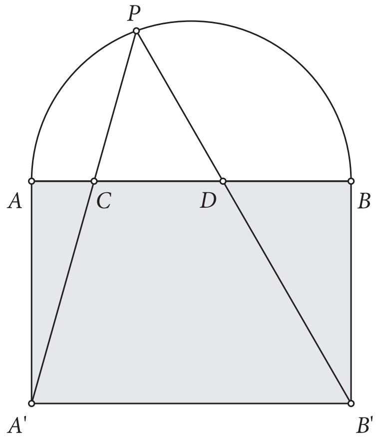
O Fermatovom geometrijskom problemu

Zvonko Čerin[1]

Sažetak. Poznatom francuskom matematičaru Pierreu de Fermatu pripisuje se geometrijski problem u kojemu se za točke na polukružnici nad stranicom specijalnog pravokutnika kao dijametrom tvrdi da je zbroj kvadrata dviju dužina jednak kvadratu te stranice. Nedavno su Hanjš i Volenec primijetili da to isto svojstvo vrijedi i za sve točke kružnice nad tom stranicom pravokutnika kao dijametrom. Naš je zadatak u ovom članku cjelovitije istražiti svojstva ove zanimljive geometrijsko-dinamičke konfiguracije. U njoj mnogi drugi odnosi i veličine ostaju nepromijenjeni pri kretanju točke po kružnici. Dokazi se uglavnom provode analitičkom geometrijom, a pojedini dijelovi i čisto geometrijski.

1. Uvod

U jednom je pismu slavni francuski matematičar Pierre de Fermat (1601.-1665.) postavio sljedeći geometrijski problem koji je privukao pažnju njegovih suvremenika (vidi Sliku 1.).



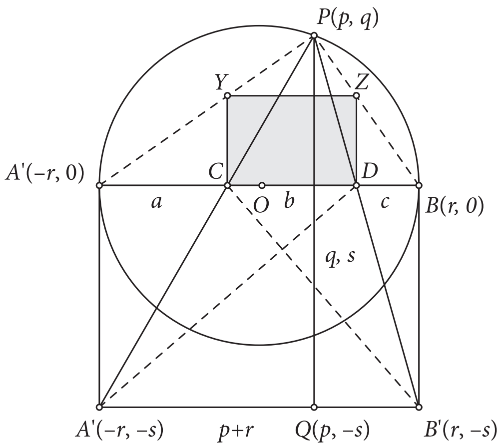
Slika 1. Fermatov problem za polukružnicu

[1]Zvonko Čerin, PMF-Matematički odsjek Sveučilišta u Zagrebu

Fermatov problem za polukružnicu. Neka je P točka na polukružnici kojoj je gornja stranica $\overline{AB}$ pravokutnika $ABB'A'$ dijametar. Neka je $\frac{|AB|}{|AA'|} = \sqrt{2}$. Ako segmenti $\overline{PA'}$ i $\overline{PB'}$ sijeku stranicu $\overline{AB}$ u točkama C i D, onda je $|AD|^2 + |BC|^2 = |AB|^2$.

Prema mišljenju mnogih znanstvenika, najveći od svih matematičara, Leonhard Euler, u članku [3] gotovo je cijelo jedno stoljeće kasnije dao prvi dokaz Fermatovog problema za polukružnicu. On je dugačak, staromodan (za ono vrijeme), čisto geometrijski i izbjegava analitičku geometriju (u kojoj je dokaz jednostavan). Takav jedan dokaz nedavno su nam ponovno predstavili Željko Hanjš i Vladimir Volenec u [6]. Oni usput primjećuju da gornja jednakost $|AD|^2 + |BC|^2 = |AB|^2$ vrijedi za sve točke na kružnici kojoj je stranica $\overline{AB}$ dijametar.

Da bismo dobili nešto bolji rezultat za tu kružnicu, mi promatramo malo općenitiju situaciju kada omjer $\frac{|AB|}{|AA'|}$ nije $\sqrt{2}$, nego neki bilo kakav pozitivni realan broj m. Zapravo ćemo tražiti za koju vrijednost broja m pojedini odnosi u promatranoj konfiguraciji ne ovise o položaju točke P.



Slika 2. Fermatov prošireni problem za kružnicu

Za četiri točke P_1, P_2, P_3 i P_4 u ravnini, definirajmo funkciju φ pravilom

$$\varphi(P_1P_2, P_3P_4) = \frac{|P_1P_2|^2 + |P_3P_4|^2}{|AB|^2}.$$

S takvim oznakama, gornji Fermatov problem za kružnicu zapravo je implikacija $(a) \Rightarrow (b)$ u sljedećem teoremu (vidi Sliku 2.).

Teorem 1. Sljedeće su dvije tvrdnje ekvivalentne:

(a) Omjer $m=\dfrac{|AB|}{|AA'|}$ duljina stranica pravokutnika *ABB'A'* je $\sqrt{2}$.

(b) $\varphi(AD,BC)=1$

Dokaz. Da bi dokaz bio jednostavan, koristimo se analitičkom geometrijom. Neka je ishodište pravokutnog koordinatnog sustava polovište *O* stranice $\overline{AB}$ tako da točke *A* i *B* imaju koordinate $(-r,\ 0)$ i $(r,\ 0)$ za neki pozitivan realan broj *r* (radijus promatrane kružnice). Njezina jednadžba je standardna: $x^2+y^2=r^2$.

Neka je $s=\dfrac{2r}{m}$.

Koordinate točaka *A*, *B*, *A'* i *B'* su $(-r,\ 0)$, $(r,\ 0)$, $(-r,\ -s)$ i $(r,\ -s)$. Za bilo koji realan broj *t*, neka je $u=1-t^2$, $v=1+t^2$, $z=m\,t$, $\mu=v-z$ i $\xi=v+z$. Proizvoljna točka *P* kružnice ima koordinate $(p,\ q)$, gdje je $p=\dfrac{ru}{v}$ i $q=\dfrac{2rt}{v}$. Iz sličnih pravokutnih trokuta *PVC* i *PQA'* vidimo da je $p-\dfrac{q(p+r)}{q+s}=\dfrac{ps-qr}{q+s}=\dfrac{r(u-z)}{\xi}$ apscisa točke *C*. Slično je $D=\left(\dfrac{r(u+z)}{\xi},0\right)$. Ekvivalentnost tvrdnji (a) i (b) slijedi iz jednakosti $\varphi(AD,BC)-1=\dfrac{t^2(m^2-2)}{\xi^2}$.

Za implikaciju $(a)\Rightarrow(b)$, osim Eulerovog, danas znamo još nekoliko kratkih, čisto geometrijskih dokaza (vidi [7], [4, str. 602, 603], [1, str. 168, 169] i [5, str. 181, 264]). Navodimo prilagodbu Lionnetovog dokaza iz [4, str. 602] koja vrijedi za sve točke kružnice (vidi Sliku 2.).

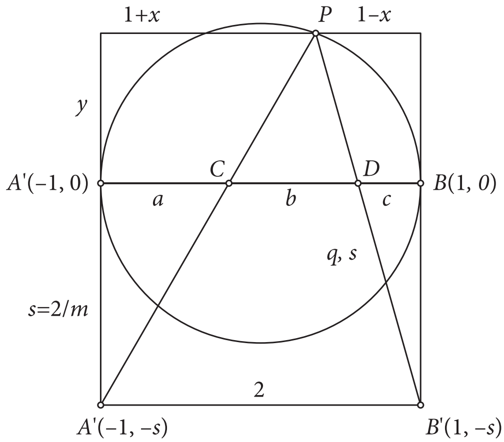
Neka su duljine usmjerenih dužina $\overline{AC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DB}$ označene redom s *a*, *b*, *c*. Onda je $|AD|^2+|BC|^2-|AB|^2=(a+b)^2+(b+c)^2-(a+b+c)^2=b^2-2ac$ pa je zato

$$|AD|^2+|BC|^2=|AB|^2$$
$$b^2=2ac \tag{1}$$

Nacrtajmo sada *CY* i *DZ* okomito na *AB*, tako da je *Y* na *PA* i *Z* na *PB*. Koristeći parove sličnih trokuta, vidimo da je

$$\frac{|YC|}{|AA'|}=\frac{|PC|}{|PA'|}=\frac{|CD|}{|A'B'|}=\frac{|PD|}{|PB'|}=\frac{|ZD|}{|BB'|}.$$

Zato su pravokutnici *YCDZ* i *AA'B'B* slični. Trokuti *YCA* i *BDZ* imaju iste kutove, pa je $\dfrac{|YC|}{a}=\dfrac{c}{|DZ|}$. Ali, $|YC|=|DZ|=\dfrac{|CD|}{\sqrt{2}}=\dfrac{b}{\sqrt{2}}$, pa slijedi $b^2=2ac$. Iz (1) imamo napokon $|AD|^2+|BC|^2=|AB|^2$.



Slika 3. Jednostavan analitički dokaz Teorema 1

Ekvivalenciju (1) možemo iskoristiti za još jedan analitički dokaz Teorema 1 (vidi Sliku 3.). Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je radijus kružnice mjera duljine (tj. r = 1). Iz sličnih trokuta, $\frac{a}{s}=\frac{1+x}{s+y}$, $\frac{b}{y}=\frac{2}{s+y}$, $\frac{c}{s}=\frac{1-x}{s+y}$, gdje je $s=\frac{2}{m}$. Ako sredimo razliku $b^2=2ac$ i stavimo $x^2=1-y^2$, vidimo da je ona jednaka $\frac{4y^2(m^2-2)}{(2+my)^2}$.

Neka su *A"*, *B"*, *P'* refleksije točaka *A'*, *B'*, *P* u pravcu *AB*. Ovaj uvod završavamo napomenom da većina naših rezultata dolazi u pridruženim parovima. Druga verzija, za koju nije potreban nikakav poseban dokaz, dolazi (na primjer, u Teoremu 1) zamjenom točaka *C* i *D* točkama *C'* i *D'*, koje su presjeci pravca *AB* s pravcima *PA"* (i/ili *P'A'*) odnosno *PB"* (i/ili *P'B'*).

2. Invarijante Fermatove konfiguracije

Sada kada smo malo proširili zadnju tvrdnju iz članka [6], dodavanjem tvrdnje (c) (da je $\varphi(AD',BC')=1$), kao i njihovih obrata (tj. da (b) ⇒ (a) i (c) ⇒ (a)), idemo dalje proučavati ovu zanimljivu geometrijsko-dinamičku konfiguraciju. Želimo otkriti što je moguće više tvrdnji sličnih tvrdnjama (b) i (c) koje bi se mogle ravnopravno pojaviti u Teoremu 1. Drugačije kazano, istražujemo koje druge relacije i odnosi u Fermatovoj proširenoj konfiguraciji za kružnicu ostaju nepromijenjene (invarijantne) kada točka *P* mijenja položaj na kružnici.

Započinjemo s dijagonalama trapeza *A'B'DC* i stranicama trapeza *A'B'C'D'* (kad je točka *P* iznad stranice $\overline{AB}$).

(d) $\varphi(A'D,B'C)=\varphi(A'E,B'F)=2$.

Dokaz tvrdnje (d). Lako se provjeri da je $2-\varphi(A'D,B'C)=\dfrac{(m^2-2)v(v+2z)}{m^2\xi^2}$.

Može se očekivati da će Pitagorin teorem biti koristan za izračunavanje funkcije φ. Na primjer, za $\zeta=\varphi(A'D,B'C)$ imamo

$$|A'D|^2+|B'C|^2=|AA'|^2+|BB'|^2+|AD|^2+|BC|^2 .$$

Ali, $|AA'|^2+|BB'|^2=|AB|^2$ i $|AD|^2+|BC|^2=|AB|^2$.

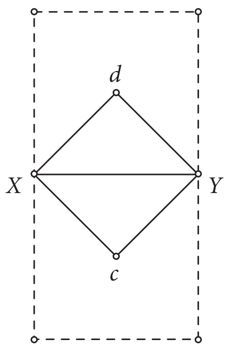
Dakle, $\zeta=2$.

Tom metodom mogu se dobiti ovakva poopćenja: uzmimo točke A_*, B_*, C_*, D_* takve da za vektore i realne brojeve λ i μ vrijedi:

$$|\mathbf{AA_*}|=\lambda\,|\mathbf{AA'}|,\ |\mathbf{BB_*}|=\lambda\,|\mathbf{BB'}|,\ |\mathbf{BC_*}|=\mu\,|\mathbf{BC}|,\ |\mathbf{AD_*}|=\mu\,|\mathbf{AD}|.$$

Onda je

$$\varphi(\mathrm{A_*D_*},B_*C_*)=\lambda^2+\mu^2 .$$



Slika 4. Dva središta kvadrata na dužini $\overline{XY}$

Za različite točke *X* i *Y*, neka $X\oplus Y$ označava središte kvadrata podignutog na dužini $\overline{XY}$ tako da trokut $X(X\oplus Y)Y$ ima pozitivnu orijentaciju (suprotnu smjeru kazaljke na satu). Ako je točka $X\oplus Y$ označena kao *M*, onda je M^* oznaka za točku $Y\oplus X$ (vidi Sliku 4.).

Polovišta *G*, *H*, *G'*, *H'* segmenata $\overline{AC}$, $\overline{BD}$, $\overline{AC'}$, $\overline{BD'}$ i vrh *N* polukružnice nad stranicom $\overline{AB}$ koristimo u sljedeće dvije tvrdnje. Drugačije iskazano, $N=B\oplus A=(0,r)$. Središte *O* kružnice (tj. polovište segmenta $\overline{AB}$ i/ili ishodište našeg koordinatnog sustava) pojavljuje se u tvrdnji (f).

(e) $\varphi(NG,NH)=\varphi(NG',NH')=\dfrac{3}{4}$.

(f) $\varphi(OG,OH)=\varphi(OG',OH')=\frac{1}{4}$.

Dokaz tvrdnje (e) i (f): Razlike $\varphi(NG,NH)-\frac{3}{4}$ i $\varphi(OG,OH)-\frac{1}{4}$ ovaj se put pojednostavljuju do kvocijenta $\frac{t^2(m^2-2)}{4\xi^2}$ koji u brojniku opet sadrži faktor m^2-2. Sljedeći geometrijski dokaz pokazuje da tvrdnje (a) i (b) zajedno povlače (e) i (f).

Dilatacija sa središtem u točki A i faktorom 2 preslikava $\overline{GO}$ na $\overline{CB}$, pa je $|GO|=\frac{|CB|}{2}$; slično je $|OH|=\frac{|AD|}{2}$. Dakle, za $\varphi(OG,OH)$ imamo da je $|OG|^2+|OH|^2=\frac{|BC|^2}{4}+\frac{|AD|^2}{4}=\frac{1}{4}|AB|^2$. Slično, za $\varphi(NG,NH)$ dobivamo da je $|NG|^2=|NO|^2+|OG|^2$ i $|NH|^2=|NO|^2+|OH|^2$, pa je ovaj puta

$$|NG|^2+|NH|^2=2|NO|^2+\frac{|BC|^2+|AD|^2}{4}=\frac{|AB|^2}{2}+\frac{|AB|^2}{4}=\frac{3}{4}|AB|^2.$$

Neka su G_S, H_S, G'_S, H'_S točke koje dijele segmente $\overline{NG}$, $\overline{NH}$, $\overline{NG'}$, $\overline{NH'}$ u istom omjeru $s\neq -1$ (tj. $|NG_S|:|G_SG|=s:1$, itd.).

(g) $\varphi(OG_S,OH_S)=\varphi(OG'_S,OH'_S)=\frac{s^2+2}{4(s+1)^2}$.

(h) $\varphi(NG_S,NH_S)=\varphi(NG'_S,NH'_S)=\frac{3s^2}{4(s+1)^2}$.

Dokaz tvrdnje (g): Budući da je $G_S=\left(\frac{-rst(m+t)}{(s+1)\xi},\frac{r}{s+1}\right)$ i $H_S=\left(\frac{-rs(1+z)}{(s+1)\xi},\frac{r}{s+1}\right)$, imamo da je $\varphi(OG_S,OH_S)-\frac{s^2+2}{4(s+1)^2}=\frac{s^2t^2(m^2-2)}{4(s+1)^2\xi^2}$.

Neka su N_1, N_2, N_3 i N_4 najviše točke polukružnica podignutih na segmentima $\overline{AC}$, $\overline{BD}$, $\overline{AE}$ i $\overline{BF}$ iznad pravca AB. Drugačije rečeno, neka je $N_1=C\oplus A$, $N_2=B\oplus D$, $N_3=C'\oplus A$ i $N_4=B\oplus D'$.

(i) $\varphi(BN_1,AN_2)=\varphi(BN_3,AN_4)=\frac{3}{2}$.

(j) $\varphi(NN_1,NN_2)=\varphi(NN_3,NN_4)=\frac{1}{2}$.

Dokaz tvrdnje (i) i (j): Iz $G_1=\left(\frac{-rt(m+t)}{\xi},\frac{r}{\xi}\right)$ i $G_2=\left(\frac{r(1+z)}{\xi},\frac{rt^2}{\xi}\right)$ imamo da je $\varphi(BN_1,AN_2)-\frac{3}{2}=\varphi(NN_1,NN_2)-\frac{1}{2}=\frac{t^2(m^2-2)}{2\xi^2}$.

Geometrijski dokaz implikacije (a) ⇒ (i) koristi pravokutne trokute AHN_2 i BGN_1 da dobijemo jednakosti $\left|AN_2\right|^2 = \left(a+b+\frac{c}{2}\right)^2 + \frac{c^2}{4}$ i $\left|BN_1\right|^2 = \left(\frac{a}{2}+b+c\right)^2 + \frac{a^2}{4}$. Sada iz $b^2 = 2ac$ slijedi da je $\left|AN_2\right|^2 + \left|BN_1\right|^2 = \frac{3}{2}\left|AB\right|^2$.

Neka je $a' = \frac{a}{\sqrt{2}}$, itd... (a) ⇒ (j). Iz istokračnih pravokutnih trokuta ABN, ACN_1, BDN_2 dobivamo $\left|NN_1\right|^2 = (b'+c')^2$ i $\left|NN_2\right|^2 = (a'+b')^2$. Opet nam jednakost $b^2 = 2ac$ daje $\left|NN_1\right|^2 + \left|NN_2\right|^2 = \frac{1}{2}\left|AB\right|^2$.

Sljedeća grupa tvrdnji također koristi vrhove N_1, N_2, N_3 i N_4, ali u njima nema funkcije φ.

(k) $|N_1N_2| = |N_3N_4| = |AN|$.

(l) $|N_1N_2| = |N_3N_4|$.

(m) $|N_1N_2|^2 + |N_2N_3|^2 + |N_3N_4|^2 + |N_4N_1|^2 = 2|AB|^2$.

Dokaz tvrdnje (k) i (m): Razlika $|N_1N_2|^2 - |AN|^2$ jednaka je $\frac{2r^2t^2(m^2-2)}{\xi^2}$. Budući da su koordinate točaka N_3 i N_4 jednake $\left(\frac{rt(m-t)}{\eta}, \frac{r}{\eta}\right)$ i $\left(\frac{r(1-z)}{\eta}, \frac{rt^2}{\eta}\right)$, vidimo da je suma $|N_1N_2|^2 + |N_2N_3|^2 + |N_3N_4|^2 + |N_4N_1|^2 - 2|AB|^2$ jednaka kvocijentu $\frac{8r^2t^2(m^2-2)(v^2+z^2)}{\eta^2\xi^2}$.

Ako se $\overline{BC}$ ortogonalno projicira na AN, dobiva se $\overline{NN_1}$, pa je njegova duljina $\frac{|BC|}{\sqrt{2}}$. Slično je $|NN_2| = \frac{|AD|}{\sqrt{2}}$. Četvrti vrh pravokutnika sa stranicama $\overline{NN_1}$ i $\overline{NN_2}$ je točka M_1 koja se pojavljuje kasnije u članku. Dakle, $|NM_1| = |NN_1| = |AN|$, što dokazuje (q) niže.

Primijetimo da je $|N_1N^*_2|^2 + |N^*_2N^*_3|^2 + |N^*_3N_4|^2 + |N_4N_1|^2 = 2|AB|^2$ onda i samo onda ako je $m = 1$. Dakle, nema samo omjer $m = \sqrt{2}$ neko geometrijsko značenje, nego se mogu pojaviti i drugi omjeri.

Neka je $N_5 = A \oplus D$, $N_6 = C \oplus B$, $N_7 = A \oplus D'$ i $N_8 = C' \oplus B$.

(n) $\varphi(AN_5, BN_6) = \varphi(AN_7, BN_8) = \frac{1}{2}$.

(o) $\varphi(GN_6, HN_5) = \varphi(G'N_8, H'N_7) = \frac{3}{2}$.

(p) $\varphi(NN_5, NN_6) = \varphi(NN_7, NN_8) = \dfrac{3}{2}$.

Dva dokaza tvrdnje (n): Budući da je $N_5 = \left(\dfrac{-rt^2}{\xi}, \dfrac{-r(1+z)}{\xi}\right)$ i $N_6 = \left(\dfrac{r}{\xi}, \dfrac{-rt(m+t)}{\xi}\right)$, dobiva se $\varphi(AN_5, BN_6) - \dfrac{1}{2} = \dfrac{t^2(m^2-2)}{2\xi^2}$ i $\varphi(G_S N_6, H_S N_5) = \dfrac{3((s+1)^2+1)}{4(s+1)^2}$.

Iz jednakokračnih pravokutnih trokuta ADN_5 i BCN_6 slijedi da je

$$|AN_5|^2 + |BN_6|^2 = \frac{|AD|^2}{2} + \frac{|BC|^2}{2} = \frac{1}{2}|AB|^2 .$$

U sljedećih šest tvrdnji koristimo središta kvadrata podignutih na segmentima $\overline{CD}$ i $\overline{C'D'}$. Neka je $M_1 = C \oplus D$ i $M_2 = C' \oplus D'$.

(q)) $|NM_1| = |NM_2| = |AN|$.

Drugi dokaz tvrdnje (q): Budući da je $M_1 = \left(\dfrac{ru}{\xi}, \dfrac{-rz}{\xi}\right)$, razlika $|M_1N|^2 - |AN|^2$ je $\dfrac{2r^2t^2(m^2-2)}{\eta^2\xi^2}$. Slično, $|M_2N|^2 - |M_1N|^2 = \dfrac{8r^2t^2vz(m^2-2)}{\eta^2\xi^2}$. Iz pravokutnog trokuta NN_1M_1, jer je $\dfrac{b^2}{2} = ac$, vidimo da je $|NM_1|^2 = (a' + b')^2 + (b' + c')^2 = a'^2 + b'^2 + c'^2 + a'b' + b'c' = (a' + b' + c')^2 = |NA|^2$. Ista metoda može se primijeniti i za dokaz sljedeće tvrdnje.

(r) $\varphi(M_1N_1, M_1N_2) = \varphi(M_2N_3, M_2N_4) = \dfrac{1}{2}$.

Za bilo koju točku X u ravnini, neka su G_1, G_2, G_3, G_4, G_5, i G_6 težišta trokuta ACX, CDX, DBX, $AC'X$, $C'D'X$ i $BD'X$.

(s) $\varphi(G_2G_1, G_2G_3) = \varphi(G_5G_4, G_5G_6) = \dfrac{1}{9}$.

Dokaz tvrdnje (s): Ako točka X ima koordinate (x, y), onda težišta G_1, G_2 i G_3 imaju iste ordinate $\dfrac{y}{3}$, dok su njihove apscise redom $\dfrac{x}{3} - \dfrac{2rt(m+t)}{3\xi}$, $\dfrac{x}{3} + \dfrac{2ru}{3\xi}$ i $\dfrac{x}{3} + \dfrac{2r(z+1)}{3\xi}$. Zaključujemo da je razlika $\varphi(G_2G_1, G_2G_3) - \dfrac{1}{9}$ zapravo kvocijent $\dfrac{t^2(m^2-2)}{9\xi^2}$.

Implikaciju (b) ⇒ (s) možemo dokazati i ovako. Neka je I polovište segmenta $\overline{CD}$. Dilatacija sa središtem u točki C i faktorom 2 preslikava $\overline{GI}$ na $\overline{AD}$, pa je $|GI| = \frac{|AD|}{2}$; slično je $|HI| = \frac{|BC|}{2}$. Dakle, $\varphi(GI, HI) = \frac{1}{4}$. S druge strane, dilatacija sa središtem u točki X i faktorom $\frac{3}{2}$ G_1G_2 na GI, pa je $|G_1G_2| = \frac{2}{3}|GI|$; slično je $|G_3G_2| = \frac{2}{3}|HI|$. Dakle, $\varphi(G_1G_2, G_3G_2) = \frac{1}{9}$.

Neka su U i V polovišta segmenata $\overline{CC'}$ i $\overline{DD'}$.

(t) $\varphi(NU, NV) = 1$.

(u) $\varphi(OU, OV) = \varphi(N_6U, N_5V) = \frac{1}{2}$.

Dokaz tvrdnji (t) *i* (u): Iz $U = \left(\frac{r(uv+z^2)}{\eta\xi}, 0\right)$ i $V = \left(\frac{r(uv-z^2)}{\eta\xi}, 0\right)$ slijedi da je

$$\varphi(NU, NV) - 1 = \varphi(OU, OV) - \frac{1}{2} = \frac{t^2v^2(m^2-2)}{\eta^2\xi^2}.$$

Neka je $W = U \oplus V$.

(v) Središte W leži na kružnici kojoj je segment $\overline{AB}$ dijametar.

Dokaz tvrdnje (v): Iz $W = \left(\frac{ruv}{\eta\xi}, \frac{rz^2}{\eta\xi}\right)$ slijedi $|WO|^2 - r^2 = \frac{2r^2t^2v^2(m^2-2)}{\eta^2\xi^2}$.

(w) $\varphi(WN_i, WN_j) = \frac{1}{2}$, za $i \in \{1,3\}$ i $j \in \{2,4\}$.

(x) $\varphi(W^*N, WN) = 1$.

(y) Pravci WN_1 i WN_2 su okomiti.

(z) Pravci WN_3 i WN_4 su okomiti.

Dokaz tvrdnje (y): Jednadžbe pravaca WN_1 i WN_2 imaju oblike $(z^2-\eta)x + (z^2-\xi)y = \lambda$ i $(m^2-\eta)x - (m^2-\xi)y = \mu$, gdje su λ i μ nekakvi realni brojevi. Ti pravci bit će okomiti onda i samo onda ako je produkt $2vz(m^2-2)$ jednak nuli.

Neka je $K_1 = B \oplus N_1$, $K_2 = N_2 \oplus A$, $K_3 = B \oplus N_3$, $K_4 = N_4 \oplus A$. Te se točke mogu opisati jednostavnije. Sve imaju istu visinu kao i točka N, a vertikalno su iznad točaka N_6, N_5, N_8, N_7. U sljedećih šest tvrdnji pojavljuju se pomalo neobični brojevi.

(a1) $\varphi(A'K_2, B'K_1) = \varphi(A'K_4, B'K_3) = \dfrac{7}{4} + \sqrt{2}$.

(b1) $\varphi(A'K_2^*, B'K_1^*) = \varphi(A'K_4^*, B'K_3^*) = \dfrac{7}{4} - \sqrt{2}$.

Dokaz tvrdnje (a1): Budući da je $K_2 = \left(\dfrac{-rt}{\xi}, r\right)$ i $K_1 = \left(\dfrac{r}{\xi}, r\right)$, slijedi da se razlika $\dfrac{7}{4} + \sqrt{2} - \varphi(A'K_2, B'K_1)$ može prikazati kao kvocijent $\dfrac{M(m-\sqrt{2})}{4m^2\xi^2}$, gdje je M suma $\left(4(m+1)\xi^2 - z^2\right)\sqrt{2} + m(z+2v)(3z+2v)$.

Ako zamijenimo točke A' i B' točkama A i B u (a1) i (b1), dobit ćemo broj $\dfrac{3}{4}$ kao zajedničku vrijednost funkcije φ u sva četiri slučaja.

Neka je $K = P \oplus A'$, $L = P \oplus B'$, $S = P \oplus A''$, $T = P \oplus B''$.

(c1) $\varphi(AK^*, BL) = \varphi(AS, BT^*) = 1 + \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Dokaz tvrdnje (c1): Budući da je $K^* = \left(\dfrac{r(\xi - tz)}{mv}, \dfrac{-r(m+\eta)}{mv}\right)$ i

$L = \left(\dfrac{r(m-\xi)}{mv}, \dfrac{-r(tz+\eta)}{mv}\right)$, imamo $1 + \dfrac{\sqrt{2}}{2} - \varphi(AK^*, BL) = \dfrac{(1+\sqrt{2})(m-\sqrt{2})(m+2-\sqrt{2})}{2m^2}$.

Neka su S_1 i T_1 oznake za polovišta segmenata $\overline{A'C}$ i $\overline{B'D}$. Slično, neka S_2 i T_2 budu polovišta segmenata $\overline{A'C'}$ i $\overline{B'D'}$.

Primijetimo da je $\varphi(G_S S_1, H_S T_1) = \varphi(G_S' S_1, H_S' T) = \dfrac{(s+1+\sqrt{2})^2 + 1}{4(s+1)^2}$.

(d1) $\varphi(NS_1, NT_1) = \varphi(NS_2, NT_2) = 1 + \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

(e1) $\varphi(OS_1, OT_1) = \varphi(OS_2, OT_2) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Dokaz tvrdnje (e1): Iz pravokutnih trokuta OGS_1 i OHT_1 i iz (e) slijedi da je suma $|OS_1|^2 + |OT_1|^2 = (|OG|^2 + |GS_1|^2) + (|OH|^2 + |HT_1|^2)$ jednaka izrazu $(|OG|^2 + |OH|^2) + \dfrac{|AB|^2}{4} = \dfrac{1}{2}|AB|^2$.

Zamjenom točke $N = (0, r)$ njezinom refleksijom $N^* = (0, -r)$ u pravcu AB u tvrdnji (d1) na desnoj će se strani predznak + promijeniti u njemu suprotan predznak –.

Za točke X i Y neka σ_X^Y označava refleksiju točke X u točki Y. Neka je $Q = \sigma_A^D$, $R = \sigma_B^C$, $Q' = \sigma_A^{D'}$, $R' = \sigma_B^{C'}$.

(f1) $\varphi(A'Q, B'R) = \varphi(A'Q', B'R') = 5$.

Dokaz tvrdnje (f1): Budući da je $Q = \left(\dfrac{r(u+3z+2)}{\xi}, 0 \right)$ i $R = \left(\dfrac{r(3u-3z-2)}{\xi}, 0 \right)$, vidimo da je $5 - \varphi(A'Q, B'R) = \dfrac{\eta(m^2-2)(\xi+2z)}{m^2\xi^2}$.

Iz pravokutnih trokuta $AA'Q$ i $BB'R$ zaključujemo da su $|A'Q|^2$ i $|B'R|^2$ jednaki $4(a+b)^2 + |A'A|^2$ i $4(b+c)^2 + |B'B|^2$. Zbrajanjem iz (1) slijedi da je $\varphi(A'Q, B'R) = 5$. Slično je $\varphi(AQ, BR) = 4$ i $\varphi(N_5Q, N_6R) = \dfrac{5}{2}$.

3. Zajednička svojstva

Postoje mnoga svojstva Fermatove proširene konfiguracije koja vrijede za sve omjere m duljina stranica pravokutnika $ABB'A'$. Sada navodimo jedan primjer takvih svojstava.

Teorem 2. *Zajednički ortocentar (sjecište visina – okomica na stranice kroz nasuprotne vrhove) trokuta ADP i BCP leži na kružnici kojoj je segment $\overline{CD}$ dijametar.*

Zajednički ortocentar trokuta $AD'P$ i $BC'P$ leži na kružnici kojoj je segment $\overline{C'D'}$ dijametar.

Dokaz: Lako se vidi da ortocentri trokuta ADP i BCP imaju koordinate $\left(\dfrac{ru}{v}, \dfrac{2mrt^2}{\xi v} \right)$. Ako je I polovište segmenta $\overline{CD}$ i L ortocentar trokuta ADP, onda je $|CI|^2 - |IL|^2 = 0$. Dakle, $|CI| = |IL|$ (tj. L je na kružnici kojoj je segment $\overline{CD}$ dijametar).

4. Drugi omjeri

Članak završavamo još jednim rezultatom u kojemu se opet pojavljuju neki drugi omjeri pored dobro nam znanog $\sqrt{2}$. Omjer $m = 1$ (kada je $ABB'A'$ kvadrat) već smo upoznali u napomeni poslije dokaza svojstava (k) i (m).

Teorem 3. *Omjer m je* $\sqrt{2}$ *ili* 2 + $\sqrt{2}$ *onda i samo onda ako za svaku točku P kružnice vrijedi* $\varphi(AK, BL^*) = \varphi(AS^*, BT) = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Dokaz: Budući da su $\left(\frac{-r(\xi + tz)}{mv}, \frac{r(m-\eta)}{mv}\right)$ i $L = \left(\frac{r(m+\xi)}{mv}, \frac{r(tz-\eta)}{mv}\right)$ koordinate od K i L^*, imamo da je $1 - \frac{\sqrt{2}}{2} - \varphi(AK, BL^*) = \frac{(1-\sqrt{2})(m-\sqrt{2})(m-2-\sqrt{2})}{2m^2}$.

Napomena. Ovaj članak ima podudarnosti s [2] gdje se promatra općenitiji slučaj konika (elipsa, parabola i hiperbola) umjesto kružnice.

Literatura:

[1] E. C. Catalan, *Théorèmes et problèmes de Géométrie* 6e ed., Paris, 1879

[2] Zvonko Čerin, *Fermatov problem za konike*, Matematičko-fizički list **LXII** 4 (2011. – 2012 .), (prijavljeno).

[3] Leonard Euler, *Various Geometric Demonstrations*, New Commentaries of the Petropolitan Academy of Sciences I, (1747/48), 1750, pp. 49-66 (Prijevod na engleski Adama Glovera 2005. dostupan na internetskoj adresi euler.com).

[4] F. G. -M., *Exercices de Géométrie (6e ed.)*, Éditions Jacques Gabay, Paris 1991. (Preslika šestog izdanja od Mame i De Gigord, Paris 1920.)

[5] M. L. Hacken, *Sur un théorème de Fermat*, Mathesis **27** (1907), pp. 181, 264

[6] Željko Hanjš, Vladimir P. Volenec, *O jednom (davno riješenom) Fermatovom problemu*, Matematičko-fizički list **LXI** 4 (2010. – 2011.), 225.

[7] Eugène Lionnet, *Solutions des questions proposées*, Nouvelles Annales de Mathématiques, Series 2, Vol 9 (1870), pp. 189-191. (Dostupan na internetskoj adresi www.numdam.org)