

Vjerojatnost u nižim razredima osnovne škole

TANJA SOUCIE¹

Nacionalni okvirni kurikulum (NOK) - Matematičko područje donio je nekoliko važnih promjena u nastavi matematike u osnovnoj i srednjoj školi. Uz navođenje matematičkih domena i ishoda koji precizno opisuju učenička postignuća unutar svake domene, posebna se pažnja usmjerila na matematičke procese. Ukoliko ih doista želimo razvijati, potrebno je promijeniti pristup poučavanju nastave matematike. Od učenika se mora zahtijevati da se aktivno uključe u nastavni proces te da sami eksperimentiraju, pretpostavljaju, opažaju i opisuju zakonitosti, raspravljaju o matematičkim idejama, rješavaju probleme, zaključuju, povezuju različite matematičke sadržaje te učinkovito primjenjuju tehnologiju. Nastavnici stoga trebaju učenicima omogućiti što više aktivnosti u kojima će moći rješavati probleme primjenjujući tzv. *Polyine* korake (postaviti i analizirati problem, isplanirati njegovo rješavanje, riješiti problem, te interpretirati i vrednovati rješenje i postupak), matematički modelirati te samostalno izgrađivati novo matematičko znanje [1].

U nižim razredima osnovne škole pod domenom *Podatci* opisani su ishodi prema kojima se od učenika očekuje da će:

- prikupiti, razvrstati i organizirati podatke koji proizlaze iz svakodnevnoga života te ih prikazati jednostavnim tablicama, piktogramima (slikovnim dijagramima) i stupčastim dijagramima
- pročitati i protumačiti podatke prikazane jednostavnim tablicama, piktogramima i stupčastim dijagramima
- prebrojiti različite ishode u jednostavnim situacijama rabeći stvarne materijale i dijagrame
- primjenjivati osnovni jezik vjerojatnosti (ishod, moguć, nemoguć, siguran, slučajan, vjerojatan, pravedna igra, nepravedna igra i slično)
- usporediti vjerojatnosti ishoda (manje vjerojatan, jednako vjerojatan, vjerojatniji) [2].

¹Tanja Soucie, OŠ Gustava Krkleca, Zagreb

Sljedećih nekoliko učeničkih aktivnosti pokazat će kako se poučavanjem vjerojatnosti u nižim razredima osnovne škole mogu razvijati matematički procesi opisani NOK-om te ujedno zainteresirati učenike za matematiku i time razvijati pozitivne stavove prema tom predmetu, još jednoj vrlo važnoj smjernici NOK-a.

Ishod: prebrojiti različite ishode u jednostavnim situacijama rabeći stvarne materijale i dijagrame

Aktivnost 1

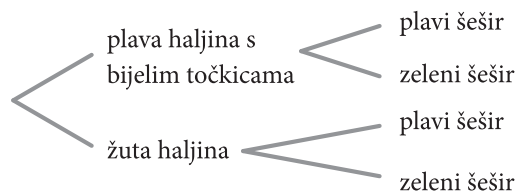
Medvjedići

Stan i Jan Bernstein napisali su poučne slikovnice kao što su *Medvjedići i proste riječi*, *Medvjedići i nevolje u školi*, *Medvjedići i nevolje s odraslima*, *Medvjedići i nezdrava hrana* i druge. Nakon čitanja i rasprave vezane uz navedenu temu na nastavnim predmetima kao što su Hrvatski jezik i/ili Priroda i društvo učenici mogu rješavati zadatke:

1. Na koliko različitih načina možemo obući mamu medvjedicu ako imamo jedan plavi šešir, jedan žuti šešir te jednu haljinu?
2. Na koliko različitih načina možemo obući mamu medvjedicu ako imamo dvije različite haljine i dva različita šešira?
3. Na koliko različitih načina možemo obući tatu medvjedića ako imamo troje različite hlače i dvije različite majice?

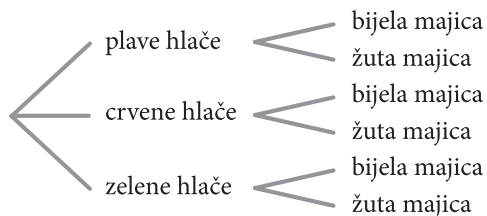
Pri rješavanju zadataka učenici mogu svaku moguću situaciju nacrtati te na kraju prebrojiti sva različita rješenja. Zadatci mogu poslužiti i kao motivacija za množenje. Primjerice, ako imamo dvije različite haljine (npr. plavu s bijelim točkicama i žutu) i dva različita šešira (npr. plavi i zeleni), mamu medvjedicu moguće je obući na $2 \cdot 2 = 4$ načina. Tatu medvjedića, ako imamo troje različite hlače (npr. plave, crvene i zelene) i dvije različite majice (npr. bijelu i žutu), moguće je obući na $3 \cdot 2 = 6$ načina. Rješenja je moguće prikazati pomoću dijagrama *stabla*:

Mama medvjedica



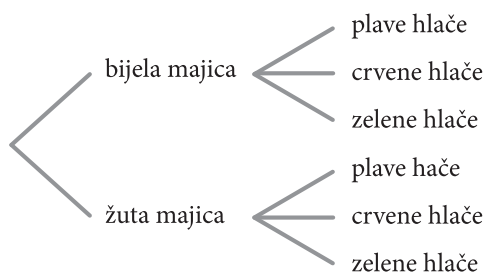
ukupno 4 mogućnosti

Tata medvjedić



ukupno 6 mogućnosti

ili



ukupno 6 mogućnosti

Na internetskim stranicama <http://www.berenstainbears.com/dressup.html> mogu se pronaći lutkice mame, tate, brata i sestre medvjedića, te odjeća za njihovo oblačenje, a sve se može isprintati. Naravno, učenici mogu i sami nacrtati medvjediće i njihovu odjeću, izrezati ih i raditi s materijalima koje su sami izradili [3].

Sličnu aktivnost moguće je provesti i s *pizzama*. Učenicima se da krug - *pizza* i sličice različitih sastojaka kao što su sir, šunka i gljive, te se od njih traži da odrede koliko se različitih vrsta *pizza* može napraviti od zadanih sastojaka ako na *pizzi* može biti točno jedan sastojak, točno dva sastojka, točno tri sastojka, bilo koji broj sastojaka. Učenici crtaju i prebrojavaju moguće ishode.

Aktivnost 2

Zbrojevi

Učenici rade u skupinama od po 12 učenika. Svaki učenik odabire broj od 1 do 12, uključujući i navedene brojeve. Svaki učenik mora odabrati jedinstven broj. (Ako nije moguće igrati u skupinama od po 12 učenika, neki učenici mogu igrati s dva broja.) Za provođenje aktivnosti potrebna je igraća ploča kao što je na slici,

START

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

CILJ

Igraća ploča

te 12 različitih figurica ili kartica s brojevima od 1 do 12. Svaki učenik postavlja svoju figuricu na broj koji je odabrao. Učenici zatim redom bacaju po dvije igraće kockice. Pri svakom bacanju brojevi na kockicama se zbrajaju, a učenik čiji je odabrani broj jednak zbroju kockica svoju figuru pomiče jedno mjesto unaprijed. Pobjednik je igrač koji prvi dođe do cilja. Na kraju igre učenike treba pitati koja se figurica nije niti jednom pomakla i zbog čega, te koji su mogući zbrojevi koje možemo dobiti zbrajanjem brojeva s dviju igračih kockica.

Učenici istu igru mogu ponavljati više puta te odgovarati na pitanja kao što su:

1. Koji je igrač (igrač) pobijedio najveći broj puta?
2. Što mislite, zbog čega?
3. Pojavljuju li se neki zbrojevi češće od drugih? Ako da, koji?
4. Na koliko načina možemo dobiti zbroj 2? A zbroj 3?
5. Na koliko načina možemo dobiti preostale zbrojeve?
6. Koje je zbrojeve (ili zbroj) moguće dobiti na najviše načina?
7. Kada biste igru mogli ponoviti, koji biste broj odabrali? Zbog čega?
8. Je li igra pravedna?
9. *Nadogradnja:* Kada bismo umjesto zbrajanja brojeve množili, koje bismo umnoške mogli dobiti? Bi li neki umnoški pobjeđivali češće od drugih? Objasnite svoje odgovore.

Ishod: primjenjivati osnovni jezik vjerojatnosti (ishod, moguć, nemoguć, siguran, slučajan, vjerojatan, pravedna igra, nepravedna igra i slično)

Aktivnost 1

Što ćemo vidjeti u...

... dvorani?

Učitelj na ploči crta tablicu s naslovima *vidjet ćemo (sigurno)*, *možda ćemo vidjeti (moguće)*, i *nećemo vidjeti (nemoguće)*. Učitelj učenicima pokazuje slikovne kartice te ih pita: „Što mislite, hoćemo li ovo vidjeti kada odemo u dvoranu?” Učenici zatim sliku lijepe na odgovarajuće mjesto u tablici te objašnjavaju svoje zaključivanje. Možemo ih voditi pitanjima:

1. Što ćemo sigurno vidjeti u dvorani? Zbog čega mislite da ćemo to vidjeti?
2. Što je moguće vidjeti u dvorani? (Što ćemo možda vidjeti?) Zbog čega mislite da je to moguće vidjeti?
3. Što je nemoguće vidjeti u dvorani? Zbog čega to nikada ne vidimo u dvorani?



Primjeri kartica

Učitelj zatim učenike vodi u dvoranu da provjere svoja predviđanja. Nakon toga učenicima se mogu postavljati pitanja kao što su:

1. Jesmo li vidjeli sve što smo smatrali da ćemo sigurno vidjeti?
2. Jesmo li vidjeli nešto od onog za što smo mislili da je moguće vidjeti u dvorani? Što?
3. Jesmo li vidjeli nešto što smo smatrali da sigurno nećemo vidjeti, tj. da je nemoguće vidjeti u dvorani? Zbog čega je to nemoguće vidjeti u dvorani?

Slična se aktivnost može povezati i s *prirodom i društvom* ako postavimo pitanje kao što je

Što ćemo vidjeti u bari?

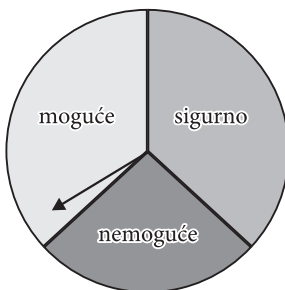


Primjeri kartica

Aktivnost 2

Moguće, nemoguće, sigurno

Učitelj izrađuje zvrk u kojemu su tri ishoda *moguće*, *nemoguće* i *sigurno* jednako vjerojatna. Učenici dolaze pred ploču i zavrte zvrk. Ako je zvrk zastao na ishodu *moguće*, učenik koji je zavrteo zvrk treba izreći tvrdnju koja je moguća. Primjerice: *Danas ću se igrati s prijateljicom/prijateljem nakon škole*. Ako se zaustavi na ishodu *nemoguće*, tvrdnja može glasiti: *Danas ću jahati na slonu*. Ako se zaustavi na ishodu *sigurno*, tvrdnja može biti: *Danas ću, prije nego odem kući iz škole, svoje knjige pospremiti u torbu*.



Primjer zvrka

Aktivnost 3*Magnetići*

Učitelj stavlja tri magnetića u vrećicu – plavi, zeleni i žuti. Učitelj kaže učenicima da će bez gledanja izvući jedan magnetić iz vrećice. No, prije nego to učini, učenici odgovaraju na pitanja kao što su:

1. Je li moguće izvući žuti magnetić? Zbog čega?
2. Je li moguće izvući crni magnetić? Zbog čega?
3. Magnetiće koje boje je moguće izvući? Zbog čega?
4. Navedi barem jednu boju magnetića koju je nemoguće izvući? Zbog čega?
5. Marko pobjeđuje ako učitelj izvuče plavi magnetić, Ana ako izvuče zeleni magnetić, a Tia ako izvuče žuti magnetić. Što misliš, je li igra pravedna? Objasni svoj odgovor.
6. Ante pobjeđuje ako učitelj izvuče plavi magnetić, Ranka ako izvuče žuti magnetić, a Adam ako izvuče bijeli magnetić. Što misliš, je li igra pravedna? Objasni svoj odgovor.
7. Što možeš sa sigurnošću ustvrditi o boji magnetića koju će učitelj izvući?
8. Što je vjerojatnije, da će učitelj izvući žuti ili da će izvući plavi magnetić? Objasni svoj odgovor.
9. Što je vjerojatnije, da će učitelj izvući zeleni ili da će izvući ljubičasti magnet? Objasni svoj odgovor.

Učitelj nekoliko puta izvuče magnetić iz vrećice (svaki put izvučeni magnetić vrati u vrećicu), a učenici provjeravaju svoje odgovore. Za mlađe je učenike moguće, prije postavljanja pitanja, nekoliko puta izvući magnetić i vidjeti koji će magnetić biti izvučen.

Ishodi:

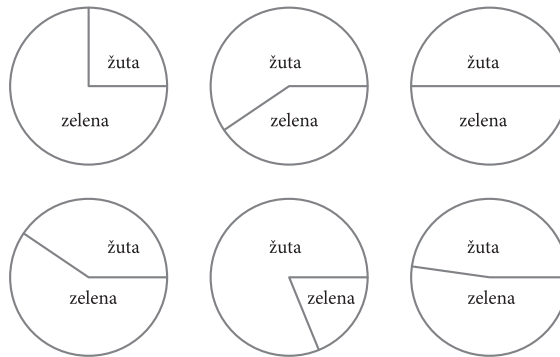
- prebrojiti različite ishode u jednostavnim situacijama rabeći stvarne materijale i dijagrame
- primjenjivati osnovni jezik vjerojatnosti (ishod, moguć, nemoguć, siguran, slučaj, vjerojatan, pravedna igra, nepravedna igra i slično)

Aktivnost 1*Pravedno ili nepravedno*

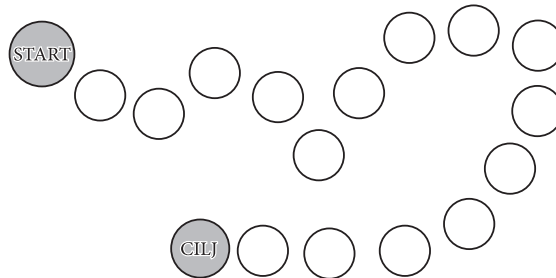
1. Učenici igraju igru *pismo, glava* uz pomoć novčića i zapisuju moguće ishode. Učenici odgovaraju na pitanje je li igra pravedna te obrazlažu svoje odgovore.

- Učenici u tročlanim skupinama uzastopno deset puta bacaju dva novčića i zapisuju rezultate (pobjednika). Prvi učenik pobjeđuje ako se pokažu pismo i glava, drugi ako se pokažu dvije glave, a treći ako se pokažu dva pisma. Na kraju učenici odgovaraju na pitanje je li igra pravedna te obrazlažu svoje odgovore.
- Učenici igraju igru *par, nepar, bim, bam, bus* i zapisuju moguće ishode. Učenici odgovaraju na pitanje je li igra pravedna te obrazlažu svoje odgovore. Učenici mogu promijeniti pravilo igre te umjesto zbrajanja brojeve množe. Nakon što nekoliko puta odigraju igru s izmjenjenim pravilom, ispisuju moguće ishode te odlučuju je li igra pravedna. Svoju odluku argumentiraju.
- Učenici rade u parovima. Svaki učenik dobiva jedan papirnati zvrk (zvrkovi se mogu izraditi pomoću papira, olovke i spajalice – u sredini se probuši rupa i umetne spajalica koja se zatim olovkom zavrti), dvije igraće figure i igraću ploču. Prvi igrač pomiče svoju figuru za jedno polje ako se strelica zvrka zaustavi na žutoj, a drugi ako se zaustavi na zelenoj boji. Pobjednik je igrač koji prvi dođe do cilja. Igrači igru ponavljaju nekoliko puta i svaki put zapisuju koji je igrač pobijedio.

Na kraju igranja, učenici raspravljaju je li igra pravedna ili nepravedna. Svaki par može dobiti različiti zvrk, a na kraju igre jedan član para razredu pokazuje zvrk koji je njegov par koristio u igri te utvrđuje je li igra s tim zvrkom bila pravedna ili nepravedna i obrazlaže odgovor.



Primjer zvrkova



Primjer igraće ploče

Nakon igranja prethodno opisane igre sa zvrkovima, učenicima možemo zadati da nacrtaju primjer zvrka za četiri igrača (crvena, plava, žuta i zelena boja) koji bi bio pravedan i primjer zvrka za četiri igrača koji bi bio nepravedan.

Ishod: usporediti vjerojatnosti ishoda (manje vjerojatan, jednako vjerojatan, vjerojatniji).

Aktivnost 1

Zvrkovi

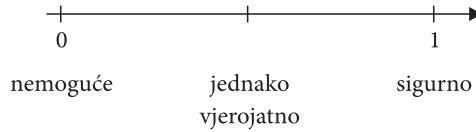
Aktivnost *Zvrkovi* nadogradnja je igre sa zvrkovima iz prethodne aktivnosti i namijenjena je starijim učenicima. Učenicima se zadaje da nacrtaju zvrkove prema sljedećim uputama.

1. Nacrtaj zvrk za dva igrača (koristeći žutu i plavu boju) tako da je vjerojatnije da će pobijediti igrač koji pobjeđuje kad se strelica zvrka zaustavi na plavoj boji.
2. Nacrtaj zvrk za tri igrača (koristeći plavu, crvenu i zelenu boju) tako da najveću vjerojatnost pobjede ima igrač koji pobjeđuje kada se strelica zaustavi na crvenom polju, a igrač koji pobjeđuje kada se zvrk zaustavi na zelenoj boji ima najmanju vjerojatnost pobjede. (Izgled zvrka ne mora nužno biti krug.)
3. Nacrtaj zvrk za dva igrača (koristeći plavu i zelenu boju) tako da igrač koji pobjeđuje kada se strelica zaustavi na plavoj boji ima dvostruko veću vjerojatnost pobjede od igrača koji pobjeđuje kada se strelica zaustavi na zelenoj boji. (Skica koja dobro aproksimira rješenje može se prihvatiti kao točan odgovor.)
4. Nacrtaj zvrk za tri igrača (koristeći plavu, crvenu i zelenu boju) tako da plava i zelena boja imaju jednake izgleda za pobjedu, a zelena ima najmanje izgleda za pobjedu.
5. Nacrtaj zvrk za četiri igrača (koristeći plavu, crvenu, zelenu i žutu boju) tako da je vjerojatnost pobjede žute boje jednaka vjerojatnosti pobjede svih ostalih boja zajedno.
6. Učenici rade u paru. Prvi učenik piše upute za crtanje zvrka, a drugi ga učenik crta. Na kraju onaj koji je napisao upute provjerava je li drugi član para pravilno nacrtao zvrk.
7. Učenici se podijele u parove. Svaki učenik u paru crta zvrk, daje ga drugom članu para, a zatim drugi član para piše upute kako nacrtati zvrk koji je prvi član para nacrtao.

Nakon svakog zadatka nekoliko učenika pokazuje svoje zvrkove, a ostali provjeravaju zadovoljava li zvrk sve uvjete zadatka.

Aktivnost 2

Na početku sata učitelj na ploču crta brojevnju crtu, kao što je prikazano slikom.



Brojevnja crta

Učitelj učenicima zadaje kartice s tvrdnjama kao što su: *Danas ćemo ići na ručak u školsku kuhinju. Danas ćemo pisati ispit iz matematike. Danas ćemo igrati graničara. Danas će padati snijeg.* Učenici trebaju karticu smjestiti na odgovarajuće mjesto na brojevnoj crti i obrazložiti svoje pozicioniranje kartice.

Alternativno, učitelj može umjesto crtanja brojevnje crte negdje u razredu raširiti i zavezati konop na kojega su kvačicama pričvršćene kartice *nemoguće, jednako vjerojatno* i *sigurno* (kao na slici *Brojevnja crta*), a na kojega će učenici kvačicama pričvrstiti svoju karticu.

Ovakva se aktivnost može provoditi i na satu hrvatskoga jezika pri čitanju priče. Učitelj prekida čitanje na određenom dijelu priče i pita učenike da predvide što će se dogoditi u nastavku. Primjerice, pri čitanju *Plesne haljine žutog maslačka* učitelj može dati karticu na kojoj piše *Maslačak će otići na ples* ili *Maslačku će se na plesu rugati*. Učenici zatim kartice stavljaju na brojevnju crtu na mjesto koje smatraju prikladnim te objašnjavaju svoju odluku. Učenici mogu i sami pisati tvrdnje o tome što misle da će se dogoditi dalje u priči, a zatim neki drugi učenik iz razreda karticu postavlja na brojevnju crtu.

Opisane aktivnosti učenicima omogućavaju da kroz igru otkrivaju koncepte vjerojatnosti i usvajaju jezik vjerojatnosti. One učenicima omogućavaju da samostalno kroz rješavanje problema izgrađuju novo matematičko znanje, logički zaključuju, argumentiraju svoje tvrdnje, povezuju matematičke sadržaje unutar i izvan matematičkog konteksta, prikazuju matematičke ideje na različite načine te komuniciraju raščelujući matematički jezik. Izgrađujući znanje o vjerojatnosti učenici istovremeno imaju priliku razvijati matematičke procese i time stjecati vještine koje će im biti potrebne u stvarnom životu te koje će ih pripremiti za cjeloživotno učenje. S obzirom da su aktivnosti vezane uz igru, one su učenicima zanimljive, te ih samim time potiču da stvaraju pozitivan stav prema matematici, što je jedan od općih ciljeva NOK-a.

Literatura:

- [1] Polya, G. (2003.), *Matematičko otkriće*, HMD, Zagreb.
- [2] NOK - <http://public.mzos.hr/Default.aspx?sec=2685> (1. 10. 2011.)
- [3] <http://www.berensteinbears.com/dressup.html> (3. 8. 2011.)