Uvođenje pojma određenog integrala u srednjoškolskoj nastavi matematike[1]

IVANA BOŽIĆ [2], TOMISLAV ŠIKIĆ[3]

1. Uvod

S pojmom integral i integralnim računom učenici se prvi put susreću u četvrtom razredu srednje škole. S obzirom da tada nemaju dovoljno matematičkog znanja za razumijevanje pojmova kao što su supermum, infimum, Darbouxove sume, donji i gornji Riemannov integral - autori srednjoškolskih udžbenika vješto nastoje izbjeći njihovo korištenje.

U ovom ćemo radu usporediti udžbenike za četvrti razred srednje škole sljedećih autora:

- Neven Elezović (vidi [3])
- Sanja Antoliš, Aneta Copić, Nevenka Antončić (vidi [4], [5])
- Hrvoje Kraljević i Zvonimir Šikić (vidi [6])

Usredotočit ćemo se na sličnosti i razlike kod prikazivanja sljedećih pojmova: sume, granični prijelaz, primitivna funkcija, Newton-Leibnizov teorem. Udžbenicima je zajedničko da se svi autori odlučuju isključivo za integrabilnost neprekidnih funkcija na segmentu. Pojam sume svaki od gore navedenih autora objašnjava na različit način, pa tako N. Elezović nema Darbouxove sume, ali koristeći pretpostavku da je funkcija neprekidna smije koristiti Bolzano-Weierstrassov teorem i zaključiti da na svakom podsegmentu funkcija poprima minimum i maksimum. Autor umjesto Darbouxovih suma koristi *donju i gornju integralnu sumu*. Autorice S. Antoliš, A. Copić i N. Antončić uvode ekvidistantnu subdiviziju segmenta, rabe izraz *integralna suma* funkcije na segmentu, koja daje jednu aproksimaciju površine ispod grafa funkcije. Koristeći se intuicijom, autorice navode da niz integralnih suma teži prema površini. U udžbeniku koji su napisali H. Kraljević i Z. Šikić također nema Darbouxovih suma, definiraju *donje i gornje sume*.

Prema [3] problem jednakosti donjeg i gornjeg Riemannovog integrala riješen je graničnim prijelazom, prema [4] i [5] ekvidistantnom subdivizijom segmenta.

---

[1]Ovaj je članak napisan na osnovi diplomskog rada Ivane Božić (mentor T. Šikić) obranjenog 2009. godine na Diplomskom studiju Matematika, smjer nastavnički (PMF-MO, Sveučilište u Zagrebu).

[2]Ivana Božić, Tehničko veleučilište u Zagrebu – Graditeljski odjel

[3]Tomislav Šikić, Fakultet elektrotehnike i računarstva Sveučilišta u Zagrebu

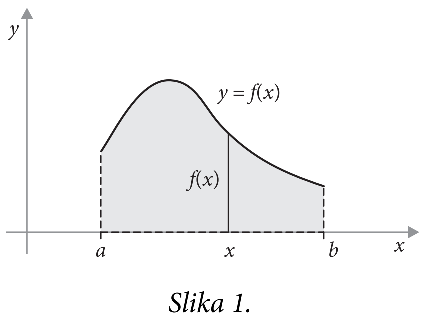
S obzirom na način kako definiraju donje i gornje sume u [6], nemaju problem s donjim i gornjim Riemannovim integralom. Uvođenjem Bolonjskog procesa na PMF-Matematičkom odjelu Sveučilišta u Zagrebu došlo je do značajnih promjena u programu preddiplomskog studija Matematika - nastavnički smjer. Kolegiji Matematičke analize 1-3 zamijenjeni su kolegijima Diferencijalni i integralni račun 1 i 2 [12].

Temeljna literatura na osnovi koje su se formirali spomenuti novi kolegiji su, uz dosadašnje udžbenike prof. Kurepe, i udžbenici „kalkulusa” jedne i više varijabli Sergea Langa. Programe kolegija su formirali dugogodišnji nastavnici Matematičke analize 1 i 2, te Matematičke analize 3 i 4, prof. H. Šikić i prof. Š. Ungar. Stoga će se u ovom članku dosta prostora posvetiti i zanimljivom pristupu uvođenja integralnog računa u udžbeniku S. Langa, *A first course in calculus* [7], koji se koristi za uvodni kolegij u matematičku analizu na mnogim renomiranim sveučilištima. Rad zaključujemo pristupom koji se predavao u sklopu kolegija Diferencijalni i integralni račun 1 (na osnovi spomenutih smjernica) u drugom (ljetnom) semestru prve godine preddiplomskog studija matematike, smjer nastavnički, kao početni kolegij matematičke analize. Pristup ima dodirnih točaka sa svim prije navedenim udžbenicima, stoga se može primijeniti i u srednjoškolskoj nastavi. Štoviše, uvođenjem domene infinitezimalni račun u NOK-u [11] upravo problematika uvođenja učenika u diferencijalni i integralni račun ima veliku važnost. Završni dio članka smatramo značajnim za buduće mlade profesore čije će se obrazovanje i znanje o diferencijalnom i integralnom računu zasnivati na spomenutoj koncepciji u kojoj udžbenici S. Langa imaju značajni trag. Stoga je usporedba spomenutih (i inih) srednjoškolskih udžbenika te njihova komparacija s udžbenicima Prof. Kurepe [1] i s novim kolegijem Diferencijalni i integralni račun 1 [12] od presudne važnosti za kvalitetno uvođenje pojma integrala u srednjim školama.

Članak je podijeljen u dva djela. Prvi dio odnosi se na komparaciju srednjoškolska udžbenika ([3], [4], [5], [6]), a drugi dio pokriva pristup prema knjizi S. Langa [7] i predavanjima na kolegiju Diferencijalni i integralni račun 1. Drugi dio članka bit će objavljen u idućem broju Poučka.

2. Od „klasične” definicije preko Riemannovog teorema do Newton-Leibnizove formule

Neka je dio ravnine omeđen grafom funkcije (pseudotrapez), kao na slici 1. Iako je na slici prikazan graf neke neprekidne funkcije, „klasična” definicija će u općenitosti biti dana za ograničene funkcije. Pratit ćemo notaciju i pristup koji se već godinama primjenjuje u okviru kolegija Matematička analiza 1 i 2 na PMF-Matematičkom odjelu (vidi [1], [2]). Neka je $[a,b]$, $a < b$, segment u $\mathbb{R}$ i neka $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ funkcija ograničena na segmentu $[a,b]$.



Slika 1.

To znači da postoje $m = \inf_{[a,b]} f$ i $M = \sup_{[a,b]} f$ tj. $\forall x \in [a,b]$, $m \leq f(x) \leq M$. Uočimo, ako je $[a',b'] \subseteq [a,b]$ podsegment, onda vrijedi $\forall x \in [a',b']$, $m \leq m' \leq f(x) \leq M' \leq M$, gdje je $m' = \inf_{[a',b']} f$ i $M' = \sup_{[a',b']} f$. Dakle, infimum na podsegmentu je veći ili jednak infimumu na segmentu, a supremum na podsegmentu je manji ili jednak supremumu na segmentu. Za $n \in \mathbb{N}$ podijelimo segment (izvršimo subdiviziju) $[a,b]$ točkama na n dijelova,

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_k < \cdots < x_n = b. \tag{1}$$

Označimo s $m_k = \inf_{[x_{k-1},x_k]} f$ i $M_k = \sup_{[x_{k-1},x_k]} f$, k=1,…,n. Nadalje definiramo sume:

$$s = \sum_{k=1}^{n} m_k(x_k - x_{k-1}) \tag{2}$$
$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} f(t_k)(x_k - x_{k-1}) \tag{3}$$
$$S = \sum_{k=1}^{n} M_k(x_k - x_{k-1}). \tag{4}$$

za po volji izabrane točke $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$, $k=1,\ldots,n$.

Broj s zovemo **donja Darbouxova suma**, S je **gornja Darbouxova suma**, a σ je **integralna suma**. U nastavku će nam trebati sljedeće nejednakosti

$$m(b-a) \leq s \leq \sigma \leq S \leq M(b-a). \tag{5}$$

Neka je A skup svih donjih Darbouxovih suma s, B je skup svih gornjih Darbouxovih suma S, a C je skup svih integralnih suma σ funkcije f na segmentu $[a,b]$. Sve te sume dobivaju se variranjem broja $n \in \mathbb{N}$ svim različitim izborima subdivizije (1) i točaka t_k. Iz nejednakosti (5) slijedi da su skupovi A, B, C ograničeni odozdo s $m(b-a)$ i odozgo s $M(b-a)$. Prema aksiomu potpunosti postoje

$$I_*(f;a,b) = \sup A \tag{6}$$

$$I^*(f;a,b) = \inf B \tag{7}$$

Definicija 1. *Broj I_* zovemo **donji Riemannov integral** funkcije f na segmentu $[a,b]$, a broj I^* zovemo **gornji Riemannov integral** funkcije f na segmentu $[a,b]$.*

Teorem 1. *Neka je $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ funkcija ograničena na segmentu $[a,b]$, neka su I_* i I^* donji i gornji Riemannov integral funkcije f na segmentu $[a,b]$. Tada je* $I_*(f;a,b) \leq I^*(f;a,b)$. (8)

Definicija 2. *Za funkciju $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ ograničenu na segmentu $[a,b]$ kažemo da je **integrabilna u Riemannovom smislu** ili R-integrabilna na segmentu $[a,b]$ ako je*

$$I_*(f;a,b) = I^*(f;a,b) \tag{9}$$

*Tada se broj $I = I_* = I^*$ naziva **integral** ili R-integral funkcije f na segmentu $[a,b]$ i označava jednom od sljedećih oznaka* $I = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b f$ (10)

Na taj način uveden je pojam Riemannova integrala.

Teorem 2. *Neka je* $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ *ograničena funkcija na* $[a,b]\subset\mathbb{R}$ *Funkcija f je integrabilna na* $[a,b]$ *ako i samo ako* $\forall\varepsilon>0$ *postoji subdivizija segmenta* $[a,b]$ *takva da za pripadne Darbouxove sume vrijedi* $S-s<\varepsilon$.

Sljedeći teoremi dokazuju da su monotonost i neprekidnost na segmentu svojstva koja povlače integrabilnost.

Teorem 3. *Neka je* $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ *monotona funkcija na* $[a,b]\subset\mathbb{R}$. *Tada je ona R-integrabilna na* $[a,b]$.

Definicija 3. *Za funkciju* $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ *kažemo da je monotona po dijelovima na segmentu* $[a,b]$ *ako postoji subdivizija* $a=c_0<c_1<\cdots<c_k<\cdots<c_n=b$ *takva da je* $f|_{[c_{k-1},c_k]}$ *monotona funkcija za sve k=1,...,n.*

Korolar 1. *Neka je* $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ *po dijelovima monotona funkcija na* $[a,b]\subset\mathbb{R}$. *Tada je ona R – integrabilna na* $[a,b]$.

Definicija 4. *Za funkciju* $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ *kažemo da je* ***jednoliko (uniformno) neprekidna*** *na intervalu* $\mathrm{I}\subseteq\mathbb{R}$ *ako*

$$\exists\varepsilon>0,\ \ \forall\delta>0,\forall x',x''\in I,(|x'-x''|<0)\Rightarrow(|f(x')-f(x'')|<\varepsilon).$$

Teorem 4. *Neka je* $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ *neprekidna funkcija na intervalu* $[a,b]\subset\mathbb{R}$. *Tada je ona jednoliko neprekidna na* $[a,b]$.

Sada iskazujemo Riemannov teorem o integrabilnosti neprekidne funkcije.

Teorem 5. *Neka je* $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ *neprekidna funkcija na* $[a,b]\subset\mathbb{R}$. *Tada je ona R-integrabilna na* $[a,b]$. *Također, postoji točka* $c\in[a,b]$ *takva da je* $\int_a^b f(x)dx=f(c)(b-a)$.

Bitno je istaknuti da je, uz spomenuti **Teorem 4,** u dokaz Riemannovog teorema involviran i spomenuti Bolzano-Weierstrassov teorem **i Teorem 2**.

Definicija 5. *Neka je* $\mathrm{I}\subseteq\mathbb{R}$ *otvoren interval i* $f:\mathrm{I}\to\mathbb{R}$. ***Primitivna funkcija*** *ili antiderivacija funkcije f na skupu I je svaka funkcija* $F:\mathrm{I}\to\mathbb{R}$ *sa svojstvom F´(x)=f(x),* $\forall x\in\mathrm{I}$.

Sljedeći teorem daje dovoljne uvjete za postojanje primitivne funkcije.

Teorem 6. *Neka je* $\mathrm{I}\subseteq\mathbb{R}$ *otvoren interval i* $f:\mathrm{I}\to\mathbb{R}$ *funkcija neprekidna na I. Tada postoji primitivna funkcija od f na I.*

Na osnovi Teorema 6 dokazuje se temeljni teorem Newton-Leibnizova formula.

Teorem 7. (Newton-Leibnizova formula) *Ako je f neprekidna funkcija na otvorenom intervalu I i neka je F bilo koja primitivna funkcija funkcije f na I, onda za svaki segment* $[a,b]\subset\mathrm{I}$ *vrijedi*

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a). \tag{11}$$

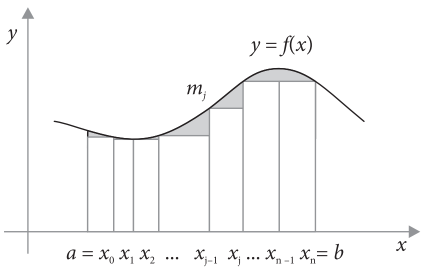
3. Problem površine i pojam određenog integrala

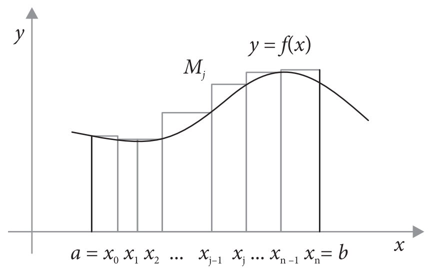
Autori srednjoškolskih udžbenika ([3], [4], [5], [6]) objašnjavaju ovaj dio gradiva na različit način. Prema [3] autor cjelinu nazvanu „*Integral i primitivna funkcija*" započinje problemom površine i određenim integralom, dok autorice udžbenika [4], [5] nastavnu cjelinu nazvanu „*Integrali*" započinju neodređenim integralom i primitivnom funkcijom. Prije nego li definiraju pojmove, motiviraju učenike zanimljivim primjerom nasukanog tankera koji ispušta naftu. Učenicima je dana formula brzine širenja naftne mrlje i od njih se traži da računanjem brzine širenja naftne mrlje i određivanjem njezine površine nakon sat vremena, dođu do spoznaja da je brzina promjene te površine zapravo derivacija traženog izraza za površinu. Autori udžbenika [6] ovaj dio gradiva dijele u dvije cjeline, započinju s površinom i određenim integralom, a zatim obrađuju neodređeni integral, u definiranju pojmova često koriste pojmove iz fizike kako bi učenicima približili ovaj dio gradiva, poput brzine, puta, vremena.

3.1. Udžbenik – Elezović

Problem mjerenja dužina, površina i obujma bio je osnovni problem matematike u njezinim začecima. Transformacijom pravokutnika ($P = ab$) možemo mjeriti površinu paralelograma, trokuta, mnogokuta. Autor naglašava složenost računanja površine bilo kojega lika omeđenog zakrivljenom krivuljom (kao na sl. 1), naglašava da nemaju svi likovi površinu te da će se on u svom udžbeniku baviti samo onim likovima koji imaju površinu. Horizontalnim i vertikalnim cijepanjem svaki takav lik, koji autor naziva **krivocrtni trapez**, možemo podijeliti na dijelove (slika 2).

Za razliku od „klasične definicije", promatrana je neprekidna i pozitivna funkcija f na intervalu $[a,b]$. Interval $[a,b]$ podijeljen je na n dijelova (koji ne moraju biti istih duljina).





Neka su djelišne točke: $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_k < \cdots < x_n = b$. Nad svakim dijelom $\left[x_{j-1}, x_j\right]$ postavimo dva pravokutnika, jedan koji leži ispod grafa funkcije i drugi koji ga premašuje. Neka su njihove visine: m_j = minimum funkcije f na intervalu $\left[x_{j-1}, x_j\right]$ i M_j = maksimum funkcije f na intervalu $\left[x_{j-1}, x_j\right]$. Koristeći pretpostavku da je funkcija neprekidna, smije koristiti Bolzano-Weierstrassov teorem i zaključiti da na svakom podsegmentu funkcija poprima minimum i maksimum. Stoga ne treba koristiti složenije pojmove infimum i supremum. Duljinu intervala označimo s $\Delta x_j = x_j - x_{j-1}$. Zbrajanjem površina ovih pravokutnika dobit ćemo **donju integralnu sumu s_n** i **gornju integralnu sumu S_n:**

$$s_n = m_1 \Delta x_1 + m_2 \Delta x_2 + \cdots + m_n \Delta x_n = \sum_{j=1}^{n} m_j \Delta x_j$$

$$S_n = M_1 \Delta x_1 + M_2 \Delta x_2 + \cdots + M_n \Delta x_n = \sum_{j=1}^{n} M_j \Delta x_j$$

Površina je uklopljena između donje i gornje sume: $\sum_{j=1}^{n} m_j \Delta x_j \leq P \leq \sum_{j=1}^{n} M_j \Delta x_j$. Uzimajući sve veći broj djelišnih točaka, donja suma se povećava, a gornja se smanjuje. Broj n teži u beskonačnost, a duljine pojedinih intervala podjele teže nuli. Koristeći se intuicijom u graničnom slučaju, donja i gornja suma imat će isti limes koji označavamo s I. Taj limes mora biti jednak površini krivocrtnog trapeza, ukoliko ona postoji. Broj I određen je samo funkcijom f i ne ovisi o načinu računanja donje i gornje sume (o načinu na koji smo podijelili interval i izabrali brojeve m_j i M_j), nazivamo ga **integralom funkcije *f*.** Autor udžbenika [3] koristi se sljedećom definicijom.

Definicija 6. *Neka je $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ pozitivna neprekidna funkcija. Zajednički limes donje i gornje sume nazivamo* ***određenim integralom*** *funkcije f i označavamo s*

$$I = \int_a^b f(x)dx .$$

On je jednak površini ispod grafa funkcije, nad intervalom $[a,b]$. *Znak* $\int$ *zovemo znakom integracije, broj a* ***donjom granicom*** *integrala, broj b* ***gornjom granicom*** *integrala, funkciju f* ***podintegralnom funkcijom,*** *a dx naziva se* ***diferencijal*** *varijable x.*

Diferencijal dx zamišljamo kao beskonačno mali prirast Δx, kad duljina intervala $\left[x_{j-1}, x_j\right]$ teži u nulu. Tada se vrijednosti m_j i M_j približavaju funkcijskoj vrijednosti u točki $x \in \left[x_{j-1}, x_j\right]$.

3.2. Udžbenik - Antoliš, Copić, Antončić

Autorice udžbenika [4], [5] površinu P ispod grafa pozitivne i neprekidne funkcije f računaju na intervalu [a,b] koji je podijeljen na n jednakih dijelova. Radi jednostavnosti, umjesto opisanih i upisanih pravokutnika nad malim intervalom $\left[x_{j-1}, x_j\right]$, promatraju pravokutnike visine $f(t_j)$ uklopljene između upisanih i opisanih pravokutnika, gdje je t_j proizvoljna točka na intervalu $\left[x_{j-1}, x_j\right]$. Površina j-tog pravokutnika je $P_j = f(t_j)\Delta x$, gdje je Δx duljina intervala $\left[x_{j-1}, x_j\right]$. Budući da je interval $[a,b]$ podijeljen na n jednakih dijelova, duljina svakog dobivenog intervala je $\Delta x = \frac{b-a}{n}$, a $P_j = f(t_j)\frac{b-a}{n}$. Suma površina svih n takvih pravokutnika iznosi:

$$S_n = f(t_1)\frac{b-a}{n} + f(t_2)\frac{b-a}{n} + \cdots + f(t_n)\frac{b-a}{n} = \frac{b-a}{n}(f(t_1) + \cdots + f(t_n)) = \frac{b-a}{n}\sum_{j=1}^{n} f(t_j).$$

Ovu sumu autorice zovu **integralna suma funkcije *f*** na intervalu $[a,b]$. Ona će nam dati jednu aproksimaciju površine ispod grafa funkcije f.

Za dovoljno veliki broj n imamo mnogo vrlo uskih pravokutnika čija se unija vrlo malo razlikuje od tražene površine P. Intuitivno je jasno da će za svaku podjelu segmenta $[a, b]$ na n jednakih dijelova i po volji odabranu točku t_j iz intervala $\left[x_{j-1}, x_j\right]$, integralna suma aproksimirati površinu P te da tako dobiveni niz integralnih suma (S_n) teži prema površini P. Površina ispod grafa funkcije u tom se slučaju prirodno definira kao broj

$$P = \lim_{n \to 0}\left[\frac{b-a}{n}(f(t_1) + \cdots + f(t_n))\right].$$

Integralnu sumu možemo računati i za proizvoljnu neprekidnu funkciju na $[a,b]$, bez uvjeta da je funkcija pozitivna, stoga autorice koriste sljedeću definiciju.

Definicija 7. *Limes niza integralnih suma zove se* ***određeni integral*** *neprekidne funkcije f na intervalu* $[a, b]$ *i označava se s* $\int_a^b f(x)dx$. *Broj a je* ***donja granica****, a broj b* ***gornja granica*** *integrala.*

Upravo je tako *Isaac Newton* definirao određeni integral te tako postavio temelje za razvoj integralnog računa.

3.3. Udžbenik - Kraljević, Šikić

Autori [6] promatraju pozitivnu i neprekidnu funkciju, njihova definicija integrala ima smisla i kada f poprima negativne vrijednosti. Nastavnu cjelinu nazvanu „*Integral funkcije na segmentu*" obrađuju na sljedeći način.

Površina ispod grafa pozitivne funkcije $y = f(x)$ i iznad segmenta $[a, b]$ aproksimirana je donjim i gornjim sumama. **Donja suma** za funkciju f na segmentu $[a, b]$ vrijednost je $D = \sum_{i=1}^{n} d_i \Delta x_i$, gdje su visine $d_i \leq f(x)$ za svaki $x \in \left[x_{j-1}, x_j\right]$. **Gornja suma** za funkciju f na $[a, b]$ je vrijednost $G = \sum_{i=1}^{n} g_i \Delta x_i$, gdje je $g_i \geq f(x)$ za svaki $x \in \left[x_{j-1}, x_j\right]$.

Površina koju želimo aproksimirati za funkciju f na $[a, b]$ nužno je veća (ili jednaka) od svih donjih suma i manja (ili jednaka) od svih gornjih suma. Za računanje površine nužno je postojanje donje i gornje sume za funkciju f na $[a, b]$, koje se po volji malo razlikuju.

Tada za svaku donju i gornju sumu funkcije *f* na [*a, b*] postoji jedinstveni broj *I* sa svojstvom $D \le I \le G$. Taj je broj površina promatranog područja i njegova je definicija potpuno neovisna o interpretaciji donjih i gornjih suma kao aproksimativnih površina. Broj *I* potpuno je određen funkcijom *f*(*x*) i segmentom [*a*,*b*] i zove se **integralom funkcije** *f* na segmentu [*a*,*b*], $I = \int_a^b f(x)dx$.

Autori [6] koriste se sljedećom definicijom.

Definicija 8. *Ako postoji točno jedan broj koji sve donje sume za f na* [*a*,*b*] *razdvaja od svih gornjih suma za f na* [*a*,*b*], *taj je broj* ***određeni integral*** *od f na* [*a*,*b*].

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

Ako postoji integral funkcije *f* na segmentu [*a*,*b*], onda kažemo da je funkcija *f* integrabilna na segmentu [*a*,*b*]. Dakle, svaka funkcija ne mora biti integrabilna. Definicija integrala ima smisla i ako funkcija *f* poprima negativne vrijednosti.

Jedinstvena vrijednost $I = \int_a^b f(x)dx$, smještena između svih donjih i svih gornjih suma za *f* na [*a*,*b*], u tom slučaju predstavlja **relativnu površinu** područja između grafa funkcije *f* i osi *x*. **Relativna površina** takvog područja površina je dijela tog područja iznad osi x umanjena za površinu dijela područja ispod osi x.

4. Primitivna funkcija. Newton-Leibnizova formula

4.1. Udžbenik - Elezović

Ovaj dio gradiva autor [3] je podijelio u tri manje nastavne jedinice i objašnjava ga na sljedeći način: Neka je *f* proizvoljna neprekidna funkcija. Neka je $P(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)dt$.

Za pozitivne funkcije *f*, *P*(*x*) označava površinu ispod grafa funkcije *f*, a nad intervalom $\left[x_0, x\right]$. Prirast $\Delta P = P(x + \Delta x) - P(x)$ jednak je površini krivocrtnog trapeza nad intervalom $\left[x, x + \Delta x\right]$: $P(x) = \int_{x}^{x+\Delta x} f(t)dt$.

Radi jednostavnosti pretpostavimo da je funkcija na tom malom intervalu rastuća (slično bismo zaključivali da je ona padajuća). Površina ΔP uklopljena je između vrijednosti dvaju pravokutnika, s visinama *f*(*x*) i $f(x + \Delta x)$ i vrijedi $f(x)\Delta x \le \Delta P \le f(x + \Delta x)\Delta x$ pa je $f(x) \le \frac{\Delta P}{\Delta x} \le f(x + \Delta x)$.

Neka Δx teži nuli. Tada $f(x + \Delta x)$ teži k *f*(*x*) zbog neprekidnosti od *f*. Stoga je

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta P}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P(x + \Delta x) - P(x)}{\Delta x} = f(x).$$

Definicija 9. *Derivacija određenog integrala, vrijedi formula*

$$\frac{d}{dx}\int_{x_0}^{x} f(t)dt = f(x).$$

Derivacija određenog integrala, kojemu je x gornja granica, jednaka je podintegralnoj funkciji.

Autor ističe da će ova formula predstavljati temeljnu sponu između diferencijalnog i integralnog računa.

Definicija 10. *Primitivna funkcija funkcije f definirane na intervalu* $\langle a,b\rangle$ *je funkcija F definirana na istom intervalu sa svojstvom* $F'(x)=f(x)$. *Ako su F i G primitivne funkcije iste funkcije f, onda se one razlikuju za konstantu: F(x) = G(x) + C.*

Teorem 10. (Newton-Leibnizova formula)

Ako je F proizvoljna primitivna funkcija funkcije f na intervalu [*a*, *b*], *onda vrijedi*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Dokaz: Označimo s G funkciju: $G(x) = \int_a^x f(x)dx$, $a \le x \le b$.

Kako je $G'(x) = f(x)$ za $a < x < b$, ova je funkcija primitivna za funkciju f. Neka je F proizvoljna primitivna funkcija iste funkcije f. Onda se F i G razlikuju za konstantu, pa vrijedi, za svaki x: $G(x) = \int_a^x f(x)dx = F(x) - C$. Uvrstimo sada za gornju granicu, najprije $x = a$, zatim $x = b$ $G(x) = \int_a^a f(t)dt = 0 = F(a) - C$. Slijedi da je *F(a)=C.*

$$G(b) = \int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a).$$

Definicija 11. *Neka je f po volji odabrana funkcija, a F neka njezina primitivna funkcija. Skup svih primitivnih funkcija funkcije f nazivamo* ***neodređenim integralom*** *funkcije f i označavamo ovako:* $\int f(x)dx = \{F + C : C \in \mathbb{R}\}$.

Po dogovoru koristimo jednostavniji zapis $\int f(x)dx = F(x) + C$.

4.2. Udžbenik - Antoliš, Copić, Antončić

Nastavnu cjelinu „*Integrali*" autorice [4], [5] započinju definiranjem primitivne funkcije i neodređenog integrala, u nastavku definiraju određeni integral, a završavaju povezujući pojmove Newton-Leibnizovom formulom.

Neka je $f:\langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$ neka funkcija. Tada svaku funkciju F za koju vrijedi $F'(x) = f(x)$ nazivamo **primitivna funkcija** ili antiderivacija funkcije f. Skup svih primitivnih funkcija dane funkcije f zove se **neodređeni integral** funkcije f na intervalu $\langle a,b\rangle$ i označavamo $\int f(x)dx = F(x)+C$, $\quad C\in\mathbb{R}$.

Teorem 9. (Newton-Leibnizova formula)

Neka je f neprekidna funkcija na intervalu $[a,b]$. *Tada vrijedi:*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a),$$

gdje je F primitivna funkcija za funkciju f.

Dokaz ovoga teorema uključen je u udžbenik za prirodoslovno-matematički program, dok se izostavlja u programu za opće, jezične i klasične gimnazije. S obzirom da autorice u definiciji određenog integrala koriste ekvidistantnu subdiviziju, dokaz ovog teorema je matematički korektan.

4.3. Udžbenik - Kraljević, Šikić

Autori [6] uz pomoć fizikalnih veličina poput vremena, brzine i puta objašnjavaju učenicima najvažniju formulu integralnog računa na sljedeći način.

Ako put s ovisi o vremenu t tako da je $s = f(t)$ onda derivacija funkcije $f(t)$ opisuje kako brzina ovisi o vremenu, $v = f'(t) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}$, pa slijedi da je

$$v = f'(t) = \frac{\Delta s}{\Delta t} \Rightarrow \Delta s \approx f'(t)\Delta t.$$

Ta približna vrijednost postaje točnom na nekom intervalu ako je derivacija $v = f'(t)$ konstantna na tom intervalu. Promotrimo gibanje od trenutka $t = a$ do trenutka $t = b$, koje na intervalu $[a,t_1\rangle = [t_0,t_1\rangle$ ima konstantnu brzinu v_1 i tako dalje sve od posljednjeg intervala $[t_{n-1},t_n] = [t_{n-1},b]$ na kojemu ima konstantnu brzinu v_n.

U vremenu $\Delta t_1 = t_1 - t_0$ prijeđen je put $\Delta s_1 = v_1\Delta t_1, \ldots,$ u vremenu $\Delta t_n = t_n - t_{n-1}$ prijeđen je put $\Delta s_n = v_n\Delta t_n$.

Ukupan put prevaljen od trenutka $t = a$ do trenutka $t = b$ iznosi $f(b)-f(a) = \sum_{j=1}^{n} v_j\Delta t_j$. Taj je iznos jednak površini područja ispod grafa od $v = f'(t)$. Funkcija $v = f'(t)$ najčešće nije po dijelovima konstantna nego se kontinuirano mijenja sa t. Razdijelimo segment $[a,b]$ na n dijelova diobenim točkama $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ pa odredimo konstantne brzine d_j i g_j tako da bude $d_j \le f'(x) \le g_j$ za $t\in\langle t_{j-1},t_j\rangle$. Budući da se većom brzinom u istom vremenu prevaljuje veći put, zaključujemo da će put Δs_j prevaljen u vremenu Δt_j biti veći (ili jednak) od $d_j\Delta t_j$ i manji (ili jednak) $g_j\Delta t_j$. Dakle, ukupan put prijeđen od trenutka $t = a$ do trenutka $t = b$ zadovoljavat će nejednakost

$$\sum_{j=1}^{n} d_j\,\Delta t_j \le f(b)-f(a) \le \sum_{j=1}^{n} g_j\,\Delta t_j.$$

Površina $\sum_{j=1}^{n} d_j \Delta t_j$ donja je suma za $f'(t)$ na $[a,b]$. Površina $\sum_{j=1}^{n} g_j \Delta t_j$ gornja je suma za $f'(t)$ na $[a,b]$. Ako je $f'(t)$ integrabilna funkcija na $[a,b]$, tada je $f(b)-f(a)$ jedinstvena vrijednost smještena između svih donjih i svih gornjih suma za $f'(t)$ na $[a, b]$, tj. $f(b)-f(a)=\int_a^b f(t)dt$.

Ista formula vrijedi i kada razmatramo gibanja s negativnim brzinama i ona se naziva **Newton-Leibnizova formula**.

Teorem 10. $F(x)\Big|_a^b = \int_a^b f(x)dx$

gdje je F antiderivacija funkcije f (primitivna funkcija), tj. F'(x) = f(x).

Budući da se antiderivacija funkcije $f(x)$ koristi za računanje njezinog integrala, ona se sinonimno zove **neodređeni integral** funkcije i označava se s $F(x)=\int f(x)dx$.

Literatura

[1] S. Kurepa: Matematička analiza I i II, Zagreb, Školska knjiga (1997)

[2] B. Guljaš: Matematička analiza I i II, Zagreb, (2008), str.121 - str. 150.

[3] N. Elezović: Matematika 4, udžbenik za 4. razred gimnazije, Zagreb, Element (2002), str. 287- str. 318.

[4] S. Antoliš, A. Copić: Matematika 4, udžbenik za prirodoslovno-matematičku gimnaziju, Zagreb, Školska knjiga (2007), str.177. - str. 227.

[5] S. Antoliš, A. Copić, N. Antončić: Matematika 4, udžbenik za opće, jezične i klasične gimnazije, Zagreb, Školska knjiga (2008), str. 93. - str. 139.

[6] H. Kraljević, Z. Šikić: Matematika 4, udžbenik za 4. razred gimnazija i tehničkih škola, Zagreb, Profil (1995), str. 109. - str. 215.

[7] S. Lang: A first Course in Calculus, 5th ed, Springer (1986), str. 227 - str. 423.

[8] Crnjac, Jukić, Scitovski : Matematika, Osijek (1994), str. 228 - str. 283.

[9] N. Uglešić: Matematička analiza I, Split (2000), str. 128 - str. 165.

[10] L. Krnić, Z. Šikić: Račun - diferencijalni i integralni, I. dio, Zagreb, Školska knjiga (1992)

[11] *Nacionalni okvirni kurikulum, Matematičko područje*; www.matematika.hr/kurikulum

[12] *Difrencijalni i integralni račun 1;* www.math.hr/Default.aspx?art=1757