De Calculo Probabilitatis Uradak pogrešan – rješenje ispravno (Iz metodike elementarnog računa vjerojatnosti)

Kajetan Šeper[1]

1. Izvorni zadatak

Slučajan pokus sastoji se od bacanja na stol dviju kocaka za igru. Kolika je vjerojatnost da se pokažu a) dvije šestice, b) petica i šestica, c1) dva broja čiji je zbroj 9 i c2) čiji je zbroj 8?

2. Ishodi

Pri rješavanju vjerojatnosnih zadataka u prvom redu treba shvatiti što se u zadatku smatra *ishodom* slučajnog pokusa, ili što će rješavatelj smatrati ishodom ako to ne proizlazi iz samog zadatka, ili pak ako rješavatelj želi i može smatrati drugačije.

U prvom su slučaju ishodi objektivno upućeni rješavatelju, a inače se subjektivno određuju i taj podatak mora biti uključen u zadatak. Zapravo, obično se šutke pretpostavljaju određeni prethodni dogovori o ishodima vezani za neke skupine zadataka. U deskriptivnoj statistici, kada se ispituje učestalost ishoda pri ponavljanju slučajnog pokusa (uz stalne uvjete), nije važan samo stvarni ishod, nego s njim povezan prethodno dogovoren ishod koji će se opažati pri ponavljanju i čija će se višekratnost brojiti.

Skup svih ishoda slučajnog pokusa naziva se *prostor ishoda*.

Razmotrimo sada ishode u izvornom zadatku, a zatim u njegovoj izmjeni.

3. Ishodi u izvornom zadatku

U izvornom zadatku se govori o dvije međusobno *nerazlučive* kocke kakve se stvarno nalaze u paketima dječjih igara u trgovinama. Zato zadatak upućuje rješavatelja da ishode smatra i predoči *neuređenim parovima* $\{x,y\}=\{y,x\}$ brojeva $x, y = 1, 2, 3, 4, 5, 6,$ uz uvjet $x \neq y$, i *nepravim parovima* $\{x,x\}=\{x\}$. Ovi se ishodi mogu predočiti jedinstveno *uređenim parovima* (x,y), uz uvjet $x \leq y$. Vidi sl. 1.

---

[1]Kajetan Šeper, Slavonski Brod

sl. 1. Predočenje ishoda uređenim parovima (x,y), uz uvjet $x \le y$, tj. $x < y$ (iznad dijagonale) ili $x = y$ (na dijagonali)

6	1,6	2,6	3,6	4,6	5,6	6,6
5	1,5	2,5	3,5	4,5	5,5	
4	1,4	2,4	3,4	4,4		
3	1,3	2,3	3,3			
2	1,2	2,2				
1	1,1					
y / x	1	2	3	4	5	6

Za razumijevanje i rješavanje tog i sličnih zadataka prevažno je da rješavatelj *ne smije* smatrati ni predočiti ishode uređenim parovima (x, y) bez navedenog uvjeta, zato što su kocke, iako različite, (prema pretpostavci) po svim svojstvima *jednake*, osim što padnu na *različita nepredvidljiva mjesta* na stolu, bez podatka koja je na kojem mjestu, a uz to u sljedećem će bacanju ta mjesta biti drugačija.

Zapravo, te su kocke ipak samo *približno jednake*, a male razlike, koje pojavno ne mijenjaju znatno vjerojatnosnu ili učestalosnu sliku slučajnog pokusa, ne uzimaju se u obzir. Često se kaže da su takve *različite,* ali nama *nerazlučive* kocke *iste*, jer se male razlike i njihovi različiti položaji u prostoru ne uzimaju u obzir.

Suprotno tome, zanimljivo je da su dvije *različito zvane* zvijezde, večernjica i zornica, *jedna ista* zvijezda, koju su u prošlosti smatrali *različitim* zvijezdama, zbog toga što ih opažamo na nebeskom svodu u *različitim vremenima*.

4. Ishodi u izmijenjenom zadatku

1,6	2,6	3,6	4,6	5,6	6,6
1,5	2,5	3,5	4,5	5,5	6,5
1,4	2,4	3,4	4,4	5,4	6,4
1,3	2,3	3,3	4,3	5,3	6,3
1,2	2,2	3,2	4,2	5,2	6,2
1,1	2,1	3,1	4,1	5,1	6,1

Razmotrimo sada izvornik s dodatnim podatkom o tome da je jedna kocka bijela (s crnim točkicama – brojevi na svakoj strani), a druga crna (s bijelim točkicama – brojevi na svakoj strani), tj. da su kocke međusobno *razlučive*. Ovako izrečena inačica izvornika upućuje rješavatelja da ishode smatra i predoči uređenim parovima (x, y), bez spomenutog uvjeta, pri čemu x zamjenjuje brojeve na bijeloj, a y na crnoj kocki. Vidi sl. 2.

sl. 2. Predočenje ishoda uređenim parovima (x, y)

Primjedba uz sl.1. i 2.:

$$\{x, y\}, x \neq y \underset{\text{Sl.1.}}{\leftrightarrow} (x, y), x < y \underset{\text{Sl.2.}}{\leftrightarrow} \{(x, y), (y, x)\}, x \neq y$$

Ali sada, a to je za razumijevanje i rješavanje vrlo važno, rješavatelj *može*, ako želi, smatrati ishode neuređenim i nepravim parovima.

U jednom i drugom slučaju pretpostavlja se da su kocke „idealne" („savršeno izrađene"), a bacanje „fer" („pošteno"), tj. da svaka strana svake kocke ima jednaku „šansu" da se pri bacanju pokaže. Drugim riječima, nijedan pokazani broj (u obliku točkica) nijedne kocke nema nikakvu vjerojatnosnu ili učestalosnu prednost pred bilo kojim drugim nepokazanim brojem iste ili druge kocke. Zato se može smatrati i smatra se da su *svi ishodi svake kocke jednako vjerojatni* i *jednako učestalni* i da pri bacanju *obiju kocaka zajedno* (smatrajući da vjerojatnosno-učestalosno ponašanje ni jedne kocke ne utječe na drugu) *svi ishodi* u prvom slučaju, tj. *u izvorniku, nisu* jednako vjerojatni ni jednako učestalosni, a da u drugom slučaju, tj. *u inačici, jesu*.

Inačica se može oponašati **dvokratnim** bacanjem **jedne jedine** kocke. (Ovdje se mora smatrati da prva kocka stohastički ne utječe na drugo bacanje.)

5. Događaji

U drugom redu treba shvatiti o kojem je događaju u zadatku riječ i za koji se pita kolika mu je vjerojatnost. Kada je ustanovljeno što su ishodi u slučajnom pokusu, tada je *događaj,* u *elementarnoj teoriji* (po Kolmogorovu) s *konačnim* prostorom ishoda, a također u *diskretnoj teoriji* s *prebrojivim* prostorom ishoda, *svaki* podskup prostora ishoda. (U *općoj teoriji* s *neprebrojivim* prostorom ishoda, koja uključuje i spomenute posebne slučajeve, zbog jakih razloga, samo su *neki* podskupovi neprebrojivog prostora ishoda događaji.)

Iako se u vjerojatnosnim zadacima pita kolika je vjerojatnost samo jednog ili nekoliko događaja, teorijski okvir obuhvaća sve događaje o kojima se može govoriti i za koje treba izračunati ili odrediti vjerojatnost.

Skup svih događaja se naziva *prostor događaja*. (U općoj teoriji važno je pametno izdvojiti podskupove prostora ishoda i samo s njima oblikovati prostor događaja.)

6. Vjerojatnost ishoda i događaja

U trećem i posljednjem redu treba odlučiti o kojoj se vjerojatnosti u zadatku radi. Naime, postoje dva pristupa *slučajnim* (*stohastičkim, aleatoričkim*) *pojavama*.

Jedan pristup je *statistički* (*eksperimentalni, iskustveni, empirijski, učestalosni, frekvencijski, aposteriorni*) u kojem se mjera *statističke vjerojatnosti* događaja A u slučajnom pokusu, $f(A)$, određuje *mjerom učestalosti* (*relativnom učestalosti, relativnom frekvencijom, čestinom*), i to nakon konačno mnogo, N, ponavljanja pokusa (pod istim stohastičkim uvjetima), prebrojavanjem broja pokazanih ishoda, ω, koji ostvaruju promatrani događaj A, $N(A)$, nazivajući taj broj *višekratnost* (*multiplicitet*), a zatim dijeljenjem $N(A)$ s $N: f(A) = \dfrac{N(A)}{N}$. Taj je račun moguć tek nakon obavljanja pokusa.

Pri tome se opaža *statistička zakonitost* sve manjeg kolebanja tih čestina što je broj ponavljanja veći.

Drugi pristup je *teorijski* (*matematički, apriorni*) u kojem se mjera *teorijske vjerojatnosti*, ***P****(A),* određuje teorijski pretpostavljenom *mjerom vjerojatnosti* (*vjerojatnošću, vjerojatnoćom*) obuhvaćajući *unaprijed* (*a priori*) vjerojatnosti svih događaja u prostoru događaja razmatranog zadatka.

U tom teorijskom okviru mjera vjerojatnosti mora biti barem približno u skladu sa statističkom mjerom, inače bi rješenje zadatka bilo potpuno beskorisno, a možda bi kao dobar model mogla poslužiti rješavanju drugog zadatka.

U teorijskom pristupu cilj je svakom događaju iz prostora događaja pridružiti vjerojatnosnu mjeru tako da to pridruženje bude u skladu s intuitivnim pojmom vjerojatnosti poduprto statističkim iskustvom ili čak odraženo urođenim nasljeđem, a to se matematički postiže odabirom nevelikog broja uvjeta koje vjerojatnosna mjera treba zadovoljavati, pri čemu se ostali uvjeti izvode iz tako odabranih.

Teorijski razlozi zahtijevaju da odabranih osnovnih uvjeta bude što manje, ali metodički to nije prihvatljivo, barem ne u uvodnoj nastavi računa vjerojatnosti.

Primjerice, osnovni uvjet propisuje da se nemogućem događaju pridruži vjerojatnost 0, sigurnom događaju vjerojatnost 1, a svim ostalim događajima realna vjerojatnost između 0 i 1; da se udruzi dvaju međusobno isključivih događaja pridružuje zbroj vjerojatnosti jednog i drugog događaja; da se dvama događajima, od kojih je jedan sadržan u drugom, pridruže vjerojatnosti, tako da vjerojatnost prvog bude manja ili jednaka vjerojatnosti drugog; itd.

U elementarnom i diskretnom slučaju to se može postići već tako da se svakom ishodu iz prostora ishoda pridruži realna vjerojatnost između 0 i 1 i da bude zadovoljen jedan jedini uvjet da je u elementarnom slučaju konačan zbroj, a u diskretnom slučaju beskonačan zbroj svih tih vjerojatnosti jednak 1.

Tada je vjerojatnost svakog događaja iz prostora događaja zbroj vjerojatnosti svih ishoda „sadržanih u događaju", tj. ishoda koji ostvaruju događaj.

U elementarnom slučaju, dakle, dovoljna je aritmetika, a u diskretnom slučaju potrebna je već niža analiza (dok je u općem slučaju potrebna viša analiza, integrali).

Prostor ishoda zajedno s vjerojatnostima pridruženim svakom ishodu, tj. s *vjerojatnosnom funkcijom*, koja svakom ishodu pridružuje vjerojatnost, naziva se *vjerojatnosni prostor*.

Zbog rečenog osnovni je problem vezan za svaki zadatak elementarne i diskretne teorije vjerojatnosti određivanje *početnih vjerojatnosti*. Matematički gledano, početne vjerojatnosti su matematička pretpostavka koja se matematički obrađuje. *Praktičari upućuju matematičarima stohastičarima podatke o svom istraživanju i potrebi da se oni matematički obrade s ciljem da se ponudi dobar teorijski model koji bi zadovoljio praktičare.*

Povijesno je bio prvi važan korak u razvitku računa (i kasnije u 1. pol. 20. st.) teorije vjerojatnosti kada se Laplace počeo služiti svojom formulom za izračun vjerojatnosti u zadacima tzv. *klasične teorije*, pretpostavljajući ne samo da je prostor ishoda konačan, kao u elementarnoj teoriji, nego i da su *svi ishodi* prostora ishoda *jednako vjerojatni*. U tom klasičnom slučaju, ako prostor ishoda ima sveukupno *n* „*mogućih*" ishoda, tada se, u skladu s rečenim, svakom ishodu pridružuje vjerojatnost $\frac{1}{n}$, a događaj koji se ostvaruje s bilo kojim od *m* „*povoljnih*" ishoda ima, dakle, vjerojatnost $\frac{m}{n}$.

PRIMJEDBA. Neki autori tvrde da je *klasična (Laplaceova) formula* (a nazivaju je „*definicijom*") *nematematička*, jer se osniva na pretpostavci *jednake vjerojatnosti svih ishoda*, a za to je, kažu, potrebno znati *vjerojatnosti svih ishoda*.

Takvo je shvaćanje savršeno pogrešno, ali se unatoč tome ponavlja u mnogim publikacijama o vjerojatnosti, iako je već mnogo puta obznanjeno da je pojam jednake vjerojatnosti ishoda valjan matematički pojam koji je, doduše, slabiji od pojma vjerojatnosti i koji mu može prethoditi.

Svaki stolar zna što znači da su dvije letve jednake, a geometričari znaju što znači da su dvije dužine jednake, i za to im *ne treba* mjerilo i izmjerena duljina obiju letava odnosno dužina. Zar ne?

7. Uradci i zadatci za vježbu

7.1. Uradak izmijenjenog zadatka

Prostor ishoda bez ikakve se sumnje sastoji od 36 jednako vjerojatnih ishoda koji se mogu označiti uređenim parovima (x, y) s $x, y = 1, 2, 3, 4, 5, 6.$ Prostor vjerojatnosti je, dakle, klasičan s vjerojatnosti $\frac{1}{36}$ pridruženom svakom ishodu. Zato su rješenja a) $\frac{1}{36}$; b) $\frac{2}{36} = \frac{1}{18}$; c1) $\frac{4}{36} = \frac{1}{9}$; c2) $\frac{5}{36}$.

7.2. Uradak izvornog zadatka **intuitivnom metodom**

Prostor ishoda se, po izričaju zadatka i općem znanju o kockama – a to se pretpostavlja, sastoji od 21 ishoda, i to 15 ishoda koji se mogu predočiti uređenim parovima (x, y) s $x < y$ i 6 ishoda koji se mogu predočiti uređenim parovima (x, x).

Prostor ishoda je sada drugačiji od onoga u 7.1., a ni ishodi nisu jednako vjerojatni kao u 7.1. Pokušajmo zaključiti o vjerojatnosnom prostoru koji odgovara zadatku. Svaki ishod (x, y) s $x < y$ može se prikazati na dva načina, (x, y) ili (y, x), a svaki ishod (x, x) samo na jedan jedini način. Zato se treba smatrati da vjerojatnost svakog od 15 jednako vjerojatnih ishoda (x, y) s $x < y$ mora biti dva puta veća od vjerojatnosti svakog od 6 jednako vjerojatnih ishoda (x, x). Na temelju tog uvida jednostavan račun daje rješenje.

Neka je p vjerojatnost svakog ishoda (x,x). Tada je vjerojatnost svakog ishoda (x,y) s $x<y$ jednaka 2p. Budući da mora biti $6p+15\cdot 2p=1$, proizlazi da je $p=\frac{1}{36}$. Dakle, rješenja su a) $\frac{1}{36}$; b) $2\cdot\frac{1}{36}=\frac{1}{18}$; c1) $4\cdot\frac{1}{36}=\frac{1}{9}$; c2) $4\cdot\frac{1}{36}+\frac{1}{36}=\frac{5}{36}$.

Ovdje se šutke primjenjuje opća metoda rastava prostora ishoda. Vidi nastavak.

7.3. Uradak izvornog zadatka **metodom rastava** prostora ishoda u pridruženom klasičnom prostoru

Nastavljajući uradak izvornog zadatka iz 7.2. u kojem su ishodi (x,y) s $x\leq y$, a pridružene još nepoznate vjerojatnosti, možemo postupiti i ovako: svakom od 15 ishoda (x,y) s $x<y$ pridružimo dvočlani događaj $\{(x,y),(y,x)\}$ s vjerojatnosti $\frac{1}{36}+\frac{1}{36}=\frac{2}{36}=\frac{1}{18}$, a svakom od 6 ishoda (x,x) pridružimo jednočlani događaj $\{(x,x)\}$ s vjerojatnosti $\frac{1}{36}$.

U tom smo postupku prostor ishoda klasičnog vjerojatnosnog prostora iz 7.1. rastavili na 15 + 6 događaja, i to 15 događaja s vjerojatnosti $\frac{1}{18}$ i 6 događaja s vjerojatnosti $\frac{1}{36}$. Na kraju smo ishodima izvornog zadatka pridružili vjerojatnosti pridruženih događaja.

Tako smo konstruirali elementaran vjerojatnosni prostor koji služi kao vjerojatnosni model izvornog zadatka. Tim se modelom lako rješavaju postavljeni izvorni zadatci. Vidi 7.2.

Ovdje je bitan uvid da u elementarnom pokusu nastupi ishod (x,y) s $x<y$ onda i samo onda ako u zamišljenom klasičnom pokusu nastupi ishod (x,y) ili (y,x), tj. događaj $\{(x,y),(y,x)\}$, a ishod (x,x) onda i samo onda ako u zamišljenom klasičnom pokusu nastupi ishod (x,x), tj. događaj $\{(x,x)\}$. Bez tog uvida (ili pretpostavke) rješenje bi bilo besmisleno.

7.4. Zadatak

Kolika je vjerojatnost da se, bacajući tri kocke, pokažu: 1) tri šestice; 2) petica i dvije šestice; 3) dvije petice i šestica; 4) četvorka, petica i šestica.

7.5. Izmijenjeni zadatak 7.4.

Kolika je vjerojatnost da bacanjem tri kocke - bijele, crne i crvene - nastupe događaji 1) – 4) iz 7.4.

7.6. Drugačija izvedba zadatka 7.4.

Zadatak se može postaviti u znatno jednostavnijoj izvedbi da se umjesto bacanja kocaka zavrte oko svoje osi tri „vrtuljka", tj. male pravilne malo izdužene četverostrane prizme (s odbrušenim bridovima, da se lakše kotrljaju po stolu kada padnu) s označenim stranicama 1, 2, 3, 4, koje se pokažu kada vrtuljci padnu.

8. O naslovu

Uradci izvornika su pogrešni **ako** se prostor ishoda predoči pomoću svih uređenih parova (x, y) **ili** samo onih (x, y) koji zadovoljavaju uvjet $x \leq y$, **a** vjerojatnosni prostor smatra klasičnim. U jednom i u drugom slučaju *rješenje a) „slučajno" bi bilo ispravno, a već, primjerice, rješenje b) „ni slučajno" ne bi bilo ispravno nego posve pogrešno.*

Treba istaknuti da je vjerojatnosni model slučajnog pokusa bacanja dviju (jednakih, nerazlučivih) kocaka vrlo jednostavan elementaran vjerojatnostan prostor, a *ne* klasičan!

9. O metodi rastava općenito

Ta se metoda primjenjuje na *klasičnom* vjerojatnosnom prostoru proizvodeći od svakog rastava njegovog prostora ishoda jedan *elementaran* vjerojatnostan prostor.

Slijedi opis konstrukcije.

Neka prostor ishoda klasičnog vjerojatnosnog prostora ima n ishoda. Rastavimo ga na $r \leq n$ (međusobno isključivih) događaja rastavnica $A_1, A_2, ..., A_r$ iz prostora događaja polaznog klasičnog prostora, i to po redu s $m_1, m_2, ..., m_r$ ishoda. Neka je A bilo koji od njih s m ishoda. Tada je po klasičnoj formuli $\boldsymbol{P}(A) = \dfrac{m}{n}$.

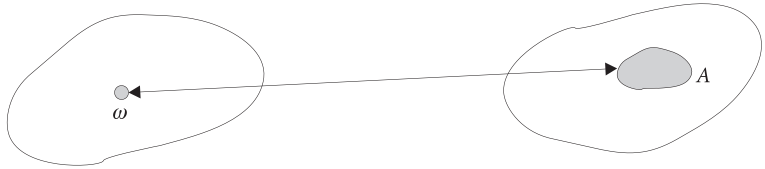
Neka prostor ishoda još nekonstruiranog elementarnog vjerojatnosnog prostora ima r ishoda $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_r$. Neka je ω bilo koji od njih još nepoznate vjerojatnosti $p(\omega)$.

Pridružimo događaju A ishod ω – neka je to pridruženje određeno tablicom $\omega(A) = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \ldots & A_r \\ \omega_1 & \omega_2 & \ldots & \omega_r \end{pmatrix}$, $\omega(A_i) = \omega_i$.

Pridružimo ishodu ω vjerojatnost $p(\omega) = \boldsymbol{P}(A)$ – neka je to pridruženje određeno tablicom $p(\omega) = \begin{pmatrix} \omega_1 & \omega_2 & \ldots & \omega_r \\ p_1 & p_2 & \ldots & p_r \end{pmatrix}$, $p(\omega_i) = p_i$.

Tim je jednostavnim postupcima konstruiran, pomoću rastava prostora ishoda klasičnog vjerojatnosnog prostora, elementaran prostor vjerojatnosti. (Događaji A_i imaju ulogu novih ishoda u novom prostoru.)

U primjeni metode rastava na zadatke poput izvornog osnovno je pitanje po kojem se načelu svakom ishodu ω nepoznate vjerojatnosne funkcije pridružuje poznata vjerojatnost $p(\omega) = \boldsymbol{P}(A)$ događaja A. *To pridruživanje je smisleno onda i samo* *onda ako ω nastupa točno onda kada se ostvaruje događaj A. Ako je ovo načelo valjano, onda se poznata vjerojatnosna struktura klasičnog prostora može prenijeti na nepoznatu u početku nepoznatog elementarnog prostora.* Vidi sl. 3.



sl. 3. Prostori ishoda

a) nepoznatog elementarnog   b) poznatog klasičnog vjerojatnosnog prostora

10. O elementarnom vjerojatnosnom prostoru s racionalnim vjerojatnostima

Metodom rastava iz 9. može se, polazeći od klasičnog vjerojatnosnog prostora, konstruirati mnoštvo elementarnih vjerojatnosnih prostora (među kojima može biti i klasičnih – vidi dolje postavljeni zadatak).

U svezi s tim prostorom postavlja se pitanje može li se svaki elementarni prostor na taj način konstruirati. Očito je da ne može, jer svi tako konstruirani elementarni prostori imaju racionalne vjerojatnosti.

Zato postavljamo pitanje drugačije: može li svaki elementarni prostor s racionalnim vjerojatnostima biti tako konstruiran? Odgovor na to pitanje je lagan i potvrdan, što tvrdi sljedeći poučak, a njegov će dokaz pokazati kako se u svakom slučaju izvodi konstrukcija.

POUČAK. *Svaki elementarni vjerojatnosni prostor s racionalnim vjerojatnostima može biti konstruiran metodom rastava prostora ishoda nekog klasičnog vjerojatnosnog prostora.*

ZADATAK. Dokaži taj poučak.

DOKAZ. Želimo li konstruirati elementaran prostor s r ishoda metodom rastava, moramo odrediti takav rastav $A_1, A_2, ..., A_r$ prostora ishoda klasičnog prostora s n ishoda na r rastavnica da svaka vjerojatnost p_i elementarnog prostora bude jednaka vjerojatnosti $\boldsymbol{P}(A_i)$ klasičnog prostora.

Neka elementaran prostor s racionalnim vjerojatnostima koji želimo konstruirati ima r ishoda ω_i s vjerojatnostima $p_i = p(\omega_i) = \frac{m_i}{n_i}, \quad i = 1, 2, ..., r$, gdje su racionalne vjerojatnosti predočene neskrativim razlomcima (što se pretpostavlja samo zbog praktičkih razloga). Neka je n = **n**(ajmanji) **z**(ajednički) **v**(išekratnik) tih nazivnika

$n_1, n_2, ..., n_r$ i $\frac{n}{n_i} = k_i$ tj. $n = n_i k_i$. Tada su sve vjerojatnosti $p_i = \frac{m_i}{n_i} = \frac{m_i k_i}{n_i k_i} = \frac{m_i'}{n}$ predočene novim razlomcima $p_i = \frac{m_i'}{n}$ s jednakim nazivnicima *n*.

Nakon prethodne pripreme jasno je da prostor ishoda polaznog klasičnog prostora mora imati *n* ishoda i da se mora rastaviti na *r* rastavnica $A_1, A_2, ..., A_r$ po redu s $m_1', m_2', ..., m_r'$ ishoda. Uz te je uvjete $\boldsymbol{P}(A_i) = \frac{m_i'}{n}$, dakle $\boldsymbol{P}(A_i) = p_i$.

Tako smo dokazali da se svaki elementarni prostor s racionalnim vjerojatnostima može konstruirati metodom rastava prostora ishoda nekog klasičnog vjerojatnosnog prostora.

ZADATAK. Odredi nužan i dovoljan uvjet da elementaran vjerojatnostan prostor konstruiran metodom rastava bude klasičan.

RJEŠENJE. 1. Broj *n* mora biti djeljiv brojem r.

2. Sve rastavnice moraju imati jednak broj ishoda.