Funkcijske jednadžbe i cikličke grupe

Željko Zrno[1]

1. Uvod

Kod proučavanja elementarnih funkcija neobično važnu ulogu igraju tzv. **funkcijske jednadžbe**. Pri rješavanju mnogih matematičkih problema na prirodan način pojavljuju se funkcijske jednadžbe. Susrećemo ih već u samim počecima gimnazijskog školovanja, na primjer kod definicija parnosti, neparnosti, periodičnosti funkcija. Podsjetimo se definicija parnosti i neparnosti realne funkcije:

Funkcija $f:\mathrm{R}\to\mathrm{R}$ je parna ako za sve $x\in\mathrm{R}$ vrijedi $f(-x)=f(x)$, a neparna je ako za sve $x\in\mathrm{R}$ vrijedi $f(-x)=-f(x)$.

Kod proučavanja trigonometrijskih funkcija govori se o njihovoj periodičnosti. Funkcija $f:\mathrm{R}\to\mathrm{R}$ ima period 2π ako za sve $x\in\mathrm{R}$ vrijedi $f(x+2\pi)=f(x)$.

Navedene jednadžbe

$$f(-x)=f(x)$$
$$f(-x)=-f(x)$$
$$f(x+2\pi)=f(x)$$

zovu se *funkcijske jednadžbe*. Rješenje funkcijske jednadžbe jest svaka funkcija koja zadovoljava tu jednadžbu. Tako su neka od rješenja prve jednadžbe funkcije:

$$f(x)=|x|, f(x)=ax^2, a\in\mathrm{R},\ f(x)=ax^4+bx^2, a,b\in\mathrm{R},\ f(x)=\cos x.$$

Rješenja druge od gore navedenih jednadžbi su, na primjer:

$$f(x)=x^3+ax, a\in\mathrm{R},\ f(x)=\sin x,\ f(x)=x+2\sin x,$$

a treće

$$f(x)=\sin x, f(x)=\cos x, f(x)=3\sin x+2\cos x \text{ itd.}\quad \text{Provjeri to!}$$

[1]Željko Zrno, Veleučilište „Marko Marulić" u Kninu

Trigonometrijske funkcije $f(x)=\cos x$ i $g(x)=\sin x$ zadovoljavaju sljedeće jednadžbe koje su poznate kao *adicijski teoremi*:

$$g(x+y)=g(x)f(y)+f(x)g(y)$$
$$f(x+y)=f(x)f(y)-g(x)g(y)$$
$$g(x-y)=g(x)f(y)-f(x)g(y)$$
$$f(x-y)=f(x)f(y)+g(x)g(y).$$

I pored toga što su se funkcijske jednadžbe pojavile prije dva stoljeća, do danas nije stvorena neka jedinstvena teorija o njima. Upravo vrlo malo općih metoda postoji za rješavanje funkcijskih jednadžbi. Mnoge funkcijske jednadžbe ni do danas nisu riješene. Prvi primjeri funkcijskih jednadžbi sreću se već u radovima D'Alamberta, Eulera i Lagrangea, matematičara iz 18. i 19. stoljeća. Veliki se značaj pripisuje G. Mongeu, koji je 1773. god. osjetio potrebu za rješavanjem funkcijskih jednadžbi u teoriji krivih površina, i u vezi s tim problemom dao značajan prilog rješavanju i teoriji funkcijskih jednadžbi. Poseban interes za funkcijske jednadžbe pojavio se 1821. god. kada je Cauchy našao opće rješenje funkcijske jednadžbe

$$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y).$$

Cauchy se bavio i drugim tipovima jednadžbi, pa je tako riješio sljedeće funkcijske jednadžbe:

$$f(x+y)=f(x)+f(y)$$
$$f(x+y)=f(x)f(y)$$
$$f(xy)=f(x)+f(y)$$
$$f(xy)=f(x)f(y).$$

Stoga se prva od ovih jednadžbi i zove *Cauchyjeva jednadžba*.

2. Supstitucije

Kod funkcijskih jednadžbi često se spominje kako neke jednakosti vrijede za sve vrijednosti x i y domene funkcije. Kad vrijede za sve, onda vrijede i za posebne vrijednosti od x i y. Uvrštavanjem tih posebnih vrijednosti postupno sužavamo skup mogućih funkcija koje su rješenje dane jednadžbe. Na kraju provjerom utvrđujemo koje su funkcije zaista rješenja zadane jednadžbe. Pokažimo na nekoliko primjera.

Primjer 1. *Odredimo sve funkcije* $f:\mathrm{R}\to\mathrm{R}$ *za koje je*

$$f(x+y)+f(x-y)=2+x^2+y^2, \forall x,y\in\mathrm{R}.$$

Rješenje: Uvrštavanjem $y=0$ dobivamo

$$2f(x)=x^2+2 \Rightarrow f(x)=1+\frac{x^2}{2}.$$

Uvrštavanjem u polaznu jednadžbu vidimo da funkcija $f(x)=1+\frac{x^2}{2}$ zadovoljava polaznu jednakost. Dakle, $f(x)=1+\frac{x^2}{2}$ je rješenje zadane funkcijske jednadžbe.

Primjer 2. *Odredimo, za dani* $a\in \mathrm{R}$, *funkciju* $f:\mathrm{R}\to\mathrm{R}$, *tako da je* $f(0)=\frac{1}{2}$ *i da vrijedi funkcijska jednadžba* $\forall x,y\in\mathrm{R},\ f(x+y)=f(x)f(a-y)+f(y)f(a-x)$.

Rješenje: Uz izbor $x=0, y=0$ slijedi da je

$$f(0)=f(0)\cdot f(a)+f(0)\cdot f(a)\Rightarrow f(a)=\frac{1}{2}.$$

Uz izbor $x=0$ slijedi da je $f(y)=\frac{1}{2}f(a-y)+\frac{1}{2}f(y)$,

$$\forall y\in\mathrm{R},\ f(y)=f(a-y). \tag{*}$$

Analogno u slučaju $y=0$ zaključujemo da je

$$\forall x\in\mathrm{R},\ f(x)=f(a-x). \tag{**}$$

Uvrštavanjem (*), (**) u polaznu funkcijsku jednadžbu slijedi da je

$$f(x+y)=f(x)f(y)+f(y)f(x) \text{ ili } \forall x,y\in\mathrm{R},\ f(x+y)=2f(x)f(y).$$

Uz izbor $y=-x$ odavde slijedi da je $\frac{1}{2}=2f(x)f(-x)$ ili $\forall x\in\mathrm{R},\ 4f(x)f(-x)=1.$ (***)

Uz izbor $y=a$ iz polazne jednadžbe slijedi da je

$$f(x+a)=\frac{1}{2}f(x)+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}+\frac{f(x)}{2}.$$

Iz (**) slijedi da je $f(x+a)=f(-x)$, pa iz ova dva zadnja rezultata imamo: $\frac{1}{4}+\frac{1}{2}f(x)=f(-x)$ ili drukčije $1+2f(x)=4f(-x)$, pa množenjem s $f(x)$ slijedi $2f^2(x)+f(x)=4f(x)f(-x)$.

Iz (***) zaključujemo da je $2f^2(x)+f(x)-1=0$, i to je kvadratna jednadžba $\forall x\in\mathrm{R},\ f(x)\in\left\{-1,\frac{1}{2}\right\}$.

Dakle, funkcija f uzima najviše dvije vrijednosti. Zbog (***) mogućnost $f(x)=-1$ otpada jer ako je $f(x)=-1$, tada je $f(-x)=-\frac{1}{4}$. Kako je $\forall x\in\mathrm{R}$, $2f^2(x)+f(x)-1=0$, to je $2f^2(-x)+f(-x)-1=0$, pa za $f(-x)=-\frac{1}{4}$ slijedi $-\frac{9}{8}=0$, što nije istina.

Dakle, gornjom funkcijskom jednadžbom i uvjetom $f(0)=\frac{1}{2}$ dano je jedinstveno rješenje f, pri čemu je f konstantna funkcija, tj. $f(x)=\frac{1}{2}$ za svaki $x\in\mathrm{R}$.

Primjer 3. *Odredimo sve funkcije* $f: \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ *za koje je*

$$f\left[f(x)+y\right]=f(2x)+4x-2y\,,\ \forall x,y \in \mathrm{R}.$$

Rješenje: Dokažimo da je f (ako postoji) injekcija. Neka su $x_1, x_2 \in \mathrm{R}$ takvi da je $f(x_1)=f(x_2)$. Uvrštavanjem u početnu jednadžbu $y=0$, dobivamo

$$f\left[f(x)\right]=4x+f(0)\,,\ \forall x \in \mathrm{R}.$$

Tada vrijedi uvrštavanjem $x=x_1$ i $x=x_2$ u gornju jednakost:

$$4x_1+f(0)=f\left[f(x_1)\right]=f\left[f(x_2)\right]=4x_2+f(0) \Rightarrow x_1=x_2\,.$$

Time smo dokazali da je f injekcija. Uvrštavanjem u početnu jednadžbu $y=2x$, dobivamo $f\left[f(x)+2x\right]=f(4x),\ \forall x \in \mathrm{R}$. Budući da je f injekcija, vrijedi $f(x)+2x=4x$, odnosno $f(x)=2x$.

Provjerom dobivamo da je f zaista rješenje zadane funkcijske jednadžbe.

3. Cikličke grupe

Podsjetimo se važnog pojma u matematici, a to je pojam **grupe**.

Grupa je neprazan skup G u kojemu je definirana binarna operacija $\bullet$ (operacija nad proizvoljna dva elementa grupe), a rezultat te operacije je neki element iz te grupe: $\forall x,y \in G, x \bullet y \in G$.

Činjenica da svakom uređenom paru elemenata $x,y \in G$ operacija $\bullet$ pridružuje neki jedinstveni element iz G se piše: $\forall x,y \in G, \exists! z \in G, z = x \bullet y$.

Dakle je $\bullet$ funkcija (preslikavanje) s dvije varijable ili $\bullet : G \times G \to G$.

Ta je operacija asocijativna: $\forall x,y,z \in G, (x \bullet y) \bullet z = x \bullet (y \bullet z)$. Postoji *neutralni element* $e \in G : \exists e \in G, \forall x \in G, (x \bullet e) = (e \bullet x) = x$. Za svaki element grupe G postoji njemu *inverzni element*: $\forall x \in G, \exists y \in G, x \bullet y = y \bullet x = e$. Piše se $y = x^{-1}$.

S obzirom da grupu određuje skup G i operacija $\bullet$, grupa se radije definira kao uređeni par $(G,\bullet)$ skupa G i binarne operacije $\bullet$ na tom skupu. Operacija $\bullet$ ne mora biti *komutativna*. Ako ta operacija jest komutativna, tada se za grupu G kaže da je komutativna ili **Abelova grupa.**

Kad je operacija $\bullet$ komutativna, znači da rezultat ne ovisi o poretku operanada:

$$\forall x,y \in G, x \bullet y = y \bullet x.$$

Također se, radi jednostavnosti, znak $\bullet$ često izostavlja, pa se umjesto $x \bullet y$ piše kraće xy, ali se pri tome ima na umu operacija $\bullet$.

Sada dajemo definiciju *cikličke grupe*.

Definicija 1. Grupa G je **ciklička** ako postoji element $g \in G$ takav da je

$$G = \left\{ g^m \mid m \in Z \right\}.$$

U tom slučaju kažemo da je grupa G generirana elementom g koji se zove *generator* grupe G.

Ako su sve potencije g^m među sobom različite, skup G je beskonačan, pa kažemo da je G ciklička grupa beskonačnog reda. Ako je $g^m = g^n (m \neq n)$, onda je G konačan skup.

Iz $g^m = g^n \Rightarrow g^{m-n} = e$ i $g^{n-m} = e$, pa postoji prirodni broj k takav da je $g^k = e$. Najmanji od takvih brojeva k označimo s p.

Sada je $g^p = e$ i $G = \{e, g, g^2, \cdots, g^{p-1}\}$.

Grupa G ima p elemenata. Svaka ciklička grupa je komutativna. Naime, ako su $x = g^i$ i $y = g^j$ elementi cikličke grupe G za neke $i, j \in Z$, tada je

$$xy = g^i g^j = g^{i+j} = g^{j+i} = g^j g^i = yx.$$

Odavde se vidi da komutativnost u cikličkoj grupi G slijedi zbog komutativnosti zbrajanja koje vrijedi za cijele brojeve $i, j \in Z$.

4. Rješavanje funkcijskih jednadžbi tipa $a(x)f\left[g_1(x)\right] + b(x)f\left[g_2(x)\right] = c(x)$ i cikličke grupe

Riješimo nekoliko sljedećih primjera funkcijskih jednadžbi navedenog tipa te uočimo da navedeni postupak možemo povezati s pojmom cikličke grupe.

Primjer 1. *Odredimo sve funkcije* f *takve da je* $-(x-1)f(x) + 3f(2-x) = -7$ *za svaki* $x \in \mathrm{R}$.

Rješenje: Ako u početnoj jednadžbi napravimo zamjenu $x \to 2-x$, tada dobivamo

$$-(1-x)f(2-x) + 3f(x) = -7 \qquad (2),$$

što s početnom

$$-(x-1)f(x) + 3f(2-x) = -7 \qquad (1)$$

daje sustav od dvije linearne jednadžbe s dvije nepoznanice. Uvedimo oznake zbog elegantnijeg zapisa i riješimo sustav jednadžbi.

Dakle, imamo

$$f(x) = t_1$$
$$f(2-x) = t_2.$$

Uvrštavanjem u (1) i (2) dobijemo sustav:

$$-(x-1)t_1 + 3t_2 = -7$$
$$-(1-x)t_2 + 3t_1 = -7$$

Iz prve dobivamo

$$t_2 = \frac{(x-1)t_1 - 7}{3}. \qquad (*)$$

Uvrštavanjem u drugu dobivamo:

$$t_1 = \frac{7x-28}{x^2-2x+10} \Rightarrow f(x) = \frac{7x-28}{x^2-2x+10}.$$

Dobiveni t_1 uvrstimo u (*), nakon čega dobivamo

$$t_2 = \frac{-42x^2+210x-168}{3x^2-6x+30} \Rightarrow f(2-x) = \frac{-42x^2+210x-168}{3x^2-6x+30}.$$

Uočimo kako za komponiranje funkcija $g_1(x)=x$ i $g_2(x)=2-x$, tj. $\{x, 2-x\}$ u prethodnom primjeru, vrijedi sljedeća tablica:

$\circ$	g_1	g_2
g_1	g_1	g_2
g_2	g_2	g_1

Uočavamo da vrijedi $g_2{}^2 = g_1$.

Ako označimo: $e = g_1(x), g(x) = g_2(x)$, na osnovi definicije i svojstva cikličke grupe dobivamo da je $G=\{e,g\}$ ciklička grupa drugog reda, s generatorom $g(x)=2-x$ i neutralnim elementom $e=x$.

Primjer 2. *Odredimo sve* $f : \mathrm{R} \backslash \left\{\frac{5}{7}, \frac{8}{7}\right\} \to \mathrm{R} \backslash \left\{\frac{5}{7}, \frac{8}{7}\right\}$ *za koje je*

$$f\left(\frac{8x-7}{7x-5}\right) + f\left(\frac{5x-7}{7x-8}\right) = \frac{91x^2-187x+91}{40x^2-91x+49}, \ \forall x \in \mathrm{R} \backslash \left\{\frac{5}{7}, \frac{8}{7}\right\} \qquad (1)$$

Rješenje: Napravimo u početnoj jednadžbi zamjenu $x \to \frac{8x-7}{7x-5}$. Tada dobivamo

$$f\left(\frac{5x-7}{7x-8}\right) + f(x) = \frac{7x^2-3x-7}{5x^2-7x}. \qquad (2)$$

Ponovno slijedi supstitucija $x \to \frac{8x-7}{7x-5}$.

Dobivamo

$$f(x) + f\left(\frac{8x-7}{7x-5}\right) = \frac{7x^2+3x-7}{8x^2-7x}. \qquad (3)$$

Slično kao u prethodnom primjeru, uvodimo oznake:

$$f(x)=t_1$$
$$f\left(\frac{8x-7}{7x-5}\right)=t_2$$
$$f\left(\frac{5x-7}{7x-8}\right)=t_3,$$

i dobijemo, uvrštavanjem u (1), (2) i (3), linearni sustav od tri jednadžbe s tri nepoznanice:

$$t_2+t_3=\frac{91x^2-187x+91}{40x^2-91x+49}$$
$$t_3+t_1=\frac{7x^2-3x-7}{5x^2-7x}$$
$$t_1+t_2=\frac{7x^2+3x-7}{8x^2-7x}.$$

Rješavanjem ovog sustava dobijemo:

$$f(x)=\frac{1}{x}$$
$$f\left(\frac{8x-7}{7x-5}\right)=\frac{7x-5}{8x-7}$$
$$f\left(\frac{5x-7}{7x-8}\right)=\frac{7x-8}{5x-7}.$$

Uočimo kako za komponiranje skupa funkcija $g_1(x)=x, g_2(x)=\frac{8x-7}{7x-5}$ i $g_3(x)=\frac{5x-7}{7x-8}$, tj. $\left\{x,\frac{8x-7}{7x-5},\frac{5x-7}{7x-8}\right\}$ vrijedi sljedeća tablica:

$\circ$	g_1	g_2	g_3
g_1	g_1	g_2	g_3
g_2	g_2	g_3	g_1
g_3	g_3	g_1	g_2

Uočimo da vrijedi:

$$g_2^{\,2}=g_3$$
$$g_2^{\,3}=g_2\circ g_2^{\,2}=g_2\circ g_3=g_1$$

Sličnim razmatranjem, uz oznake $e=g_1(x), g(x)=g_2(x)$, dobivamo cikličku grupu

$$G=\left\{e,g,g^2\right\},$$

koja je trećeg reda, s generatorom $g(x)=\frac{8x-7}{7x-5}$ i neutralnim elementom $e=x$.

Primjer 3. *Odredimo sve* $f:\mathrm{R}\setminus\{-1,0,1\}\to\mathrm{R}\setminus\{-1,0,1\}$ *za koje je* $xf(x)+2f\left(\frac{x-1}{x+1}\right)=1$ *za* $\forall x\in\mathrm{R}\setminus\{-1,0,1\}$.

Rješenje: Zadatak ćemo riješiti kao u prethodnim primjerima, supstitucijom. Prvo ćemo napraviti zamjenu $x\to\frac{x-1}{x+1}$. To nam daje

$$\frac{x-1}{x+1}f\left(\frac{x-1}{x+1}\right)+2f\left(-\frac{1}{x}\right)=1.$$

Pojavljuje se novi izraz $f\left(-\frac{1}{x}\right)$. Sada pravimo novu zamjenu u početnoj jednadžbi $x\to-\frac{1}{x}$, pa time dobivamo $-\frac{1}{x}f\left(-\frac{1}{x}\right)+2f\left(\frac{x+1}{1-x}\right)=1$. Sad nam se pojavio još jedan novi izraz $f\left(\frac{x+1}{1-x}\right)$. Zamjenom $x\to\frac{x+1}{1-x}$ u početnoj jednadžbi dobivamo $\frac{x+1}{1-x}f\left(\frac{x+1}{1-x}\right)+2f(x)=1$.

Time smo „krug zatvorili" i dobili smo, uz oznake t_1,t_2,t_3,t_4, linearni sustav od četiri jednadžbe s četiri nepoznanice:

$$\begin{aligned}
&xt_1+2t_2=1\\
&\frac{x-1}{x+1}t_2+2t_3=1\\
&-\frac{1}{x}t_3+2t_4=1\\
&\frac{x+1}{1-x}t_4+2t_1=1.
\end{aligned}$$

Iz ovog sustava dobije se tražena funkcija

$$t_1=\frac{4x^2-x+1}{5x(x-1)}\Rightarrow f(x)=\frac{4x^2-x+1}{5x(x-1)}.$$

Provjerom utvrđujemo da f zadovoljava početnu (zadanu) jednadžbu.

I ovdje uočavamo kako za komponiranje funkcija:

$$g_1(x)=x, g_2(x)=\frac{x-1}{x+1}, g_3(x)=-\frac{1}{x} \text{ i } g_4(x)=\frac{x+1}{1-x},$$

tj. $\left\{x,\frac{x-1}{x+1},-\frac{1}{x},\frac{x+1}{1-x}\right\}$, vrijedi tablica:

$\circ$	g_1	g_2	g_3	g_4
g_1	g_1	g_2	g_3	g_4
g_2	g_2	g_3	g_4	g_1
g_3	g_3	g_4	g_1	g_2
g_4	g_4	g_1	g_2	g_3

Uočavamo da vrijedi: $g_2{}^2 = g_2 \circ g_2 = g_3$

$$g_2{}^3 = g_2 \circ g_2{}^2 = g_2 \circ g_3 = g_4$$
$$g_2{}^4 = g_2 \circ g_2{}^3 = g_2 \circ g_4 = g_1.$$

Grupa $G = \{e, g, g^2, g^3\}$, uz oznake $e = x$, $g(x) = g_2(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$, predstavlja cikličku grupu četvrtog reda, s generatorom $g(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$ i neutralnim elementom $e = x$.

Općenito, kod funkcijskih jednadžbi tipa

$$a(x) f\left[g_1(x)\right] + b(x) f\left[g_2(x)\right] = c(x),$$

$a(x), b(x), c(x), g_1(x), g_2(x)$ su poznate funkcije (neke mogu biti i konstante).

Najprije treba izvršiti supstituciju tako da postane $g_1(x) = x$. Sada elementom g_2 generiramo sljedeće elemente na sljedeći način:

supstitucijom $x \to g_2(x)$ dobivamo

$$a\left[g_2(x)\right] f\left[g_2(x)\right] + b\left[g_2(x)\right] f\left[g_3(x)\right] = c\left[g_2(x)\right], \; g_3 = g_2{}^2,$$

supstitucijom $x \to g_2(x)$ dobivamo

$$a\left[g_3(x)\right] f\left[g_4(x)\right] + b\left[g_3(x)\right] f\left[g_4(x)\right] = c\left[g_3(x)\right], \; g_4 = g_2{}^3,$$

.

.

.

supstitucijom $x \to g_2(x)$ dobivamo

$$a\left[g_n(x)\right] f\left[g_1(x)\right] + b\left[g_n(x)\right] f\left[g_n(x)\right] = c\left[g_n(x)\right], \; g_n = g_2{}^{n-1}.$$

Ako g_2 generira cikličku grupu od konačno mnogo funkcija, na kraju ćemo dobiti sustav od n jednadžbi s n nepoznanica koji ćemo moći riješiti.

5. Möbiusovo preslikavanje i sastavljanje (formiranje) funkcijske jednadžbe

Postavljamo sljedeće pitanje: kako općenito sastaviti funkcijsku jednadžbu za koju će postojati odgovarajuća transformacija tipa $x \to g(x)$ kojom će se rješavanje polazne jednadžbe svesti na rješavanje linearnog sustava? Iz ovih nekoliko primjera, iz točke 4., jasno je da funkcija $g(x)$ treba biti generator neke konačne cikličke grupe, što znači da postoji prirodni broj n, tako da je funkcijski skup $\{g(x), g^2(x), g^3(x), \cdots, g^n(x)\}$ grupa $n-$tog reda.

Od transformacije $g(x)$ ćemo tražiti da bude Möbiusovo preslikavanje.

Definicija 2. Möbiusovo preslikavanje je kvocijent dva *afina* preslikavanja, tj. piše se u obliku

$$g(x) = \frac{ax+b}{cx+d} g_4, \; a,b,c,d \in \mathrm{R}.$$

Preslikavanje $g(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ ima pridruženu kvadratnu matricu $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$.

Lako se vidi da komponiranju Möbiusovih preslikavanja odgovara množenje njihovih pripadnih matrica, kao i da identičnom preslikavanju odgovara skalarna matrica-višekratnik jedinične matrice, tj. $\lambda I = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$.

Ako imamo $g(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ i $\varphi(x) = \dfrac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}$, dobivamo:

$$(g \circ \varphi)(x) = g[\varphi(x)] = \frac{(a\alpha + b\gamma)x + (a\beta + b\delta)}{(c\alpha + d\gamma)x + (c\beta + d\delta)}.$$

Rezultat množenja odgovarajućih matrica je:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a\alpha + b\gamma & a\beta + b\delta \\ c\alpha + d\gamma & c\beta + d\delta \end{bmatrix}.$$

Da bi skup $\{g(x), g^2(x), \cdots, g^n(x)\}$ bio ciklička grupa n-tog reda, iz definicije cikličke grupe preslikavanje $g(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ treba tražiti u takvom obliku da n-ta potencija tog preslikavanja bude identično preslikavanje (neutralni element pripadne funkcijske grupe) i da k-ta potencija za $k < n$ nema to svojstvo. Drugim riječima, koeficijenti $a,b,c,d \in \mathrm{R}$ trebaju biti takvi da matrica M^n bude skalarna matrica ($M^n = \lambda I$, za neki $\lambda \in \mathrm{R}$), ali ne i matrica M^k za $k < n$.

Razradimo i utvrdimo kriterije za cikličke grupe drugog, trećeg i četvrtog reda.

U slučaju cikličke grupe drugog reda polazimo od matrice $M=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ i računamo njezinu drugu potenciju M^2:

$$M^2=\begin{bmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{bmatrix},$$

koja za naše potrebe treba biti skalarna, iz čega slijedi jednadžba $a^2+bc=bc+d^2$ ili $(a-d)(a+d)=0 \Rightarrow a=d$ ili $a=-d$.

Potrebno je još da elementi na sporednoj dijagonali iščezavaju. Lako je provjeriti da je skalarnost matrice M^2 zajamčena, uz uvjet:

$$a+d=0\text{, tj. } a=-d. \qquad (*)$$

Primjer takve matrice je $M=\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}$, što daje transformaciju, tj. generator $g(x)=\dfrac{5x+2}{x-5}$ i grupu $\left\{x, \dfrac{5x+2}{x-5}\right\}$.

Razradimo slučaj grupe trećeg reda. Polazimo od matrice $M=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ i računamo njezinu treću potenciju M^3. Dobivamo:

$$M^3=\begin{bmatrix} a^3+2abc+bcd & b(a^2+ad+bc+d^2) \\ c(a^2+ad+bc+d^2) & abc+2bcd+d^3 \end{bmatrix}.$$

Iz uvjeta njene skalarnosti imamo jednadžbu $a^3+2abc+bcd=abc+2bcd+d^3$ ili

$$(a-d)(a^2+d^2+ad+bc)=0.$$

Potrebno je još da elementi na sporednoj dijagonali budu nula. Lako je provjeriti da je u ovom slučaju skalarnost matrice M^3 zajamčena, uz uvjet:

$$a^2+d^2+ad+bc=0. \qquad (**)$$

Primjer takve matrice je $M=\begin{bmatrix} 1 & -7 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, što daje $g(x)=\dfrac{x-7}{x+2}$ i grupu $\left\{x, \dfrac{x-7}{x+2}, \dfrac{2x+7}{1-x}\right\}$.

Vidjeli smo u Primjeru 2. u točki 4. da smo imali matricu $M=\begin{bmatrix} 8 & -7 \\ 7 & -5 \end{bmatrix}$ s generatorom $g(x)=\dfrac{8x-7}{7x-5}$ i funkcijskom cikličkom grupom $\left\{x, \dfrac{8x-7}{7x-5}, \dfrac{5x-7}{7x-8}\right\}$, gdje smo imali formiranu (zadanu) polaznu funkcijsku jednadžbu

$$f\left(\frac{8x-7}{7x-5}\right)+f\left(\frac{5x-7}{7x-8}\right)=\frac{91x^2-187x+91}{40x^2-91x+49},$$

čije je rješenje: $f(x)=\dfrac{1}{x}$.

Za cikličku grupu četvrtog reda računamo M^4, te dobivamo:

$$M^4=\begin{bmatrix} a^4+3a^2bc+2abcd+b^2c^2+bcd^2 & b\left[a^3+a^2d+a(d^2+2bc)+2bcd+d^3\right] \\ c\left[a^3+a^2d+a(d^2+2bc)+2bcd+d^3\right] & a^2bc+2abcd+b^2c^2+3bcd^2+d^4 \end{bmatrix}.$$

Skalarnost slijedi iz jednakosti

$$a^4+3a^2bc+2abcd+b^2c^2+bcd^2=a^2bc+2abcd+b^2c^2+3bcd^2+d^4$$

ili

$$(a^2-d^2)(a^2+d^2+2bc)=0.$$

Provjerom, vidimo da je skalarnost osigurana, uz uvjet

$$a^2+d^2+2bc=0. \tag{***}$$

Primjer takve matrice je $M=\begin{bmatrix}1 & -13\\ 1 & 5\end{bmatrix}$, što daje $g(x)=\dfrac{x-13}{x+5}$ i grupu

$$\left\{x,\frac{x-13}{x+5},\frac{-(2x+13)}{x+2},\frac{5x+13}{1-x}\right\}.$$

Literatura

1. Kurepa, Svetozar: *Uvod u linearnu algebru*, Školska knjiga, Zagreb, 1978.
2. Kurepa, S. i Kraljević, H.: *Matematička analiza 4/I,* Tehnička knjiga, Zagreb, 1986.
3. Kuczma, M.: *Functional Equations in a Single Variable,* Warszawa, 1968.
4. Aczel, J.: *On Application and Theory of Functional Equations*, Basel-Stuttgart, 1969.
5. Tadić, Tvrtko: *Pripreme za matematička natjecanja,* Element, Zagreb, 2006.