# Model, dva primjera i graf

Petar Mladinić[1]

*U društvu utemeljenom na informacijama i tehnologiji potrebno je kritički misliti o složenim temama, tumačiti dostupne informacije, analizirati nove situacije i prilagoditi im se, donositi utemeljene odluke u svakodnevnomu životu, rješavati različite probleme, učinkovito primjenjivati tehnologiju te razmjenjivati ideje i mišljenja...*

*...Poučavanje i učenje matematike uključuje stjecanje znanja, vještina i sposobnosti računanja, procjenjivanja te logičkoga i prostornoga mišljenja. Matematički pristup problemima obuhvaća odabir i pravilnu primjenu osnovnih matematičkih vještina, otkrivanje pravilnosti u oblicima i brojevima, izradbu modela, tumačenje podataka te prepoznavanje i razmjenjivanje s njima povezanih ideja. Rješavanje matematičkih problema zahtijeva kreativnost i sustavan pristup, što igra glavnu ulogu u izumima (inovacijama) te znanstvenim i tehničkim otkrićima...*

*...Tijekom matematičkoga obrazovanja učenici... bavit će se matematičkim problemima koji proizlaze iz svakodnevnih, stvarnih i smislenih situacija i time uspostaviti poveznice između matematike i svakodnevnoga života te drugih područja odgoja, obrazovanja i ljudske djelatnosti. Imat će prilike primijeniti matematiku u proširivanju i primjeni vlastitih znanja, vještina i sposobnosti...* (NOK, str. 80.)

*****

U ovom članku ilustrirat ćemo kako se s „malo" elementarne matematike mogu promišljati realni problemi/situacije i kako se efikasno mogu rasčlanjivati tvrdnje iz različitih izvora. Matematika koja će se ovdje spomenuti je skoro svakodnevna.

*****

Godine 1883. njemački je fiziolog **Max Rubner** razmatrao vezu između duljine/visine životinja i njihove mase. Predložio je zakon *skaliranja* koji je objasnio sljedećim argumentima: ako je životinja k puta viša/dulja od druge životinje, tad joj površina treba biti $k^2$ puta veća, a masa $k^3$ puta veća jer je masa proporcionalna volumenu. To je sukladno našoj geometrijskoj predodžbi kako se površina i volumen tijela mijenjaju promjenom temeljne linearne veličine. Smatrao je, nadalje, da metabolizam $E$ zavisi o gubitku količine topline i da ga treba razmatrati u skladu s površinom tijela.

[1]Petar Mladinić, V. gimnazija, Zagreb

Dakle, metabolizam $E$ je proporcionalan s površinom $P$, a površina $P$ je proporcionalna s kvadratom visine/duljine $v$ tijela, tj. vrijedi

$$E \sim P \sim v^2.$$

S druge strane, volumen $V$ tijela proporcionalan je s kubom visine $v$ i jednak je umnošku gustoće $\rho$ (koju se može smatrati konstantnom za životinje) i mase $M$ tijela, tj. vrijedi

$$V \sim v^3,\ V = \rho \cdot M.$$

Dakle, visina $v$ je proporcionalna s $M^{\frac{1}{3}}$. Konačno, može se zaključiti da je

$$E \sim v^2 \sim \left(M^{\frac{1}{3}}\right)^2 = M^{\frac{2}{3}},$$

tj. da je metabolizam $E$ proporcionalan s $M^{\frac{2}{3}}$. Taj je model tek 1984. godine **K. Schmidt-Nielsen** popravio i istraživanjem/mjerenjem pokazao da je eksponent jednak $\frac{3}{4}$, a ne $\frac{2}{3}$.

Godine 1932. američki je biolog **Max Kleber** podatke o različitim sisavcima i pticama prikazao u koordinatnoj ravnini. Na osi apscisa prikazao je logaritme masa organizama (u kg), a na osi ordinata logaritme njihovih količina kalorija koju konzumiraju svaki dan. Kleber je uočio da se dobivene točke „nalaze" na pravcu čiji je koeficijent smjera jednak $k = 0.74$. Matematički gledano, Kleber je uočio jednadžbu pravca oblika

$$\log y = k \cdot \log x + l.$$

Godine 2004. biolozi **J. B. West** i **J. H. Brown** su u časopisu *Nature* objavili rad u kojem su dokazali da je koeficijent (eksponent) $k = \frac{3}{4} = 0.75$, a ne 0.74.

Nadalje, u biološkoj se literaturi može pročitati da se volumen mozga $V$ mijenja s tjelesnom masom $m$ po zakonu

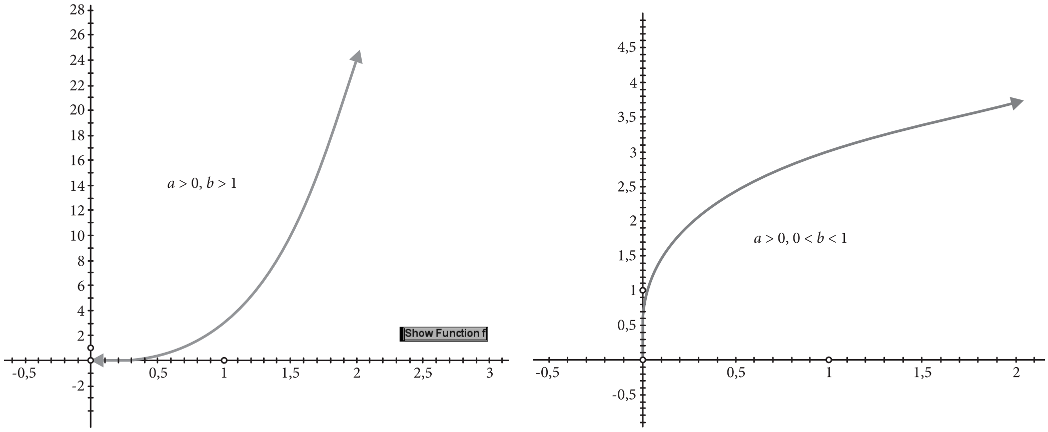
$$V(m) = a \cdot m^b,\ a, b > 0.$$

*****

Prethodno spomenuta istraživanja kao i mnoga druga ukazuju da se, matematički gledano, radi o modelu kojem je u pozadini funkcija *opća potencija*, odnosno njezina restrikcija na pozitivne realne brojeve

$$f : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+,\ f(x) = ax^b,\ a, b > 0.$$

Njezin je graf dan na slici 1.




*Slika 1.*

Za konkretne slučajeve trebalo bi, pomoću danih podataka, odrediti koeficijente $a$ i $b$. U tom se slučaju treba riješiti sustav eksponencijalnih jednadžbi. Transformira li se $y = ax^b$ tako da se logaritmira, tj. preslika logaritamskom funkcijom u novi koordinatni sustav, dobiva se

$$\log y = \log a + b \log x.$$

U novom koordinatnom sustavu gdje su $x' = \log x$, $y' = \log y$, $a' = \log a$, graf je pravac $y' = a' + bx'$.

Sad se nepoznati koeficijenti $\log a$ i $b$ dobivaju rješavanjem sustava dviju linearnih jednadžbi. Za to nam trebaju biti poznate dvije točke (ili podatka) $(x_1, y_1)$ i $(x_2, y_2)$. Uvrštavanjem u jednadžbu $\log y = \log a + b \log x$, dobivamo sustav jednadžbi

$$\log y_1 = \log a + b \log x_1,$$

$$\log y_2 = \log a + b \log x_2.$$

Rješenje sustava je

$$b = \frac{\log y_2 - \log y_1}{\log x_2 - \log x_1}, \quad \log a = \log y_1 - b \log x_1,$$

odnosno

$$b = \frac{\log y_2 - \log y_1}{\log x_2 - \log x_1}, \quad a = 10^{\log y_1 - b \log x_1}.$$

Ovim se modelom može opisati/modelirati i niz drugih prirodnih fenomena: vrijeme veslača u utrci, prinos šume, Newtonov zakon hlađenja, površina kože, visina i promjer sekvoje itd.

## Veličina mozga čimpanze

Pogledajmo kako se naš model slaže s podatcima koji su dobiveni za odrasle čimpanze. U tablici su prikazani podatci. Volumen $V$ mjeren je u $cm^3$, a tjelesna masa $m$ u kg.

| $m$ | 31 | 36 | 38 | 41 | 42 | 45 | 47 | 48 | 50 | 53 | 55 | 57 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $V$ | 365 | 380 | 382 | 395 | 397 | 410 | 410 | 415 | 420 | 427 | 437 | 440 |

Sukladno našem pretpostavljenom modelu, imamo

$$V(m) = a \cdot m^b,\ a,\ b > 0.$$

Odavde je

$$\log V(m) = \log(a) + b\log(m).$$

Uvrštavanjem podataka, primjerice $m_1 = 31,\ V_1 = 365$ i $m_2 = 57,\ V_2 = 440$, u formulu i rješavanjem sustava dobiva se

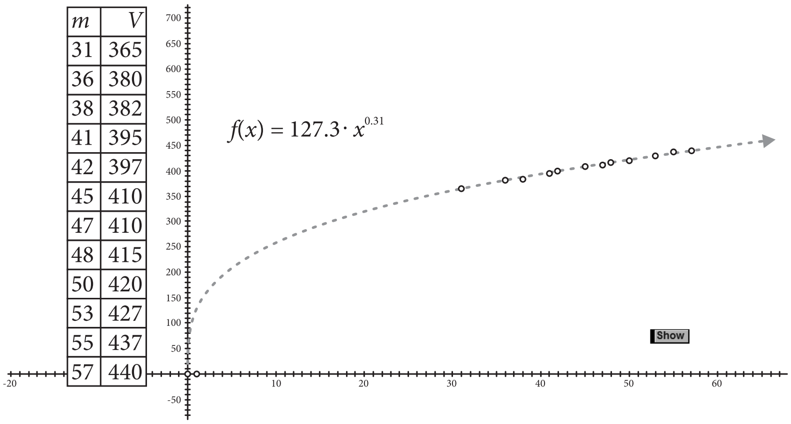
$$b \approx 0.31,\ a \approx 127.3.$$

„Grubi” model volumena mozga čimpanze ima oblik

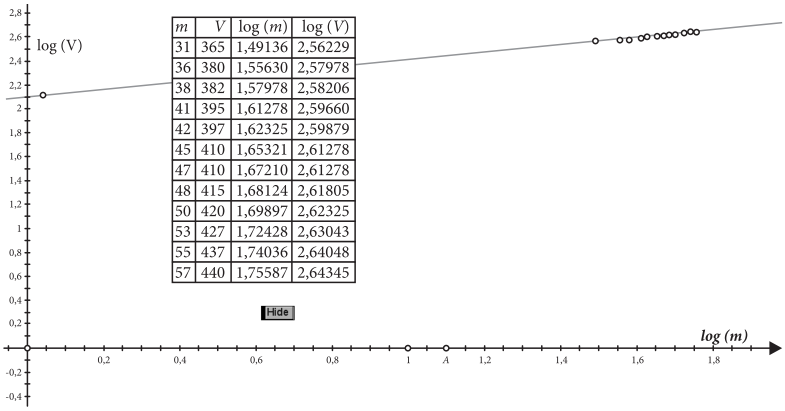
$$V(m) = 127.3 \cdot m^{0.31}.$$

Možemo uočiti da je $b \approx \dfrac{1}{3}$, pa model odgovara našoj geometrijskoj predodžbi da se volumen povećava s kubom temeljne linearne veličine.

Prikažimo podatke i funkciju u običnom te u „log-log” prikazu.




| $m$ | $V$ |
|---|---|
| 31 | 365 |
| 36 | 380 |
| 38 | 382 |
| 41 | 395 |
| 42 | 397 |
| 45 | 410 |
| 47 | 410 |
| 48 | 415 |
| 50 | 420 |
| 53 | 427 |
| 55 | 437 |
| 57 | 440 |




| $m$ | $V$ | log ($m$) | log ($V$) |
|---|---|---|---|
| 31 | 365 | 1,49136 | 2,56229 |
| 36 | 380 | 1,55630 | 2,57978 |
| 38 | 382 | 1,57978 | 2,58206 |
| 41 | 395 | 1,61278 | 2,59660 |
| 42 | 397 | 1,62325 | 2,59879 |
| 45 | 410 | 1,65321 | 2,61278 |
| 47 | 410 | 1,67210 | 2,61278 |
| 48 | 415 | 1,68124 | 2,61805 |
| 50 | 420 | 1,69897 | 2,62325 |
| 53 | 427 | 1,72428 | 2,63043 |
| 55 | 437 | 1,74036 | 2,64048 |
| 57 | 440 | 1,75587 | 2,64345 |

*Slika 2.*

Funkcija potencija u „log-log” koordinatnom sustavu prelazi u linearnu funkciju i njezin je graf pravac.

U mnogim se SF filmovima pojavljuju gigantski mravi, pauci, muhe, majmuni ili se ljudi smanjuju itd. Ovdje su nam važni - ne zbog umjetničkih dosega, nego u kontekstu traženja odgovarajućeg modela.

Razmotrimo još jedan primjer. Analizirat ćemo istinitost nekih maštovitih književnih tvrdnji Jonathana Swifta u *Gulliverovim putovanjima*.

## Gulliverova putovanja

Gulliver je na svojim putovanjima bio u Liliputu i Brobdingnagtu (kraće: Brobtu). Tamo je sretao stanovnike slične ljudima, puno manje te puno veće od Gullivera. Geometrijski govoreći, slični su ljudima, tj. smanjena su ili uvećana replika ljudi. Zbog pojednostavljivanja računanja neka su Liliputanci 10 puta manji/kraći, a Brobtanci 10 puta veći/dulji od Gullivera.

Kakve su biološke i druge posljedice ovih veličina? Mogu li se tako jednostavni zaključci o sličnosti u svim aspektima s ljudima održati, tj. biti istiniti u Swiftovoj priči?

Početni tjelesni volumen $V$ i s njim težina $T$ (koja je proporcionalna masi) mijenjaju se kao $v^3$, gdje je $v$ duljina/visina Gullivera. Dakle, Liliputanci imaju $10^3 = 1000$ puta manju težinu, a Brobtanci 1000 puta veću. S druge strane, površina $P$ tijela je proporcionalna s $v^2$, pa je Liliputanci imaju 100 puta manju kožu, a Brobtanci 100 puta veću.

Poznata je biološka činjenica da toplokrvni organizmi gube toplinu preko kože, pa je izgubljena toplina $E$ proporcionalna s površinom $P$ tijela, tj. vrijedi

$$E \sim P \sim v^2.$$

Izvorno, toplina je oblik energije. Izgubljena energija mora biti uravnotežena s ulaznom energijom u obliku hrane, pa je pojedena hrana proporcionalna s površinom *P*.

Pretpostavimo da Gulliver ima masu 80 kg, da svaki dan pojede $\frac{1}{40}$ svoje mase, tj. svaki dan pojede 2 kg hrane, i da mu za to treba 1 sat. Liliputanac ima $10^3 = 1000$ puta manju masu. Dakle, njegova je masa jednaka 0.08 kg. Površina kože mu je $10^2 = 100$ puta manja, pa treba pojesti $\frac{2}{100} = 0.02$ kg hrane svaki dan. To je $\frac{1}{4}$ njegove mase (nasuprot Gulliverove $\frac{1}{40}$). Dakle, Liliputanac, u odnosu na svoju masu, treba pojesti deset puta više nego Gulliver. Za to mu onda treba 10 sati. Kad se to kombinira s nabavkom i pripremom hrane, ostaje mu vrlo malo vremena za razvoj društva sličnog ljudskom.

Za Brobtance slično razmatranje ukazuje da im ostaje puno vremena za razvoj društva. No, oni imaju drugi problem. To su kosti! Pogledajmo kosti njihovih nogu koje moraju izdržati puno veću masu tijela.

Jednostavan model ukazuje da treba razmotriti pritisak *F* na podlogu, tj. silu po jedinici površine koju kost treba izdržati, a koja zavisi o debljini/promjeru *d* kosti noge. Ako kost noge ima poprečni presjek $p$, $p \sim d^2$ i podržava cijelu težinu *T*, tada iz uravnoteženosti slijedi

$$F \cdot p = T.$$

Ako je *d* skaliran s visinom *v*, onda je

$$d^2 \sim v^2 \sim T^{\frac{2}{3}},$$

odnosno

$$F \sim T^{\frac{1}{3}}.$$

Ako se težina povećava, a kosti ne mogu izdržati pritisak, one će se polomiti. Kako bi se to spriječilo, debljina *d* mora rasti brže od visine *v*. Ako se pritisak na podlogu čuva stalno, onda je $d^2 \sim T$, odnosno $d \sim T^{\frac{1}{2}}$.

Dakle, ako je Brobtanac 1000 puta teži, njegove noge trebaju biti oko $\sqrt{1000} \approx 32$ puta deblje. Znači da su njegove noge nesrazmjerno ugojene i da Brobtanac nije uvećana verzija čovjeka.

Biolog **Herbert Lin** je 1988. godine u svojem razmatranju uzeo i druge činjenice i dobio bolji model

$$d \sim T^{\frac{5}{12}}.$$

Zoologičari mjere masu kostura $T_k$ i povezuju je s funkcijom tjelesne mase $T$ za različite životinje. Evo nekih vrijednosti masa (izraženih u kilogramima):

| životinja | rovka | miš | mačka | zec | dabar | čovjek | slon |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $T$ | 0.0063 | 0.0295 | 0.845 | 2.0 | 22.7 | 67.3 | 6600 |
| $T_k$ | 0.0003 | 0.0013 | 0.0436 | 0.181 | 1.15 | 12.2 | 1782 |

Uz pretpostavku da je $T_k \sim v \cdot d^2$ vrijedi

$$T_k \sim T^{\frac{1}{3}} \cdot \left(T^{\frac{5}{12}}\right)^2 = T^{\frac{7}{6}}.$$

Provjerite ovu formulu/model s eksperimentalnim podatcima iz tablice. Nacrtajte „log-log" graf.

Na kraju, predlažemo da razmotrite sljedeća četiri problema.

## Problemi

**1.** (*Površina ljudske kože.*) Površina čovjeka („oplošje" čovjeka) $P$ povezana je s prosjekom njegove mase $M$ i visine $H$ prema formuli

$$P = aM^bH^c, \text{ gdje su } a, b, c \text{ konstante.}$$

U tablici je dana površina u $m^2$ i masa u kg za skupine iste visine (1.80 m). Uz fiksirani $H$ formula

$$P = a \cdot M^b$$

treba opisati podatke.

| $M$ | 70 | 75 | 77 | 80 | 82 | 84 | 87 | 90 | 95 | 98 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $P$ | 2.10 | 2.12 | 2.15 | 2.20 | 2.22 | 2.23 | 2.26 | 2.30 | 2.33 | 2.37 |

**a)** Nacrtajte „log-log" graf podataka i pokažite da podatci leže približno na pravcu.

**b)** Odredite približne vrijednosti za $a$ i $b$.

**c)** Uz napomenu da je visina fiksirana, uporabite skalirane argumente uvjerljivo na račun promatrane vrijednosti $b$.

**2.** (*O lavovima i domaćim mačkama.*) Imamo domaću mačku mase 5.9 kg i dugu 0.85 m (zajedno s repom), koja jede oko 150 g hrane dnevno. Lavica, u prosjeku, duga je 2.44 m (zajedno s repom), mase 124.8 kg i, u divljini, jede oko 123.6 kg hrane svakih 6 dana. Skaliranim argumentima procijenite očekivanu težinu i očekivanu dnevnu potrošnju hrane za domaću mačku. Usporedite očekivane vrijednosti s aktualnim vrijednostima i mogućim objašnjenjima za svako odstupanje.

**3.** (*Gigantski mravi ubojice.*) Za neku vrstu mrava tipični je mrav dugačak 1.0 cm, mase 0.20 g i može podignuti/odvući teret 100 puta veći od njegove tjelesne mase. U jednom holivudskom filmu gigantska verzija mrava napada i uništava grad. Svaki gigantski mrav dugačak je 10 m. Uporabite skaliranje argumenata raspravljajući što je pogrešno u scenariju filma. Može li gigantski mrav podignuti svoju vlastitu masu?

**4.** (*Sekvoja.*) Prema jednom modelu za visinu drveta promjer u bazi ugrubo je proporcionalan s potencijom $x^{\frac{3}{2}}$, gdje je $x$ udaljenost od vrha drveta. Najviša sekvoja u *Sequoia National Parku* u Kaliforniji visoka je 81 m i ima promjer baze 7.6 m te masu 6 100 metričkih tona.

**a)** Objasnite promatrani promjer s udaljenošću $x$.

**b)** Uporabite dane podatke i izvedite formulu za promjer $d$ s udaljenošću $x$ od vrha sekvoje.

**c)** Tabelirajte i nacrtajte graf za $d$ u rasponu od $x = 0$ do $x = 100$.

**d)** Okamenjena sekvoja pronađena u Nevadi ima duljinu 90 m. Procijenite promjer baze kada je bila živa.

**e)** Izvedite formulu za obujam $V$ sekvoje pomoću duljine $x$ metara.

**f)** Tabelirajte i nacrtajte graf za $V$ u intervalu $x = 0$ do $x = 100$ m.

**g)** Izračunajte prosječnu gustoću u metričkim tonama po kubnom metru sekvoje rabeći podatke za najviše drvo. Kolika je bila masa okamenjene sekvoje u metričkim tonama kad je bila živa?

## Literatura

1. K. K. Tung: *Topics in Mathematical Modeling*, Princenton University Press, Princeton 2007.
2. COMAP: *Mathematics: Modeling Our World*, vol. 1, 2, 3, 4, Freeman, New York 2000.
3. R. H. Enns, G. C. McGuire: *An Introductory Guide to the Mathematical Models of Science*, Springer, New York 2006.
4. D. Kalman: *Elementary Mathematical Models*, The Mathematical Association of America, Washington 1997.
5. J. A. Adam: *Modeling Patterns in the Natural World*, Princenton University Press, Princeton 2003.
6. D. D. Mooney, R. J. Swift: *A Course in Mathematical Modeling*, The Mathematical Association of America, Washington 1999.