\overline{2bcd}\cdot 4=\overline{dcb2}\,.$$

Odavde zaključujemo da mora biti d = 3 ili d = 8 jer je 4 · 3 = 12, te 4 · 8 = 32 i 4 · 2 = 8, pa zaključujemo da je d = 8. Dakle, sada imamo:

$$\overline{2bc8}\cdot 4=\overline{8cb2}\,.$$

Sada zaključujemo da mora biti $b\in\{0,1,2\}$. Kako broj $\overline{8cb2}$ mora biti djeljiv brojem 4, očito je b = 1, tj. dobivamo da je:

$$\overline{21c8}\cdot 4=\overline{8c12}\,.$$

[2] Diofant, starogrčki matematičar koji je živio u Aleksandriji u 3. stoljeću.

Budući da je 4 · 7 + 3 = 28 + 3 = 31, slijedi da mora biti $c = 7$. Konačno dobivamo:

$$\overline{abcd} = 2178 \text{, tj. } 2\,178 \cdot 4 = 8\,712.$$

Zadatak 2. Ako je $x = 2011(a-b)$, $y = 2011(b-c)$, $z = 2011(c-a)$, izračunajte vrijednost brojevnog izraza:

$$\frac{x^2+y^2+z^2}{xy+yz+zx};\ (xy+yz+zx \neq 0),$$

gdje su $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Rješenje: Opet se većina učenika (ili pak studenata) odlučuje na uvrštavanje danih brojeva x, y, z u dani količnik, s namjerom da nakon nešto duljeg računanja dođe do rezultata koji iznosi –2. Srećom, uvijek se tu nađe onih koji ovaj zadatak rješavaju mnogo jednostavnije i kraće, na sljedeći način:

Imamo

$$x+y+z = 2011(a-b+b-c+c-a) = 2011 \cdot 0 = 0,$$

$$\Rightarrow x+y+z = 0 /^2$$

$$\Rightarrow x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx) = 0$$

$$\Rightarrow x^2+y^2+z^2 = -2(xy+yz+zx),$$

a odavde, nakon dijeljenja ove jednakosti s $xy+yz+zx \neq 0$, dobivamo:

$$\frac{x^2+y^2+z^2}{xy+yz+zx} = -2.$$

Čitatelji će se sigurno složiti da je ovo rješenje kudikamo elegantnije i ljepše od onog prvog. Ovo rješenje u potpunosti opravdava i afirmira sve ono rečeno u prvom dijelu ovog članka, a odnosi se na posebne, individualne sklonosti koje se javljaju kod budućih matematičara, sada učenika ili studenata.

Zadatak 3. Dokažite da su svi brojevi oblika n^4+4; $(n \in \mathbb{N}, n > 1)$ složeni brojevi.

Rješenje: Svi znamo da su prosti brojevi oni prirodni brojevi različiti od 1 koji su djeljivi samo sami sobom i jedinicom. Znači, složeni brojevi imaju bar još jedan djelitelj koji nije 1 ili sam taj broj.

Moji učenici (pa čak i studenti) uglavnom priđu rješavanju ovog zadatka na jedan uobičajen i prirodan način. Naime, prvo uzmu da je n paran broj, pa je i broj n^4+4 također paran broj, a samim time je i složen. Ako je pak n neparan broj, tada je broj n^4+4 neparan, ali nije lako dokazati da je i složen. Ako je $n = 2k + 1$; ($k \in \mathbb{N}$ zbog $n > 1$), tada dobivamo:

$$n^4+4 = (2k+1)^4+4 = 16k^4+32k^3+24k^2+8k+5,$$

a sada je teško utvrditi je li dobiveni neparan broj prost ili složen. Što raditi sada?

Postoji jedan identitet u matematici koji glasi:

$$a^4+4b^4=\left(a^2+2b^2+2ab\right)\left(a^2+2b^2-2ab\right);\ (a,b\in\mathbb{R}), \tag{3}$$

a naziva se **Identitet Sophie Germain**[3]. Očito vrijedi:

$$\begin{aligned} a^4+4b^4&=a^4+4a^2b^2+4b^4-4a^2b^2\\ &=\left(a^2+2b^2\right)^2-(2ab)^2\\ &=\left(a^2+2b^2+2ab\right)\left(a^2+2b^2-2ab\right), \end{aligned}$$

što je trebalo dokazati.

Sada na osnovi (3) imamo za $a = n$ i $b = 1$:

$$n^4+4=\left(n^2+2n+2\right)\left(n^2-2n+2\right),$$

a ovaj broj je svakako složen jer je $n^2-2n+2>1$ za sve $n\in\mathbb{N}$, $n > 1$.

Lijepo rješenje, nema što!

Zadatak 4. Treba dokazati da su svi cijeli brojevi oblika $n^3+5n;\ (n\in\mathbb{Z})$ djeljivi brojem 6, tj.

$$6\,|\,A(n)=n^3+5n;\ (n\in\mathbb{Z}).$$

Rješenje: Bio sam svjedok ovakvog rješenja ovog zadatka: Za $n = 0$ dobivamo $A(0) = 0$, a ovaj broj je djeljiv brojem 6, tj. $0 : 6 = 0$. Zaljubljenici u princip matematičke indukcije sada dokazuju da vrijedi $6|A(n)$, $n\in\mathbb{N}$. Naime, za $n = 1$ slijedi $A(1) = 6$, a ovaj broj je djeljiv brojem 6.

Neka vrijedi $6\,|\,A(n)=n^3+5n$ za sve $n \geq 1$. Tada imamo:

$$\begin{aligned} A(n+1)=(n+1)^3+5(n+1)=n^3+3n^2+3n+1+5n+5=n^3+5n+\left(3n^2+3n+6\right)&=\\ =A(n)+3\left(n^2+n+2\right)& \end{aligned}$$

tj.

$$A(n+1)=A(n)+3\left[(n+1)(n+2)-2n\right],$$

a ovaj broj je djeljiv brojem 6 jer je prema pretpostavci $6|A(n)$, a broj $(n+1)(n+2)$ je umnožak dvaju uzastopnih prirodnih brojeva od kojih je jedan paran, pa je broj $(n+1)(n+2)-2n$ djeljiv brojem 6. Ima ovdje dosta posla!

Kako dalje? Što učiniti ako je $n < 0$; $n\in\mathbb{Z}$? Stavimo da je $n=-m<0;\ (m\in\mathbb{N})$. Sada imamo

$$A(n)=A(-m)=(-m)^3+5\cdot(-m)=-\left(m^3+5m\right),$$

a ovaj broj je djeljiv brojem 6 jer smo dokazali da je broj $m^3+5m;\ (m\in\mathbb{N})$ djeljiv brojem 6, pa je i broj $-\left(m^3+5m\right)$ djeljiv brojem 6.

[3] Sophie Germain, 1776.-1831., francuska matematičarka koja je imala uspjeha u rješavanju Fermatovog velikog teorema. Dopisivala se s Gaussom, D'Alambertom, Legandreom, itd.

Komplicirano, nema što! No, jedno kratko elegantno rješenje zadatka za koji je potrebna jedna sjajna ideja oblika $5n = 6n - n$ donekle nas ostavlja bez daha. Naime, imamo:

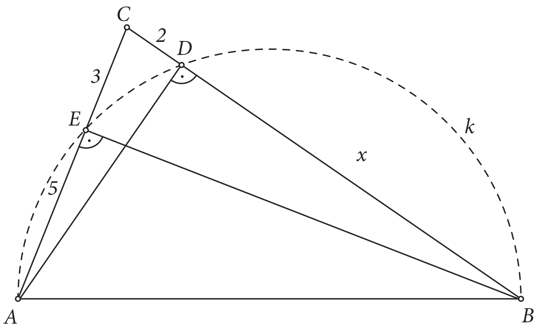
$$A(n) = n^3 + 5n = n^3 - n + 6n = (n-1)n(n+1) + 6n,$$

a ovaj broj je očito djeljiv brojem 6 jer je $(n-1)n(n+1)$ umnožak triju uzastopnih cijelih brojeva za sve $n \in \mathbb{Z}$ (doduše, za $n \in \{-1, 0, 1\}$ dobivamo da je taj broj 0 koji je djeljiv brojem 6) od kojih je bar jedan paran, a jedan djeljiv brojem 3, pa je taj broj djeljiv brojem $3 \cdot 2 = 6$.

Napomena: Gornju smo činjenicu mogli dokazati uz uvjet da je $n = 3k$ ili $n = 3 \pm 1; (k \in \mathbb{Z})$.

Zadatak 5. Dužine $\overline{AD}$ i $\overline{BE}$ su visine trokuta ΔABC; ($D \in \overline{BC}$, $E \in \overline{AC}$). Ako je $|AE| = 5$, $|CE| = 3$ i $|CD| = 2$, koliko iznosi $x = |BD|$?

Rješenje: Učenici (pa i studenti) uglavnom su zaljubljeni u Pitagorin[4] poučak, pa nije čudo da, nakon što nacrtaju sliku i uoče dva pravokutna trokuta ΔACD i ΔBCE, polete ovaj zadatak riješiti pomoću tog poučka.



Slika 1.

Sada na temelju Pitagorinog poučka za trokut ACD vrijedi (Slika 1.):

$$|AD|^2 = |AC|^2 - |CD|^2$$
$$\Rightarrow |AD|^2 = 8^2 - 2^2 = 60$$
$$\Rightarrow |AD| = \sqrt{60} = 2\sqrt{15}.$$

Nadalje, za trokut ABD vrijedi (sl. 1.):

$$|AB|^2 = |AD|^2 + |BD|^2$$
$$\Rightarrow |AB|^2 = 60 + x^2$$
$$\Rightarrow |AB| = \sqrt{60 + x^2},$$

[4] Pitagora, starogrčki matematičar iz 6. stoljeća prije n. e.

za trokut *ABE* vrijedi (sl. 1.):

$$|BE|^2 = |AB|^2 - |AE|^2$$

$$\Rightarrow |BE|^2 = 60 + x^2 - 25$$

$$\Rightarrow |BE| = \sqrt{35 + x^2} \;,$$

a za trokut *BCE* vrijedi (sl. 1.):

$$|BC|^2 = |CE|^2 + |BE|^2$$

$$\Rightarrow (x+2)^2 = 9 + 35 + x^2$$

$$\Rightarrow x^2 + 4x + 4 = 44 + x^2$$

$$\Rightarrow x = 10 \,.$$

Točno, pretjerali smo s Pitagorom. Teška srca prihvaćam i one koji su na ovaj način došli do rješenja i dajem im lijepu ocjenu.

Opet, srećom, oni lucidni pojedinci vrate mi raspoloženje i osmijeh na lice kada riješe ovaj zadatak u tri reda, koristeći činjenicu da su pravokutni trokuti ΔACD i ΔBCE slični (Zašto?). Iz te sličnosti trokuta slijedi razmjer:

$$|CD| : |CE| = |AC| : |BC|, \text{ tj.}$$
$$2 : 3 = (5 + 3) : (x + 2),$$
$$2(x + 2) = 3 \cdot 8,$$
$$x = 10.$$

Još me više obraduju oni koji uoče da zbog $|\angle AEB| = |\angle ADB| = 90°$ točke *D* i *E* pripadaju kružnici *k* čiji je promjer dužina $\overline{AB}$. Sada iskoriste teorem o potenciji točke *C* u odnosu na kružnicu *k*, te dobivaju:

$$|CE| \cdot |CA| = |CD| \cdot |CB|, \text{ tj.}$$
$$3 \cdot 8 = 2(2 + x)$$
$$24 = 4 + 2x$$
$$x = 10.$$

Neki kažu na kraju da smo zadatak mogli riješiti koristeći izračunavanje površine trokuta *ABC*, tj. $p_{\Delta ABC} = \dfrac{|BC| \cdot |AD|}{2} = \dfrac{|AC| \cdot |BE|}{2}$, ili trigonometriju, ili pak analitičku geometriju, što je točno. Ali - zašto komplicirati kada sve može biti jednostavno?

Zadatak 6. Treba izračunati maksimalnu vrijednost izraza $\log x + \log y + \log z$ ako su $x, y, z > 0$, a da pri tome vrijedi jednakost $x + 4y + 16z = 120$.

Rješenje: Uh, zadatak u vezi nalaženja ekstrema, i to uvjetnog, funkcije od tri varijable, uz korištenje Lagrangeovog multiplikatora λ! Pa to je matematička analiza! U pitanju je funkcija:

$$F(x,y,z,\lambda)=\log x+\log y+\log z+\lambda(x+4y+16z-120).$$

Parcijalne derivacije, prvi diferencijal funkcije i još koješta?! Uistinu teško!?

Ali - nije tako! Tu je sjajna ideja koristiti nejednakost između aritmetičke i geometrijske sredine tri pozitivna broja, kao i pravilo za logaritam produkta. Sitnica! Imamo:

$$\begin{aligned}
&\frac{x+4y+16z}{3}\geq\sqrt[3]{x\cdot 4y\cdot 16z};\ (x,y,z>0)\\
&\Leftrightarrow \frac{120}{3}\geq\sqrt[3]{64xyz}\\
&\Leftrightarrow 40\geq 4\cdot\sqrt[3]{xyz}\\
&\Leftrightarrow xyz\leq 1000\\
&\Leftrightarrow \log x+\log y+\log z\leq 3\\
&\Leftrightarrow Max(\log x+\log y+\log z)=3\,,
\end{aligned}$$

ako je $x=4y=16z$, tj. $\frac{x}{16}=\frac{y}{4}=z$.

Izvrsno rješenje!

Zadatak 7. Ako je $S_n=1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3$, treba izračunati

$$\frac{1}{\sqrt{S_1}}+\frac{1}{\sqrt{S_2}}+\frac{1}{\sqrt{S_3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{S_{2011}}}.$$

Rješenje: Znamo mi da vrijedi pravilo:

$$S_n=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2,$$

dokazali smo ga pomoću principa matematičke indukcije.

Imamo sada:

$$\frac{1}{\sqrt{S_n}}=\frac{2}{n(n+1)}=2\cdot\frac{1}{n(n+1)}=2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right).$$

Ovo se svodi na poznate postupke. Sjajno!

Slijedi

$$\frac{1}{\sqrt{S_1}}+\frac{1}{\sqrt{S_2}}+\frac{1}{\sqrt{S_3}}+...+\frac{1}{\sqrt{S_n}}=$$

$$2\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+...+\frac{1}{2010\cdot 2011}\right)=$$

$$=2\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...+\frac{1}{2011}-\frac{1}{2012}\right)=$$

$$=2\left(1-\frac{1}{2012}\right)=\frac{2011}{1006}.$$

Mišljenja smo da će se ovih sedam zadataka i njihovih raznih rješenja svidjeti čitateljima ovoga članka. Sigurno će im dati put i neke ideje za bavljenje matematikom u budućnosti. Tu pretežno mislim na mlade matematičare i nastavnike koji rade s učenicima koji pokazuju veći interes za matematiku.

LITERATURA

[1] Arslanagić, Š.: *Matematika za nadarene*, Bosanska riječ, Sarajevo, 2004.

[2] Arslanagić, Š.: *Matematička čitanka 3*, Grafičar promet d.o.o., Sarajevo, 2011.

[3] Dakić, B.: *Matematički panoptikum*, Školska knjiga, Zagreb, 1995.

[4] Polya, G.: *Matematičko otkriće*, HMD, Zagreb, 2003.