Parametri optimalne reprezentabilnosti D'Hondtove metode

Aleksandar Hatzivelkos[1]

1. Uvod

Motivaciju za ovaj članak nije bilo teško pronaći. Ne samo zbog toga što su nedavno završeni parlamentarni izbori, nego više zbog događaja i medijskih napisa koji se kontinuirano bave adekvatnošću izbornog sustava koji se koristi u Hrvatskoj. Cilj ovoga članka nije davanje političkih ocjena, ili donošenje političkih zaključaka, već opisivanje matematičkih pravilnosti i svojstava koja se nalaze u pozadini svakog izbornog sustava, kako bi, nadam se, i ti zaključci mogli poslužiti kao jedan od temelja i argumenata za eventualni budući odabir izbornog modela u Hrvatskoj.

U drugom odlomku definiramo i opisujemo veličine ključne za provođenje analize u ovom članku; nominalni i prirodni izborni prag, te analiziramo asimptotsko ponašanje. Svi rezultati u tom poglavlju odnose se na provođenje metode bez upotrebe nominalnog izbornog praga. U trećem odlomku analiziramo kako uključivanje nominalnog izbornog praga utječe na veličine i procese opisane u drugom odlomku. Konačno, u četvrtom odlomku objedinjujemo zaključke analize i dajemo završnu ocjenu o optimalnom izboru parametara za maksimiziranje reprezentabilnosti D'Hondtove metode.

1.1. D'Hondtova metoda

D'Hondtova metoda raspodjele mandatara u proporcionalnim izbornim sustavima nazvana je po belgijskom matematičaru Victoru D'Hondtu koji ju je opisao 1878. godine. Metoda pripada grupi djeliteljskih metoda „linearnog" tipa (kao i, primjerice, Jeffersonova, te Webster / Sainte-Lague metoda). Metode se često nazivaju i medodama „najvećeg kvocijenta". Pored djeliteljskih metoda, u širokoj su upotrebi i metode najvećih ostataka (poput Hamilton/Hare ili Droop metode), no ovaj se put bavimo analizom isključivo D'Hondtove metode, tj. njezine inačice koja je u upotrebi u Hrvatskoj. Nekoliko je razloga za tu odluku.

[1]Aleksandar Hatzivelkos, Zagreb

D'Hondtova je metoda trenutno najrasprostranjenija metoda izbora zastupnika u državama s proporcionalnim izbornim sustavom (Fernandez de Cordoba, Penades 2009.), s posebnim naglaskom na Europu. Osim toga, do danas u Hrvatskoj nije značajnije artikuliran zahtjev za prelazak na neku drugu metodu proporcionalnog izbora, te ostaje za pretpostaviti da će se i u eventualnim izmjenama izbornog zakonodavstva zadržati D'Hondtova metoda, pod uvjetom, naravno, da se zadrži i proporcionalni izborni sustav.

Kod metoda djelitelja, broj se osvojenih glasova svake liste dijeli nizom djelitelja. Potom se osvojena mjesta dodjeljuju redom listama koje postižu najveći kvocijent. Mjesta se dodjeljuju sve dok nisu dodijeljena sva raspoloživa mjesta u izbornoj jedinici. D'Hondtova metoda je, među svim djeliteljskim metodama, najjednostavnija, budući da su djelitelji prirodni brojevi. Ilustrirajmo raspodjelu mandata D'Hondtovom metodom na jednome primjeru.

Neka na izborima sudjeluju tri stranke - A, B i C - koje se bore za osvajanje pet mandata. Neka su stranke redom osvojile 30, 21 i 11 glasova. Konstruiramo tablicu djelitelja tako da svaki rezultat redom dijelimo brojevima 1, 2, 3, 4 i 5.

	1	2	3	4	5
lista A	**30**	**15**	10	7.5	6
lista B	**21**	**10.5**	7	5.25	4.2
lista C	**11**	5.5	3.67	2.75	2.2

Tablica 1. Primjer raspodjele mandata D'Hondtovom metodom

U tablici smo podebljali najvećih pet djelitelja koji listama donose mandate, i to sljedećim redoslijedom: prvi madnat donosi prvi djelitelj listi A (30), drugi mandat nosi prvi djelitelj liste B (21), treći mandat ide drugom djelitelju liste A (15), četvrti prvom djelitelju liste C (11), a peti drugom djelitelju liste B (10.5). Kada bi se, primjerice, dijelio i šesti mandat, on bi išao trećem djelitelju liste A (10). Ovako, od pet mandata, liste A i B dobivaju po dva, a lista C jedan.

Hrvatski izborni sustav ima dvije specifičnosti. Prva je ta da je teritorij Republike Hrvatske podijeljen u 10 izbornih jedinica, te da se u svakoj izbornoj jedinici listama dodjeljuje 14 zastupničkih mjesta. Pokazat ćemo da takva struktura igra važnu ulogu u određivanju konačnog sastava parlamenta. Druga je da postoji izborni prag od 5%. To znači da u proces raspodjele mandata mogu ući samo one liste koje su u toj izbornoj jedinici ostvarile izborni rezultat veći od 5%. Izborni zakon propisuje još dvije izborne jedinice: XI. izbornu jedinicu u kojoj se biraju tri zastupnika državljana bez prebivališta u Republici Hrvatskoj, te XII. u kojoj se bira osam zastupnika nacionalnih manjina; no ta politička komponenta izbornog sustava nije primarni interes ovog članka.

Kontekst korištenja D'Hondtove metode u Hrvatskoj u bitnome određuje ciljeve analize. Naime, u analizi izbornih sustava propituju se mnogi pojmovi, te se reprezentabilnost, ili pravednost sustava analizira na mnoge načine. Jedan od ciljeva analize često je omjer broja osvojenih glasova i broja dodijeljenih mjesta u parlamentu. Popularno, taj se kvocijent predstavlja kao broj glasova koje je određena stranka morala osvojiti za jedno mjesto u parlamentu. Takva analiza, primjerice, ima posebnu težinu u SAD-u, budući da u Ustavu SAD-a postoji odredba koja se interpretira da „*omjer dobivenih glasova i osvojenih mjesta za različite savezne države mora biti što bliži jednakosti koliko je to moguće*" (Woodall, 1986). Drugi je pak kriterij analiza razlika između postotka osvojenog na izborima i postotka osvojenih mjesta. Ta se razlika pak može mjeriti kao apsolutna ili kao relativna u odnosu na broj osvojenih glasova. Ocjena za mjeru odstupanja od savršene reprezentabilnosti može dati maksimalna vrijednost te razlike (promatrano s obzirom na liste koje su prešle izborni prag), zbroj njihovih aspolutnih vrijednosti, ili pak zbroj njihovih kvadrata.

Veličine koje se dobivaju tim analizama često služe kao temelj ocjeni kako je D'Hondtova metoda naklonjena velikim strankama, tj. prvim dvjema listama koje osvajaju najveći broj glasova. Pomalo je, tada, iznenađujući zaključak da na smanjenu reprezentabilnost ne utječe u tolikoj mjeri sama metoda, koliko odabir broja mjesta koja se dodjeljuju u izbornim jedinicama, kao i pogrešna interpretacija dobivenih podataka, a kojom se ne uzima u obzir postojanje izbornog praga.

U ovom članku pažnju ćemo prvenstveno posvetiti analizi utjecaja broja mandata koji se dodjeljuju u izbornoj jedinici na reprezentabilnost metode. Utoliko su nam od najvećeg interesa dvije situacije. Prva, u kojoj se dodjeljuje što veći broj mandata, a koju ćemo analizirati kroz asimptotsko ponašanje metode, te druga, u kojoj promatramo utjecaj na reprezentabilnost podjele (relativno) malog broja mandata. Kao osnovni kriterij reprezentabilnosti u tom slučaju uzet ćemo zahtjev da svaka lista koja pređe propisani izborni prag osvoji i mandat. Taj smo kriterij odabrali zbog činjenice da je relativno odstupanje udjela osvojenih mandata od udjela osvojenih glasova u odnosu na izborni rezultat maksimalno (tj. 100%) kada je broj osvojenih mandata jednak nuli.

Uvodimo sljedeće oznake. Neka $V_1, V_2, \dots, V_k \in N$ označava broj glasova koji je svaka od k lista dobila na izborima. Ukupan broj glasova označimo s $V \in N$. Neka $S_1, S_2, \dots, S_k \in N$ označava broj mandata dodijeljenih svakoj od tih k lista, dok sa $S \in N.$ označimo ukupan broj dodijeljenih mjesta. Uvodimo oznaku za udjel glasova i-te liste dobivenih na izborima, $v_i = \frac{V_i}{V}$, kao i oznaku za udjel dodijeljenih mjesta i-toj listi, $s_i = \frac{S_i}{S}$. Kriterij relativnog odstupanja iskazan u prethodnom odlomku tada bismo zapisali kao $\frac{|v_i - s_i|}{v_i}$, gdje je v_i udio osvojenih glasova, a s_i udio osvojenih mandata. Sada je jasno da je vrijednost tog izraza masimalna, tj. iznosi 1, u slučaju kada je broj dodijeljenih mandata, pa time i njihov udio, s_i jednak nuli.

2. Osnovni pojmovi i svojstva

2.1. Asimptotsko ponašanje

Prva karakteristika koju je potrebno utvrditi pri analiziranju utjecaja broja mandata na reprezentabilnost D'Hondtove metode jest asimptotsko ponašanje metode kada broj mandata koji se dodjeljuju teži u beskonačno, tj. $S \to \infty$. Do zaključka o ponašanju metode dolazimo kroz sljedeće leme:

Lema 2.1.

Neka liste dobivaju redom V_i, $i = 1, ..., k$ glasova na izborima. Tada za i-tu listu i svaki prirodan broj n postoji ukupan broj manadata $S \in N$, takav da i-ta lista dobiva n mandata.

Dokaz:

Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da su liste poredane po broju osvojenih glasova. Neka je i-ta lista ta kojoj želimo dodijeliti n mandata. Tada j-te liste, $j = 1, ..., i-1$ osvajaju više glasova od i-te liste. Za svaki broj osvojenih glasova tih lista, V_j, postoji prirodan broj S_j takav da vrijedi

$$\frac{V_j}{S_j} > \frac{V_i}{n} \geq \frac{V_j}{S_j + 1} \tag{1}$$

Odavde slijedi da svaka od tih lista osvaja S_j mandata prije nego li na red dođe dodjela n-tog mandata i-toj listi.

Liste nakon i-te liste podijelimo u dvije skupine: u prvu skupinu smjestimo liste za koje je $\frac{V_i}{n} \leq V_j$, a u drugu skupinu one za koje je $\frac{V_i}{n} > V_j$. Liste iz druge skupine mogu osvojiti mandat tek nakon što i-toj listi bude dodijeljen n-ti mandat. Za te liste postavimo $S_j = 0$. Za liste iz prve skupine opet postoje prirodni brojevi S_j koji zadovoljavaju nejednakost (1); budući da je $\frac{V_i}{n} \leq V_j$, pripadni S_j je barem jednak 1.

Odavde slijedi da svaka od tih lista osvaja točno S_j mandata, prije nego li se i-toj listi dodijeli n-ti mandat. Za i-tu listu sada postavimo $S_i = n$. Time je dokazano konstrukcijom da ukupan broj mandata

$$S = \sum_{i=1}^{k} S_i$$

zadovoljava tvrdnju leme.

Lema 2.2.

Neka su A, $B \in P$ realni brojevi za koje je $A > B$. Definiramo dva harmonijska niza: $\{a_i = \frac{A}{i}, i \in N\}$, $\{b_i = \frac{B}{i}, i \in N\}$. Za proizvoljan prirodan broj i', s $n_{i'}$ označimo broj elemenata niza $\{a_i\}$ za koje vrijedi $a_i > b_{i'}$, te uvedemo oznaku $p_{i'} = \frac{i'}{n_{i'}}$. Tada $p_{i'} \to \frac{A}{B}$ kada $i' \to \infty$.

Konstrukciju iz ove leme interpretiramo na sljedeći način: broj i' nam predstavlja broj mandata koji su dodijeljeni listi s manje osvojenih glasova, a broj $n_{i'}$ je broj mandata dodijeljenih listi s više glasova, prije nego li se listi s manje glasova dodijeli i'-ti mandat. Tvrdnja leme je da omjer dodijeljenih glasova tim dvijema listama teži omjeru osvojenih glasova kada broj dodijeljenih mandata teži u beskonačno. Dokažimo sad lemu:

Dokaz:

Neka je $i' \in N$ proizvoljan prirodan broj. Tada i'-ti element liste $\{b_i\}$ iznosi $\frac{B}{i'}$. Za broj $\frac{B}{i'}$ i realan broj A tada postoji prirodan broj $n_{i'}$ za koji vrijedi:

$$\frac{A}{n_{i'}} > \frac{B}{i'} \geq \frac{A}{n_{i'} + 1}$$

Odavde slijedi

$$\frac{n_{i'}}{A} < \frac{i'}{B} \leq \frac{n_{i'} + 1}{A}$$

Množenjem nejednadžbe s $\frac{A}{i'}$ dobivamo

$$\frac{n_{i'}}{i'} < \frac{A}{B} \leq \frac{n_{i'}}{i'} + \frac{1}{i'} \tag{2}$$

Sada za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $i' \in N$ takav da je $\frac{1}{i'} < \varepsilon$, pa se prema nejednadžbi (2) vrijednost $\frac{n_{i'}}{i'}$ nalazi u ε-okolini točke $\frac{A}{B}$. Zaključujemo da postoji granična vrijednost izraza $\frac{n_{i'}}{i'}$ te da vrijedi

$$\lim_{i' \to \infty} \frac{n_{i'}}{i'} = \frac{A}{B}$$

što je tvrdnja leme.

Propozicija 2.3. (o asimptotskom ponašanju)

Neka liste redom dobivaju V_i, $i = 1, ..., k$ glasova, gdje je $V = \sum_{i=1}^{k} V_i$ ukupan broj glasova. Neka se D'Hondtovom metodom listama dodijeli S_i, $i = 1, ..., k$ mandata, gdje je $S = \sum_{i=1}^{k} S_i$ ukupan broj mandata. Tada za svaki $i = 1, ..., k$, udio i-te liste u mandatima $s_i = \frac{S_i}{S}$ teži udjelu i-te liste u glasovima $v_i = \frac{V_i}{V}$ kada S teži u beskonačno.

Dokaz:

Prema lemi 2.1 za dovoljno veliki S svaka lista osvaja barem jedan mandat, pa stoga bilo koje dvije liste zadovoljavaju uvjete leme 2.2. Neka su stoga i-ta i j-ta lista osvojile po V_i, odnosno V_j glasova. Po lemi 2.2 vrijedi da je za $S \to \infty$ omjer dodijeljenih mandata $\frac{S_j}{S_i} \to \frac{V_j}{V_i}$. Budući da je trivijalno ispunjeno $\frac{S_i}{S_i} \to \frac{V_i}{V_i}$, vrijedi:

$$\frac{S_1}{S_i} \to \frac{V_1}{V_i}, \frac{S_2}{S_i} \to \frac{V_2}{V_i}, \dots, \frac{S_k}{S_i} \to \frac{V_k}{V_i}$$

Zbrajanjem slijedi:

$$\left(\frac{S_1}{S_i} + \frac{S_2}{S_i} + \dots + \frac{S_k}{S_i}\right) \to \left(\frac{V_1}{V_i} + \frac{V_2}{V_i} + \dots + \frac{V_k}{V_i}\right)$$

Kako je $S = \sum_{i=1}^{k} S_i$, te $V = \sum_{i=1}^{k} V_i$, slijedi

$$\frac{S}{S_i} \to \frac{V}{V_i} \Rightarrow \frac{S_i}{S} \to \frac{V_i}{V} \Rightarrow s_i \to v_i$$

Iz tog rezultata možemo zaključiti da bi maksimalnu (opću) reprezentabilnost postigli provođenjem općih parlamentarnih izbora samo u jednoj izbornoj jedinici u kojoj bi se dijelio maksimalan broj zastupnika: prema današnjem sastavu Sabora, 140. No maksimizacija (opće) reprezentabilnosti nije jedini kriterij kojim se treba rukovoditi prilikom određivanja izbornog sustava. Primjerice, opća izborna lista umanjila bi reprezentabilnost stranaka regionalnog karaktera u nacionalnom parlamentu. Nadalje, jedan kriterij koji se ekstenzivno koristi u parlamentarnim demokracijama s proporcionalnim izbornim sustavom, jest kriterij stabilnosti parlamentarne većine. U kontekstu ovog članka, u kojemu podrazumijevamo upotrebu D'Hondtovog izbornog modela, taj se ktiterij ispunjava kombinacijom dva parametra - *izbornog praga*, tj. udjela u ukupnom broju glasova koji lista mora prikupiti da bi stekla pravo na sudjelovanje u dodjeli mandata; te *izbornim jedinicama* u kojima se bira manji broj zastupnika, što rezultira manjom mjerom reprezentabilnosti, a u korist dviju najjačih lista. U nastavku ćemo proanalizirati dosege i matematičku pozadinu obaju parametara.

2.2. Izborni pragovi

U pojedinim izbornim sustavima u Europi, kao i u Hrvatskoj, D'Hondtova se metoda koristi u kombinaciji s izbornim pragom, koji ćemo označavati s $p_n \in < 0,1 >$ (*indeks „n" odnosi se na oznaku „nominalan" izborni prag; za razliku od „prirodnog" izbornog praga koji uvodimo kasnije*). Izborna lista može sudjelovati u podjeli mandata ukoliko je njezin udio u ukupnom broju glasova veći od p_n, tj. ukoliko za i-tu listu vrijedi $v_i > p_n$. Ako je pak udio liste u ukupnom broju glasova manji od p_n, lista ne sudjeluje u podjeli mandata, čak i ako bi joj na temelju ostvarenog rezultata kroz D'Hondtovu metodu bio dodijeljen jedan ili više mandata.

Prag je, dakle, administrativna mjera, i rezultat je političke odluke, te nije posljedica provođenja same metode. Takav prag ćemo nazivati *nominalnim* izbornim pragom. U Hrvatskoj je nominalni izborni prag izbornim zakonodavstvom propisan na 5%, tj. $p_n = 0.05$.

Osim nominalnog izbornog praga, sama D'Hondtova metoda proizvodi jednu vrstu praga, koji se obično naziva „*skrivenim*" ili „*prirodnim*". U ovom tekstu koristit ćemo se drugom varijantom naziva. Naime, s obzirom na broj mandata koji se dodjeljuju kroz metodu, postoji realan broj $p_p \in \langle 0,1 \rangle$, takav da lista koja osvoji udio u glasovima veći od p_p sigurno osvaja barem jedan mandat. Važno je odmah naglasiti da nominalni i prirodni prag nisu pragovi iste vrste.

Nominalni izborni prag je veličina čiji je prelazak za listu *nužan*, ali ne i dovoljan uvjet za osvajanje mandata. Nužnost je u ovom slučaju administrativno propisana, a da zadovoljavanje uvjeta nije dovoljno potvrđuje primjer liste Hrvatske narodne stranke koja je na parlamentarnim izborima 2007. godine u VIII. izbornoj jedinici osvojila 5.20% glasova, ali ne i jedan od 14 mandata koji se dijele u izbornim jedinicama.

Prijelazak prirodnog izbornog praga, pak, jamči listi da će joj kroz D'Hondtovu metodu biti dodijeljen barem jedan mandat. Kako bi precizirali o kojoj se veličini radi, i kako se ona računa, promotrimo prvo situaciju u kojoj se mandati dodjeljuju D'Hondtovom metodom bez nominalnog izbornog praga. Vrijedi:

Propozicija 2.4.

Neka liste redom dobivaju V_i, $i = 1, \ldots, k$ glasova, neka je $V = \sum_{i=1}^{k} V_i$ ukupan broj glasova, neka je S ukupan broj mandata koji se dodjeljuju, te neka su liste poredane prema broju osvojenih glasova, pri čemu je prva lista osvojila najviše, a posljednja najmanje glasova. Ukoliko i-ta lista osvaja udio glasova veći od $\frac{1}{S+1}$, tj. ukoliko je $v_i = \frac{V_i}{V} > \frac{1}{S+1}$, tada ta lista osvaja barem jedan mandat.

Dokaz:

Pretpostavimo suprotno, tj. da i-ta lista osvaja udio u glasovima $v_i > \frac{1}{S+1}$, ali joj D'Hondtovom metodom nije dodijeljen mandat. Udio $v_i > \frac{1}{S+1}$ povlači osvajanje V_i glasova za koje je $\frac{V_i}{V} > \frac{1}{S+1}$, odnosno $V_i > \frac{V}{S+1}$. Bez smanjenja općenitosti možemo prepostaviti da je i-ta lista prva lista koja ne osvaja mandat (u suprotnom, dokaz provedemo za prvu takvu listu, pa zatim induktivno do i-te liste). Dakle, svim listama koje su osvojile V_j, $j = 1, \ldots, i-1$ glasova dodijeljen je neki broj mandata. Tada za svaki $j = 1, \ldots, i-1$, odnosno V_j i V_i, postoji prirodan broj $S_j \in N$ takav da je

$$S_j \cdot V_i < V_j \leq (S_j+1) \cdot V_i$$

Ta je tvrdnja posljedica činjenice da se racionalan broj $\frac{V_j}{V_i}$ nalazi između nekog prirodnog broja S_j i njegovog sljedbenika. Odavde slijedi kako svaka j-ta lista ima S_j djelitelja takvih da je kvocijent $\frac{V_j}{S_j}$ veći od V_i, tj. da svaka od tih lista dobiva najviše S_j mandata. Kako je i-ta lista prva lista kojoj nije dodijeljen mandat, slijedi:

$$\sum_{j=1}^{i-1} S_j \geq S$$

Nejednadžbu pomnožimo s V_i:

$$V_i \sum_{j=1}^{i-1} S_j \geq V_i \cdot S$$

$$\sum_{j=1}^{i-1} V_i \cdot S_j \geq V_i \cdot S \tag{4}$$

Sada slijedi:

$$V_i \cdot (S+1) = V_i \cdot S + V_i \leq (4) \leq \sum_{j=1}^{i-1} V_i \cdot S_j + V_i < (3) < \sum_{j=1}^{i-1} V_j + V_i \leq V < V_i \cdot (S+1)$$

Posljednja nejednakost slijedi iz pretpostavke propozicije $V_i > \frac{V}{S+1}$. Kako pretpostavka u dokazu vodi na kontradikciju, tako je tvrdnja dokazana.

Time je dokazano da postoji prag čiji prelazak jamči osvajanje mandata, no on nije jedinstven. Prelazak svake vrijednost iz intervala $\left\langle \frac{1}{S+1}, 1 \right\rangle$ također jamči osvajanje mandata. Ono što prag $\frac{1}{S+1}$ čini jedinstvenim jest to da se radi o najmanjoj takvoj vrijednosti. O tome govori sljedeća propozicija.

Propozicija 2.5.

Neka liste redom dobivaju V_i, $i = 1, ..., k$ glasova, neka je $V = \sum_{i=1}^{k} V_i$ ukupan broj glasova, te neka je S ukupan broj mandata koji se dodjeljuju. Neka i-ta lista osvaja udio glasova manji od $\frac{1}{S+1}$, tj. neka je $v_i < \frac{1}{S+1}$. Tada postoji raspodjela preostalih glasova V_i, $i = 1, ..., k$ takva da i-ta lista ne osvaja mandat.

Dokaz:

Neka je $v_i = \frac{V_i}{V} < \frac{1}{S+1}$, tj. $V_i < \frac{V}{S+1}$. Na sljedeći način konstruiramo takvu raspodjelu glasova da i-ta lista ne osvaja mandat: neka prva lista dobiva sve ostale glasove koje nije dobila i-ta lista, dok preostale liste ne dobivaju niti jedan glas, tj. neka je $V_1 = V - V_i$. Tada vrijedi:

$$v_1 = 1 - v_i > 1 - \frac{1}{S+1} = S \cdot \frac{1}{S+1} > S \cdot v_i$$

Odavde slijedi da prva lista ima S djelitelja većih od prvog djelitelja i-te liste, pa stoga prva lista osvaja svih S mandata.

Ovime je dokazano da niti jedan broj manji od $\frac{1}{S+1}$ ne može biti dovoljan uvjet za osvajanje mandata, budući da uvijek postoji raspodjela glasova takva da listi koja prelazi taj prag, ali osvaja udio manji od $\frac{1}{S+1}$, metoda ne dodjeljuje mandat. Stoga je $\frac{1}{S+1}$ najmanji broj s tim svojstvom. Označavamo ga s $p_P = \frac{1}{S+1}$ i zovemo *prirodnim pragom*.

Primijetimo da su s ove dvije propozicije analizirana dva slučaja: onaj u kojemu je udio osvojenih glasova veći od prirodnog praga ($v_i > p_P$), i onaj u kojemu je manji ($v_i < p_P$). Ostaje otvoreno pitanje što se događa u situaciji kada lista osvaja udio glasova koji je jednak prirodnom pragu ($v_i = p_P$). Najjednostavniji takav primjer je situacija u kojoj se u izbornoj jedinici dodjeljuje jedan mandat, te se u jedinici natječu samo dvije liste koje osvajaju jednak broj glasova - svaka točno polovinu. U toj situaciji ne postoji matematički kriterij po kojemu bi se raspodijelili mandati, već je rješenje administrativne prirode, i uglavnom se rješava ponavljanjem izbora.

No, prirodni izborni prag nije nužan uvjet za osvajanje mandata. O tome govori sljedeća propozicija.

Propozicija 2.6.

Postoji razdioba glasova među listama V_i, $i = 1, ..., k$, $V = \sum_{i=1}^{k} V_i$, te broj mandata S koji se dodjeljuju tim listama, tako da za bar jednu od tih lista vrijedi $v_i < p_P$, a da je toj listi dodijeljen bar jedan mandat.

Dokaz:

Egzistenciju dokazujemo primjerom. Neka u razdiobi 5 mandata sudjeluje 5 lista koje su osvojile sljedeći broj glasova: 11, 11, 11, 11, 6. Ukupni broj glasova tada je V = 50, a peta lista osvaja udio glasova $v_i = \frac{6}{50} = 0.12 < p_p = 0.167$, tj. dobiva manje od prirodnog praga. Prvi kvocijenti (dijeljenje s 1) osvojenih glasova su tada 11, 11, 11, 11, 6, a drugi (dijeljenje s 2) su 5.5, 5.5, 5.5, 5.5, 3. Tada D'Hondtova metoda prvih pet mandata dodjeljuje prvoj, drugoj, trećoj i četvrtoj listi, a peti se mandat dodjeljuje petoj listi, budući da je njezin prvi kvocijent (6) veći od svih drugih kvocijenata. Ovako konstruirana raspodjela zadovoljava uvjete propozicije, te time dokazuje tvrdnju.

Na ovom mjestu dobro je primijetiti da bi, zbog kriterija predvidljivosti i povjerenja u instituciju izbora, za izborni sustav bilo dobro kada bi zadovoljavanje nužnog uvjeta za dodjelu mandata povlačilo i zadovoljavanje dovoljnog uvjeta. To zapravo znači da je prirodni izborni prag D'Hondtove metode manji od nominalnog izbornog praga. Kako je nominalni izborni prag u Hrvatskoj 5%, to povlači da bi se u izbornim jedinicama trebalo dijeliti S = 19 mandata, kako bi prirodni izborni prag, tj. dovoljan uvjet za osvajanje mandata, bio manji ili jednak 5%.

3. Interakcija s nominalnim izbornim pragom

3.1. Nominalni izborni prag i asimptotsko ponašanje

Svi zaključci u prethodnom poglavlju izvedeni su iz pretpostavke da se mandati dijele primjenom D'Hondtove metode bez upotrebe nominalnog izbornog praga. U ovom ćemo poglavlju proučiti što se događa u situaciji kada je propisan i nominalni izborni prag, tj. koji je utjecaj nominalnog praga na rezultate provođenja metode.

Po svojoj karakteristici, nominalni izborni prag je propisan zakonom, te se primjenjuje neovisno o provođenju same metode raspodjele mandata, i to na način da se apriori, prije same provedbe metode, administrativno propiše koje liste uopće ulaze u proces podjele mandata. To znači da se listama koje nisu prešle nominalni prag automatski dodjeljuje broj mandata $S_i = 0$. Bez smanjenja općenitosti opet ćemo pretpostaviti da su liste poredane po broju osvojenih glasova, od najvećeg k najmanjem, te da osvajaju V_i, $i = 1, ..., k$ glasova. S $n \in \{0, ..., k\}$ označit ćemo posljednju listu koja je osvojila udio u glasovima veći od nominalnog izbornog praga, tj. za koju je $v_n > p_n$, te da vrijedi $i \le n$ za svaku listu za koju je $v_i > p_n$. Vrijedi sljedeća propozicija o asimptotskom ponašanju.

Propozicija 3.1.

Neka liste redom dobivaju V_i, $i = 1, ..., k$ glasova, gdje je $V = \sum_{i=1}^{k} V_i$ ukupan broj glasova. Neka se D'Hondtovom metodom listama dodijeli S_i, $i = 1, \ldots, k$ mandata, gdje je $S = \sum_{i=1}^{k} S_i$ ukupan broj mandata. Neka je s $p_n \in \langle 0,1 \rangle$ označen nominalan izborni prag, a s $n \in \{0, \ldots, k\}$ broj lista koje su prešle prag. S $\overline{V_n}$ označimo sumu glasova lista koje su prešle nominalan izborni prag, tj. $\overline{V_n} = \sum_{i=1}^{n} V_i$. Tada za svaki $i = 1, \ldots, n$, ukoliko takav i postoji, udio i-te liste u mandatima $s_i = \frac{S_i}{S}$ teži udjelu i-te liste u glasovima $v_i' = \frac{V_i}{\overline{V_n}}$ kada S teži u beskonačno.

Dokaz:

Nominalni izborni prag na administrativnoj razini ne dopušta ulazak lista koje osvoje udjele glasova manje od p_n u proceduru podjele mandata. Uz pretpostavku da postoji barem jedna lista koja je osvojila udio glasova veći od p_n, tj. uz pretpostavku da je $n \geq 1$, slijedi $\overline{V_n} \neq 0$, a tih n lista ulaze u proceduru podjele mandata bez daljnjih ograničenja. Time su zadovoljene pretpostavke propozicije 2.3, pa odatle slijedi tvrdnja.

Dakle, i u slučaju korištenja nominalnog praga, D'Hondtova metoda zadržava asimptotsko ponašanje koje teži udjelima lista u glasovima, no ovaj put udjelima u ukupnom broju glasova lista koje su prešle prag. Pri tome metoda asimptotski jednako „nagrađuje" male i velike stranke, tj. liste s malim i velikim udjelom glasova; udjeli svih lista u ukupnom broju glasova lista koje su prešle prag dobivaju se množenjem ukupnog udjela liste s brojem $\frac{V}{\overline{V_n}}$, dakle brojem koji ne ovisi o broju glasova koji je osvojila neka lista.

3.2. Utjecaj nominalnog izbornog praga na prirodni izborni prag

Kako je postupak dodjeljivanja mandata administrativno određen na način da se prvo mora zadovoljiti kriterij prelaska nominalnog izbornog praga, tako se time mijenja i prirodni izborni prag metode. Naime, u podjeli mandata sudjeluje samo dio stranaka, stoga vrijedi i sljedeća propozicija o prirodnom izbornom pragu.

Propozicija 3.2.

Neka liste redom dobivaju V_i, $i = 1, \ldots, k$ glasova, gdje je $V = \sum_{i=1}^{k} V_i$ ukupan broj glasova. Neka se D'Hondtovom metodom listama dodijeli S_i, $i = 1, \ldots, k$ mandata, gdje je $S = \sum_{i=1}^{k} S_i$ ukupan broj mandata. Neka je s $p_n \in \langle 0,1 \rangle$ označen nominalan izborni prag, a s $n \in \{0, \ldots, k\}$ broj lista koje su prešle nominalan prag. S $\overline{V_n}$ označimo sumu glasova lista koje su prešle nominalan izborni prag, tj. $\overline{V_n} = \sum_{i=1}^{n} V_i$. Tada je dovoljan uvjet za osvajanje mandata za liste koje su prešle nominalni izborni prag osvajanje udjela od ukupnog broja birača $v_i = \frac{V_i}{V}$ takav da je

$$v_i > p_{p,n} = \frac{1}{S+1} \cdot \frac{\overline{V_n}}{V}$$

Dokaz:

Dokaz provodimo slično kao i u prethodnoj propoziciji; cilj nam je definirati skup lista među kojima se dijele mandati bez dodatnih ograničenja, te onda na tom skupu primijeniti propoziciju 2.4. Jasno je da za te liste više ne postoje dodatna ograničenja, pa je prema propoziciji 2.4. udio u ukupnom broju glasova, koje postižu liste kojima D'Hondtova metoda dodjeljuje bar jedan mandat, veći od $\frac{1}{S+1}$, tj.

$$\frac{V_i}{\overline{V_n}} > \frac{1}{S+1}$$

Kako bismo zadovoljavanje tog kriterija prikazali pomoću već korištenih oznaka, tj. pomoću udjela dobivenih glasova u odnosu na ukupan broj glasova v_i, nejednadžbu množimo s $\frac{V_n}{V}$, odakle slijedi tvrdnja:

$$v_i = \frac{V_i}{V} > \frac{1}{S+1} \cdot \frac{\overline{V_n}}{V} = p_{p,n}$$

Prirodni prag smo u ovom slučaju označili i indeksom n, budući da on implicitno ovisi o visini nominalnog praga. Točnije, neposredno ovisi o zbroju glasova lista koje su prešle nominalni izborni prag, te time posredno i o visini samog nominalnog praga.

Prirodno se postavlja pitanje određivanja granica unutar kojih se kreće prirodni prag $p_{p,n}$ u odnosu na nominalni p_n, no u općenitom slučaju ne možemo dati takvu ocjenu. Naime, lako se pokazuje da postoje ekstremni slučajevi u kojima je $\overline{V_n} = 0$, tj. ne postoje liste koje prelaze propisani nominalni prag, kao i slučajevi u kojima je $\overline{V_n} = V$, tj. u kojima sve liste prelaze nominalni prag. Stoga i vrijednost prirodnog praga $p_{p,n}$ može biti bilo koji broj iz intervala $\left[0, \frac{1}{S+1}\right]$.

No, kako nas u ovom slučaju primarno zanimaju razdiobe glasova ostvarive u izbornom procesu u Hrvatskoj, tako ipak postoji način ocjenjivanja vrijednosti prirodnog izbornog praga. Ukoliko toj ocjeni pridružimo poželjni rezultat o prirodnom pragu nižem od nominalnog (kako bi nužan uvjet za dodjelu mandata postao i dovoljan), dolazimo do rezultata kojim se određuju poželjne granice broja mandata koji se dijele u jednoj izbornoj jedinici. Jedino što nam je potrebno za kvalitetnu ocjenu tog parametra jest ocjena vrijednosti $\overline{V_n}$, ili točnije, omjera $\frac{\overline{V_n}}{V}$ zbroja broja glasova lista koje su prešle nominalni izborni prag i ukupnog broja glasova. U tu svrhu ocjenu mogu pružiti rezultati dosadašnjih parlamentarnih izbora održanih 2000., 2003. i 2007. godine, koje donosimo tablicama 2, 3 i 4.

2000.	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X
v_n	84.11	84.16	81.59	84.80	82.82	86.73	87.20	86.76	83.23	78.22
$p_{p,n}$(S=14)	5.61	5.61	5.44	5.65	5.52	5.78	5.81	5.78	5.55	5.21
$p_{p,n}$(S=16)	4.95	4.95	4.80	4.99	4.87	5.10	5.13	5.10	4.90	4.60
$p_{p,n}$(S=17)	4.67	4.68	4.53	4.71	4.60	4.82	4.84	4.82	4.62	4.35
$p_{p,n}$(S=19)	4.21	4.21	4.08	4.24	4.14	4.34	4.36	4.34	4.16	3.91

Tablica 2: Prirodni pragovi ostvareni na izborima 2000.

2003.	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X
v_n	73.48	79.70	89.14	83.78	76.79	81.61	79.20	75.86	80.80	80.48
$p_{p,n}$(S=14)	4.90	5.31	5.94	5.59	5.12	5.44	5.28	5.06	5.39	5.37
$p_{p,n}$(S=16)	4.32	4.69	5.24	4.93	4.52	4.80	4.66	4.46	4.75	4.73
$p_{p,n}$(S=17)	4.08	4.43	4.95	4.65	4.27	4.53	4.40	4.21	4.49	4.47
$p_{p,n}$(S=19)	3.67	3.98	4.46	4.19	3.84	4.08	3.96	3.79	4.04	4.02

Tablica 3: Prirodni pragovi ostvareni na izborima 2003.

2007.	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X
v_n	79.53	81.69	89.93	77.50	86.19	84.01	84.05	89.39	74.75	78.55
$p_{p,n}$(S=14)	5.30	5.45	6.00	5.17	5.75	5.60	5.60	5.96	4.98	5.24
$p_{p,n}$(S=16)	4.68	4.81	5.29	4.56	5.07	4.94	4.94	5.26	4.40	4.62
$p_{p,n}$(S=17)	4.42	4.54	5.00	4.31	4.79	4.67	4.67	4.97	4.15	4.36
$p_{p,n}$(S=19)	3.98	4.08	4.50	3.87	4.31	4.20	4.20	4.47	3.74	3.93

Tablica 4: Prirodni pragovi ostvareni na izborima 2007.

U svakoj od tablica možemo očitati sljedeće podatke: postotni udio broja glasova lista koje su prešle prag (oznaka $\overline{v_n}$ stoji kao pokrata za $\frac{\overline{V_n}}{V}\cdot 100$), te potom postotni zapis prirodnih pragova $p_{p,n}$ opisanih u propoziciji 3.2, koje smo izračunali za različite brojeve mandata (S) koji se dodjeljuju u izbornoj jedinici. Svi su podaci računani s obzirom na nominalni izborni prag od 5%. Proanalizirajmo te podatke.

Na početku nalazimo podatak o prirodnom pragu (iskazanom u postocima) u jedinicama u kojima se dodjeljuje 14 mandata, što je broj mandata propisan hrvatskim izbornim zakonodavstvom u izborima za Sabor. Vidimo da se taj prodni prag kreće oko 5.5%, a ponekad raste i do 6%. Takva udaljenost između nominalnog i prirodnog praga mora rezultirati situacijama u kojima liste prijeđu nominalni izborni prag, ali ipak ostanu bez mandata, kao što smo i svjedočili na izborima.

Nakon toga je u tablici istaknuta situacija u kojoj se u izbornoj jedinici dijeli 16 mandata. Taj broj mandata, na osnovi raspoloživih podataka, daje prosječan prirodan prag manji od 5%, no i dalje među podacima imamo izbornih jedinica u kojima je prirodni izborni prag viši od nominalnog. Povećanjem broja mandata na 17, svi prirodni pragovi u do sada ostvarenim izbornim rezultatima postaju manji od nominalnog izbornog praga.

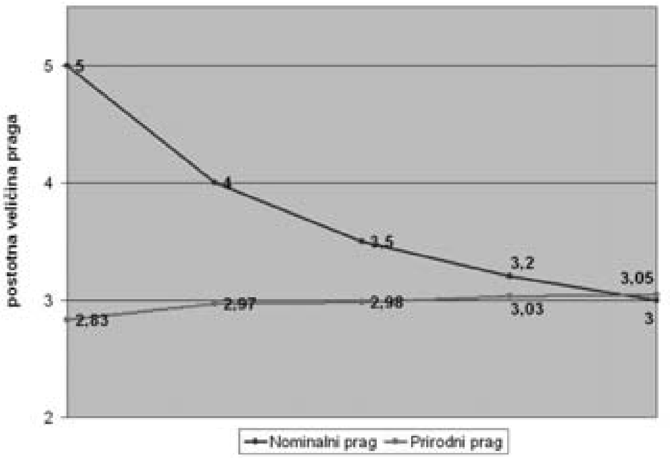
Na kraju su još navedene vrijednosti ostvarenog priprodnog praga u situaciji u kojoj bi se dijelilo 19 mandata. Taj podatak navodimo zbog usporedbe ostvarenih razina prirodnog praga u situaciji u kojoj se primjenjuje nominalni izborni prag od 5%, s prirodnim pragom od 5% koji bi bio ostvaren ukoliko bi se u jedinicama dijelilo 19 mandata bez upotrebe nominalnog prirodnog praga (propozicija 2.4). Iako smo već dokazali u propoziciji 3.2 da se ta dva praga (prirodni pragovi, ostvareni sa i bez upotrebe nominalnog praga) razlikuju za faktor $\frac{V_i}{V}$, ova tablica zorno pokazuje koli-ka je ta razlika u ostvarenim izbornim rezultatima.

Iz ove analize možemo zaključiti kako bi uz zadržavanje nominalnog izbornog praga na 5% u izbornim jednicama bila optimalna podjela 17 mandata kako bi se osiguralo da prirodni izborni prag bude niži od nominalnog, te da time nužan uvjet za dodjelu mandata postane i dovoljan. Kako broj mandata koji se dodjeljuju u jednoj izbornoj jedinici nije jedini faktor koji treba uzeti u obzir u sastavljanju izbornog sustava, ostaje otvoreno pitanje što se događa ukoliko se promijeni i drugi parametar - nominalni izborni prag.

3.2. Optimalni nominalni izborni prag

U ovom dijelu teksta potražit ćemo odgovor na obrnuto pitanje; umjesto da, kao do sada, tražimo optimalan broj mandata kojima bi se prirodni izborni prag $p_{p,n}$ spustio ispod zadanog nominalnog izbornog praga p_n, potražit ćemo odgovor na pitanje koji bi bio optimalan izbor nominalnog izbornog praga kojim bi se, uz zadani broj mandata, prirodni izborni prag zadržao ispod granice nominalnog.

U računu ćemo se opet koristiti rezultatima propozicije 3.2, kao i rezultatima postignutim na dosadašnjim parlamentarnim izborima, uz jednu ogradu. Naime,



Slika 1. Odnos nominalnog i prirodnog praga

promjena broja mandata koji se dijele u izbornim jedinicama povlači i promjenu veličine i broja izbornih jedinica, ako ništa drugo, onda zbog ustavne odredbe koja propisuje da broj zastupničkih mjesta u Saboru ne smije biti veći od 160.

Utoliko rezultati postignuti u sadašnjih deset izbornih jednica ne predstavljaju stvarne podatke iz tih fiktivnih izbornih jedinica, ali su ujedno, od raspoloživih podataka, i najbliži pojmu stvarnog izbornog rezultata.

Ovako postavljeno pitanje - određivanje nominalnog praga koji će, uz zadani broj mandata, osigurati da vrijednost prirodnog praga bude manja od nominalnog - ostavlja velik broj otvorenih parametara. Najveći značaj ima, dakako, odabir broja mandata koji se dijele u izbornoj jedinici. Za potrebe ovog teksta promotrit ćemo situaciju u kojoj se dijeli 28 mandata. Dva su razloga za tu odluku. Prvo, u javnosti se već neko vrijeme analizira izborni sustav u kojemu bi se prepolovio broj izbornih jedinica i udvostručio broj mandata zastupnika biranih u njima. Takva modifikacija zadržava ukupan broj zastupnika jednakim, u čiju korist idu drugi nematematički argumenti (poput zadržavanja jednakog omjera broja zastupnika biranih na općim listama i broja zastupnika manjina i građana bez stalnog prebivališta u Hrvatskoj, čiji je broj određen Ustavom, odnosno ustavnim zakonom). Opća analiza može se kvalitetno provesti upotrebom simulacije, no to je pak materijal za jedan drugi članak.

Prije samih rezultata analize temeljene na izbornim rezultatima u svih deset jedinica u tri izborna ciklusa, navodimo jednostavan rezultat koji olakšava razumijevanje ponašanja promatranih veličina.

Propozicija 3.3.

Neka je S broj mandata koji se dodjeljuju u izbornoj jedinici, te neka je p_n propisani nominalni izborni prag. Tada pripadni prirodni prag $p_{p,n}$ raste i $p_{p,n} \to p_p$ kada p_n pada i $p_n \to 0$.

Dokaz:

Dokaz tvrdnje neposredno slijedi iz definicije prirodnog praga $p_{p,n} = \frac{1}{S+1} \cdot \frac{\overline{V_n}}{V}$, gdje je $\overline{V_n}$ suma broja glasova lista koje su prešle nominalni prag. Kako se nominalni prag smanjuje, tako se povećava broj lista koje prelaze prag, pa time i suma $\overline{V_n}$. Budući da je S konstantan, posljedično raste i $p_{p,n}$. Konačno, kada se p_n smanji na nulu, $\overline{V_n}$ postaje jednak V, pa je $p_{p,n} = \frac{1}{S+1} \cdot \frac{\overline{V_n}}{V} = \frac{1}{S+1} = p_p$.

Promotrimo sada kako se kreće prosječna vrijednost $p_{p,n}$ izračunata na temelju rezultata tri izborna ciklusa u 10 izbornih jedinica. Iz grafa sa slike 1. vidimo da padom nominalnog praga pripadni prirodni prag raste sve dok u jednom trenutku ne preskoči vrijednost nominalnog. Optimalan izbor predstavlja izbor nominalnog praga za koji je pripadni prirodni prag niži, ali i što bliži propisanom nominalnom. Ovi nas rezultati navode na zaključak da je optimalan izbor nominalnog praga u blizini 3%. Za detaljniju analizu trebalo bi provesti analizu na temelju ciljane simulacije, budući da dosadašnji izborni rezultati ne daju dovoljno podataka za konstrukciju finije ocjene.

4. Zaključak

Ovim tekstom opisane su temeljne veličine koji opisuju svojstva D'Hondtove metode raspodjele mandata u izbornim sustavima s propisanim nominalnim izbornim pragom, s posebnim osvrtom na parametre koji se koriste u Hrvatskoj. Analizirana je reprezentabilnost metode u dva krajnja slučaja. U prvom slučaju, pri podjeli velikog broja mandata, rezultatom o asimptotskom ponašanju metode utvrdili smo da raspodjela udjela manadata teži raspodjeli udjela glasova, odnosno, u slučaju primjene nominalnog izbornog praga, raspodjeli udjela glasova među listama koje su prešle nominalan izborni prag. Drugi fokus analize bila je situacija raspodjele malog broja mandata. Kao osnovni cilj analize, u smislu reprezentabilnosti metode, postavljen je zahtjev da listi s najmanjim brojem glasova, a koja je prešla propisani nominalni izborni prag, metoda dodijeli mandat. Taj je zahtjev doveo do definiranja prirodnog izbornog praga induciranog nominalnim, rezultata o nužnosti nominalnog i dovoljnosti prirodnog izbornog praga, te zaključno do prirodnog zahtjeva da prirodni prag $p_{p,n}$ bude manji od nominalnog p_n - kako bi nužan uvjet za dobivanje mandata postao i dovoljan.

U svjetlu tog rezultata, poseban je osvrt dan na parametre koji se koriste u hrvatskom izbornom sustavu. Temelj za ocjenu optimalnih veličina bili su rezultati postignuti na parlamentarnim izborima u Hrvatskoj 2000., 2003. i 2007. godine. Prvo smo analizirali odnos nominalnog i prirodnog praga u situaciji u kojoj je nominalan izborni prag fiksan i propisan na 5%. Ta je analiza rezultirala ocjenom da je optimalan broj zastupnika biranih u jednoj izbornoj jedinici sedamnaest. Potom smo analizirali odnos nominalnog i prirodnog praga u kojem je broj zastupnika povećan i fiksiran na 28. Tom smo analizom došli do zaključka o optimalnom izboru nominalnog praga na razini od 3%.

U tekstu smo kao osnovu za zaključivanje o relevantnim vrijednostima (primjerice, zbroju glasova lista koje su prešle nominalan izborni prag) koristili službene podatke o rezultatima parlamentarnih izbora održanih 2000., 2003. i 2007. godine, objavljenih na www.izbori.hr. Rezultati bi se mogli dodatno profiniti i detaljnije proanalizirati kroz korištenje ciljane simulacije izbornog procesa. Smatramo da je ovim člankom dana dobra podloga za definiranje ciljeva i metoda jedne takve simulacije i analize.